ইউনিট 1
ফাংশন ও সীমা

ভূমিকা

আধুনিক গণিত শাস্ত্রের একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা হল ক্যালকুলাস। ক্যালকুলাস একটি ল্যাটিন শব্দ যার অর্থ 'নুড়ি' (pebble)*। ক্যালকুলাসের সাহায্যে মূলতঃ দুইটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়ের অনুসন্ধান করা হয়। একটি হল রেখার* (Curve) *ঢালুতার* (Slope) *অর্থের অনুসন্ধান করে তার মান নির্ণয় করা এবং অপরটি হল কোন রেখার দ্বারা পরিবেষ্ঠিত স্থানের ক্ষেত্রফলের অর্থ বের করে তার মান নির্ণয় করা। প্রথমোক্ত বিষয়ে অন্তরকলন বিদ্যা* (Dfferential Calculus) *এবং দ্বিতীয় বিষয়ে সমাকলন বিদ্যা* (Integral Calculus)-*এর আলোচনা করা হয়ে থাকে।*

একটি রাশির উপর অন্য একটি রাশির নির্ভরশীলতা বুঝানোর জন্য ১৬৭৩ সালে গটফ্রাইড উইলহেম লিবনিজ (Gottfried Wilhelm Leibnitz) *প্রথম 'ফাংশন'* (Function) *শব্দটি ব্যবহার করেন। গণিত শাস্ত্রের প্রত্যেক শাখায় বিশেষ করে ক্যালকুলাসের ফাংশনের ব্যবহার অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। অন্তরকলন বিদ্যার মূল ধারণায় তা অত্যাধিক প্রয়োজনীয়। আবার ক্যালকুলাসের ধারণা তথা এর মৌলিক বিষয়সমূহ ফাংশনের সীমাস্থ মান বা সীমার ধারণার উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে। ফলে ক্যালকুলাসের মূল বিষয়সমূহ ও তাদের প্রয়োগবিধি সম্পর্কে স্বচ্ছ ধারণা পেতে হলে ফাংশন, সীমা, সীমা সম্পর্কিত সূত্র ও তত্ত্বসমূহ সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা থাকেত হবে। এই ইউনিটে ফাংশন ও সীমা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।*

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- ফাংশনের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং ফাংশন সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- লেখচিত্রের সাহায্যে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধারণা ব্যাখ্যা দিতে পারবেন;
- উদাহরণ ও লেখচিত্রের সাহায্যে সীমা ব্যাখ্যা করার দক্ষতা অর্জন করবেন;
- একদিকবর্তী সীমা ব্যাখ্যা করার দক্ষতা অর্জন করবেন;
- সীমার মৌলিক ধর্মাবলী বর্ণনা ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- অসীম সীমার ধারণা বর্ণনা ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{n}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

পাঠ-১

ফাংশনের সংজ্ঞা ও ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- চলক ও ধ্রুবকের সংজ্ঞা দিতে পারবেন;
- ফাংশনের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

সমস্ত রাশিকে আমরা দুইভাবে ভাগ করে থাকি। যথা চলক ও ধ্রুবক। ফাংশন সম্পর্কে আলোচনার পূর্বে আসুন আমরা ধ্রুবক ও চলক সম্পর্কে অবহিত হয়। কারণ ফাংশনের ধারণা ব্যাখ্যার জন্য এ সম্পর্কে জ্ঞান অপরিহার্য।

ধ্রুবক (Constant)

যে প্রতীক গাণিতিক প্রক্রিয়ায় প্রয়োগের পরও একই সংখ্যাসূচক মান থাকে তাকে ধ্রুবক বলা হয়। 1, 2, 3, ..., π ব্যাতীত সাধারণত বর্ণমালার প্রথম দিকের বর্ণ $a, b, c,$ ......, এবং গ্রীক অক্ষর α, β, γ.... ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা ধ্রুবক সূচিত হয়।

চলক (Variable)

যে প্রতীক গাণিতিক প্রক্রিয়ার প্রয়োগের পর একই মানে অবস্থান না করে কোন নির্দিষ্ট এলাকার মধ্যবর্তী যে কোন মান ধারণে সক্ষম তাকে চলক বা চলরাশি বলে। সাধারণত x, y, z, u, v, w, s, t ইত্যাদি দ্বারা চলক সূচিত হয়।

স্বাধীন চলক (Independent Variable)

যে চলক তার উপর আরোপিত সকল মান গ্রহণ করতে পারে তাকে স্বাধীন চলক বলে। যেমন x, y, z, u, v ইত্যাদি।

অধীন চলক (Dependent Variable)

যে চলকের মান অপর চলকের উপর নির্ভরশীল তাকে অধীন চলক বলে। যেমন $y = \sin x$, এখানে x এর মানের উপর $\sin x$ অর্থাৎ y এর মান নির্ভরশীল।

অবিচ্ছিন্ন চলক (Continuous Variable)

যদি চলক x দুটি প্রদত্ত রাশি a ও b এর মধ্যবর্তী বাস্তব সংখ্যা হতে সকল সংখ্যাসূচক মান গ্রহণ করতে পারে তবে তাকে অবিচ্ছিন্ন চলক বলে। a হতে b পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যার সেটকে চলক x এর ডোমেন বলে এবং একে $a \leq x \leq b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ডোমেনটি উভয় প্রান্তে আবদ্ধ (close) এবং একে $[a,b]$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। a ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত না হলে তাকে $a < x \leq b$ এবং b ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত না হলে তাকে $a \leq x < b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $a < x \leq b$ ডোমেনের বাম প্রান্ত উন্মুক্ত এবং একে $(a,b]$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়। $a \leq x < b$ ডোমেনের ডান প্রান্ত উন্মুক্ত এবং একে $[a,b)$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়। যদি a ও b উভয়ই ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত না হয় তবে তাকে $a < x < b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $a < x < b$ ডোমেনটির উভয় দিকই উন্মুক্ত এবং একে (a,b) দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

যেমন $\sqrt{(5-x)(x+3)}$ রাশিটিতে x একটি অবিচ্ছিন্ন চলক যার ডোমেন $-3 \leq x \leq 5$

আবার, $\sqrt{\dfrac{x+2}{7-x}}$ এর ক্ষেত্রে x এর ডোমেন $-2 \leq x < 7$

ফাংশন (Function)

সংজ্ঞা ঃ দুইটি বাস্তব চলক x ও y যদি এমনভাবে সম্পর্কিত হয় যেমন x-এর যে কোন মান প্রদানের জন্য y এর অনুরূপ একটি মান নির্ণীত হয় তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়।

অন্যভাবে x এর প্রদত্ত ডোমেনের জন্য x এর কোন ফাংশন বলতে এমন একটি রাশি বুঝায় যে, ঐ ডোমেনে x এর প্রতিটি মানের জন্য x এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়।

সাধারণত x এর ফাংশনকে $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

দুইটি বাস্তব চলক x ও y যদি এমনভাবে সম্পর্কিত হয় যেমন x-এর যে কোন মান প্রদানের জন্য y এর অনুরূপ একটি মান নির্ণীত হয় তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়।

উদাহরণ ঃ

(1) যদি $y = x^2+3x+5$ হয় তবে y, x এর একটি ফাংশন। কারণ x-এর প্রতিটি মানের জন্য y এর একটি নির্দিষ্ট মান আছে এবং y এর মান সম্পূর্ণরূপে x এর মানের উপর নির্ভরশীল।

(2) $A = \pi r^2$ একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল। এখানে π ধ্রুবক। সুতরাং A এর মান r এর মানের উপর নির্ভরশীল। r এর মানের হ্রাসবৃদ্ধিতে A এর মানের হ্রাসবৃদ্ধি ঘটবে। সুতরাং A, r এর একটি ফাংশন।

পাঠ-২
বিভিন্ন প্রকার ফাংশন

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বিভিন্ন প্রকার ফাংশন সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

একমান বিশিষ্ট ফাংশন (single Valued Function)

একটি ফাংশন $f(x)$ কে একমান বিশিষ্ট ফাংশন বলা হয়, যদি ফাংশনের অন্তর্গত স্বাধীন চলকের প্রতিটি মানের জন্য ফাংশনটির একটি মান থাকে। যেমন $y = 3x+5$, $y = e^x$, $y = x^2$ ইত্যাদি।

উপরের উদাহরণে x এর প্রতিটি মানের জন্য y এর একটি মান থাকে।

বহুমান বিশিষ্ট ফাংশন (Many Valued Function)

একটি ফাংশন $f(x)$ কে বহুমান বিশিষ্ট ফাংশন বলা হয় যদি ফাংশনের অন্তর্গত স্বাধীন চলকের প্রতিটি মানের জন্য ফাংশনটির একাধিক মান থাকে। যেমন $y^2 = x$, $y = \sin^{-1}x$ ইত্যাদি।

প্রথম উদাহরণে x এর প্রতিটি মানের জন্য y-এর দুইটি মান পাওয়া যায়। ফলে ইহা দ্বিমান বিশিষ্ট ফাংশন এবং দ্বিতীয় উদাহরণে x এর প্রতিটি মানের জন্য y-এর একাধিক মান পাওয়া যায়। ফলে ইহা একাধিক মান বিশিষ্ট ফাংশন।

বিপরীত ফাংশন (Inverse function)

যদি $y = f(x)$ এবং $x = g(y)$ হয় অর্থাৎ $y = f\{g(y)\}$ হয় তবে $x = g(y)$ কে $y = f(x)$ এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়।

ধ্রুবক ফাংশন (Constant function)

যদি $y = f(x)$ ফাংশনের মান সর্বদাই একটি ধ্রুবক সংখ্যা বা নির্দিষ্ট সংখ্যা হয় তবে তাকে ধ্রুবক ফাংশন বলে। যেমন $y = f(x) = 9$, এখানে x এর যে কোন মানের জন্য ফাংশনটির মান নির্দিষ্ট।

বহুপদী ফাংশন (Poly nomial function)

$y = f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{-------}+a_nx^n$, যেখানে a_0, a_1, a_2, a_3 ------a_n সকলে ধ্রুবক এবং n ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, এই আকারের ফাংশনকে বহুপদী ফাংশন বলা হয়। যেমন– $y = f(x) = 3x$, একপদী ফাংশন

$y = f(x) = 3x+2$ দ্বিপদী ফাংশন

$y = f(x) = 3x^2+9x+3$ ত্রিপদী ফাংশন।

সূচক ফাংশন (Exponential function)

e কে ভিত্তি হিসেবে গণ্য করলে যে ফাংশনের সৃষ্টি হয় তাকে সূচক ফাংশন বলে। যেমন $y = f(x) = e^x$.

$y = 2^x$, $y = a^x$, $y = 10^x$, $y = x^x$ ইত্যাদি সকলেই সূচক ফাংশনের উদাহরণ।

লগারিদম ফাংশন (Logarithomic Function)

সূচক ফাংশনের বিপরীত ফাংশনকে লগারিদমিক ফাংশন বলে। যেমন $x = e^y$ হলে $y = \log_e x$।

$\therefore$ y $= f(x) = \log_e x$ লগারিদম ফাংশন।

y $= \log_x a$, $\log_{10} x$, $\log \cos x$ ইত্যাদি সকলে লগারিদম ফাংশনের উদাহরণ।

বৃত্তীয় ফাংশন (Circular function)

y $= f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$, $f(x) = \sec x$, $f(x) = \operatorname{cosec} x$ ইত্যাদি ফাংশনকে বৃত্তীয় ফাংশন বলে।

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন (Inverse Circular function)

y $= f(x) = \sin^{-1}x$. y $= \cos^{-1}x$, y $= \tan^{-1}x$, y $= \cot^{-1}x$, y $= \sec^{-1}x$, y $= \operatorname{cosec}^{-1}x$ ইত্যাদি ফাংশনকে বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন বলে।

ব্যক্ত ফাংশন (Explicit function)

যে সমস্ত ফাংশনকে সরাসরি স্বাধীন চলকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় তাকে ব্যক্ত ফাংশন বলে। একে প্রকাশ্য ফাংশনও বলা হয়।

যেমন y $= \sin x$, y $= x^3 + \log x$, y$= e^{ax}\cos bx$ ইত্যাদি সকলে ব্যক্ত ফাংশন।

অব্যক্ত ফাংশন (Implicit function)

যে সমস্ত ফাংশনকে সরাসরি স্বাধীন চলকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না, দুইটি চলকের মিশ্রণরূপে প্রকাশ করা হয় তাদের একটিকে অপরটির অব্যক্ত ফাংশন বলে। একে অপ্রকাশ্য ফাংশনও বলা হয়।

যেমন $x^2 + y^2 = a^2$

$3x^2 + 2xy + y^2 = a^2$ ইত্যাদি।

এখানে x ও y চলকদ্বয় একে অপরের অপ্রকাশ্য ফাংশন।

অযুগ্ম ফাংশন (Odd function)

একটি ফাংশনকে অযুগ্ম ফাংশন বলা হয় যদি তার চলকের চিহ্ন পরিবর্তনের ফলে ফাংশনটির চিহ্ন পরিবর্তন হয়।

ধরুন, $f(x)$ একটি ফাংশন। যদি x এর পরিবর্তে $-x$ বসালে $f(-x) = -f(x)$ হয় তাহলে $f(x)$ অযুগ্ম ফাংশন।

$f(x) = \sin x$ হলে $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

অতএব, এটি একটি অযুগ্ম ফাংশন।

যুগ্ম ফাংশন (Even function)

যদি চলকের চিহ্নের পরিবর্তনের ফলে ফাংশনের চিহ্নের পরিবর্তন না হয় তাহলে ফাংশনটি যুগ্ম ফাংশন।

যেমন, $f(x) = \cos x$ হলে $f(-x) = \cos(-x) = \cos x$

এটি একটি যুগ্ম ফাংশন।

পর্যায়বৃত্ত ফাংশন (Periodic function)

যদি x এর সকল মানের জন্য $f(x) = f(x+d)$ হয়, তবে ফাংশন $f(x)$ কে d পর্যায় বিশিষ্ট পর্যায়বৃত্ত ফাংশন বলা হয়।

সকল ত্রিকোণমিতিক ও সূচক ফাংশন পর্যায়বৃত্ত ফাংশন। ত্রিকোণমিতিক ফাংশন 2π পর্যায় বিশিষ্ট পর্যায়বৃত্ত ফাংশন। সূচকীয় ফাংশন $e^{2\pi i}$ পর্যায় বিশিষ্ট পর্যায়বৃত্ত ফাংশন।

পাঠ-৩

ফাংশন সম্পর্কিত বিবিধ সমস্যার সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- ফাংশন সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

উদাহরণ-1ঃ $f(x) = 4x^2+4x-5$ হলে $f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right), f(0), f(a)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $f(x) = 4x^2+4x-5$

x এর পরিবর্তে 1 বসালে পাই

$$\begin{aligned} f(1) &= 4.1^2+4.1-5 \\ &= 4+4-5 \\ &= 8-5 = 3 \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে $f(-1) = 4(-1)^2 + 4(-1) - 5$
$$\begin{aligned} &= 4-4-5 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 4.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 5 \\ &= 4.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{2} - 5 \\ &= 1+2-5 \\ &= 3-5 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 4(0)^2 + 4(0) - 5 \\ &= 0+0-5 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a) &= 4.a^2+4.a-5 \\ &= 4a^2+4a-5 \end{aligned}$$

উদাহরণ 2ঃ $f(\theta) = \sin\theta$ হলে $f(0°), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $f(\theta) = \sin\theta$

এখন θ এর স্থলে 0° বসালে পাই

$$f(0°) = \sin 0° = 0$$

অনুরূপভাবে $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

উদাহরণ 3 ঃ $f(x) = \log x$ হলে দেখান যে, (i) $f(a\mathrm{b}) = f(a) + f(\mathrm{b})$

(ii) $f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \log x$

$\therefore f(a\mathrm{b}) = \log a\mathrm{b} = \log a + \log \mathrm{b}$

আবার $f(a) = \log a$ এবং $f(\mathrm{b}) = \log \mathrm{b}$.

$\therefore f(a\mathrm{b}) = f(a) + f(\mathrm{b})$.

(ii) $f\left(\frac{1}{a}\right) = \log\frac{1}{a} = -\log a$

আবার $f(a) = \log a$

$\therefore f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

উদাহরণ 4 ঃ যদি $f(x) = h\frac{x-\mathrm{k}}{h-\mathrm{k}} + \mathrm{k}\frac{x-h}{\mathrm{k}-h}$ হয় তবে দেখান যে,

$f(h) + f(\mathrm{k}) = f(h+\mathrm{k})$

সমাধান ঃ $f(x) = h\frac{x-\mathrm{k}}{h-\mathrm{k}} + \mathrm{k}\frac{x-h}{\mathrm{k}-h}$

x এর পরিবর্তে যথাক্রমে h ও k বসিয়ে পাই–

$$f(h) = h\frac{h-\mathrm{k}}{h-\mathrm{k}} + \mathrm{k}\frac{h-h}{\mathrm{k}-h} = h$$

$$f(\mathrm{k}) = h\frac{\mathrm{k}-\mathrm{k}}{h-\mathrm{k}} + \mathrm{k}\frac{\mathrm{k}-h}{\mathrm{k}-h} = \mathrm{k}$$

$\therefore\ f(h) + f(\mathrm{k}) = h+\mathrm{k}$ ....(1)

আবার x এর পরিবর্তে $h+\mathrm{k}$ বসিয়ে পাই–

$$f(h+\mathrm{k}) = h\frac{h+\mathrm{k}-\mathrm{k}}{h-\mathrm{k}} + \mathrm{k}\frac{h+\mathrm{k}-h}{\mathrm{k}-h}$$

$$= \frac{h^2}{h-\mathrm{k}} + \frac{\mathrm{k}^2}{\mathrm{k}-h}$$

$$= \frac{h^2}{h-\mathrm{k}} + \frac{\mathrm{k}^2}{-(h-\mathrm{k})}$$

$$= \frac{h^2}{h-\mathrm{k}} - \frac{\mathrm{k}^2}{h-\mathrm{k}}$$

$$= \frac{h^2-\mathrm{k}^2}{h-\mathrm{k}}$$

$$= \frac{(h+\mathrm{k})\,(h-\mathrm{k})}{(h-\mathrm{k})} = h+\mathrm{k} \text{ .... (2)}$$

এখন (1) ও (2) হতে পাই

$f(h) + f(\mathrm{k}) = f(h+\mathrm{k})$

উদাহরণ 5 ঃ যদি $f(x) = \log \sin x$ এবং $\phi(x) = \log \cos x$ হয় তবে দেখান যে,

(i) $e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$ (ii) $e^{2f(a)} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

সমাধান ঃ (i) $f(x) = \log \sin x$ এর $\phi(x) = \log \cos x$

$\therefore f(a) = \log \sin a$ এবং $\phi(a) = \log \cos a$

বামপক্ষ $= e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)}$

$= e^{2 \log \cos a} - e^{2 \log \sin a}$

$= e^{\log \cos^2 a} - e^{\log \sin^2 a}$

$= \cos^2 a - \sin^2 a$

$= \cos 2a$

ডানপক্ষ $= e^{\phi(2a)}$

$= e^{\log \cos 2a}$

$= \cos 2a.$

$\therefore e^{2\phi(a)} - e^{2\partial(a)} = e^{\phi(2a)}$

(ii) $e^{2f(a)}$

$= e^{2 \log \sin a}$

$= e^{\log \sin^2 a}$

$= \sin^2 a$

$= \frac{1}{2}\ 2\sin^2 a$

$= \frac{1}{2}(\ 1 - 1 + 2\sin^2 a)$

$= \frac{1}{2}\ \{1 - (1 - 2\sin^2 a)\}$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

$\therefore e^{2f(a)} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

উদাহরণ 6 : যদি $f(x) = \sin x$ হয় তবে দেখান যে,

$f(2x) = 2f(x).\sqrt{(1 - \{f(x)\}^2)}$

সমাধান ঃ $f(x) = \sin x$

$\therefore f(2x) = \sin 2x$

$= 2 \sin x \cos x$

$= 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$= 2 \sin x \sqrt{1 - (\sin x)^2}$

$= 2 f(x) \sqrt{1 - \{\partial(x)\}^2}$

উদাহরণ 7 : যদি $f(x) = \sin x$ হয় তবে দেখান যে,

$f(x) = f(x+2\pi) = f(x+4\pi) = f(x+6\pi) = $ ------

সমাধান ঃ $f(x) = \sin x$ ----------(i)

x এর পরিবর্তে $x + 2\pi$ বসিয়ে

$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x$ -------- (ii)

x এর পরিবর্তে $x+4\pi$ বসিয়ে

$f(x+4\pi) = \sin(x+4\pi) = \sin(x+2-2\pi) = \sin x$ ----(iii)

x এর পরিবর্তে $x+6\pi$ বসিয়ে

$f(x+6\pi) = \sin(x+6\pi) = \sin(x+3.2\pi) = \sin x$....... (iv)

x এর পরিবর্তে $x + 8\pi$ বসিয়ে

$f(x+8\pi) = \sin(x+8\pi) = \sin(x+4.2\pi) = \sin x$.........(v)

এখন (i), (ii), (iii), (iv), (v) হতে পাওয়া যায়

$f(x) = f(x+2\pi) = f(x+4\pi) = f(x+6\pi) = $ --------------

অনুশীলনী– ১.১

1. যদি $\psi(x) = \dfrac{3x+4}{x-5}$ হয় তবে $\psi(3), \psi(\frac{1}{3})$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. $\phi(\theta) = \sec\theta + \cos\theta$ হলে দেখান যে, $\phi(\theta) = \phi(-\theta)$
3. $f(x) = \tan x$ হলে $\dfrac{\partial(x+h) - \partial(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় করুন।
4. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ হলে দেখান যে, $f(\cos\theta) = \tan^2\dfrac{\theta}{2}$
5. যদি $\phi(x) = \log\dfrac{1-x}{1+x}$ হয় তবে দেখান যে, $\phi(y) + \varphi(z) = \varphi\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$
6. যদি $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{bx-a}$ হয় তবে দেখান যে, $f(y) = x$.
7. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ হলে $f\left(\dfrac{p}{q}\right) \div f\left(\dfrac{q}{p}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন।
8. $f(x) = e^x + e^{-x}$ হলে প্রমাণ করুন $f(x+y)\, f(x-y) = f(2x) + f(2y)$
9. দেখান যে, $\tan x$ একটি পর্যায়বৃত্ত ফাংশন যার পর্যায়কাল π.
10. $\phi(x) = \tan x$ হলে দেখান যে, $\phi(a-b) = \dfrac{\varphi(a) - \varphi(b)}{1+\varphi(a)\varphi(b)}$

পাঠ-৪
সীমার ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপানি–

- ফাংশনের সীমা বা লিমিট সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

ফাংশনের সীমা বা লিমিট (limit of a function)

ক্যালকুলাসের ধারণা তথা এর মৌলিক বিষয়সমূহ ফাংশনের সীমাস্থ মান অথবা সীমার ধারণার উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে। ফলে ক্যালকুলাসের মূল বিষয়সমূহ ও তাদের প্রয়োগবিধি সম্পর্কে স্বচ্ছ ধারণা পেতে হলে সীমা সম্পর্কিত সূত্র ও তত্ত্বসমূহ জানা একান্ত প্রয়োজন।

ধরুন $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

এখন $f(1)=\frac{0}{0}$ যা অসজ্ঞায়িত (Undefined)

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, চলরাশি x এর মানগুলো যথাক্রমে 0.9, 0.99, 0.999 ––––– অথবা 1.1, 1.01, 1.001––––। উভয় ক্ষেত্রেই x এর সীমাস্থ মান 1 অর্থাৎ $x \to 1$। প্রথম ক্ষেত্রে x এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম থেকে 1 এর নিকটবর্তী হয় এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে x এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তম থেকে 1 এর নিকটবর্তী হয়। প্রথম ক্ষেত্রে $x \to 1^-$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $x \to 1^+$ সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

এখন $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনে x-এর মানগুলো বসালে $f(x)$ এর নিম্নলিখিত মানগুলি পাওয়া যায়–

$x = 0.9$ হলে $f(x) = 1.9$

$x = 0.99$ হলে $f(x) = 1.99$

$x = 0.999$ হলে $f(x) = 1.999$

––––––––––––––––––––––––––––––––

$x = 1.1$ হলে $f(x) = 2.1$

$x = 1.01$ হলে $f(x) = 2.01$

$x = 1.001$ হলে $f(x) = 2.001$

উপরোক্ত ফলাফল হতে স্পষ্ট বুঝা যাচ্ছে প্রদত্ত ফাংশনে চলরাশি x-এর মান যত 1 এর কাছাকাছি হচ্ছে $f(x)$ এর মান ততই 2 এর কাছাকাছি হচ্ছে। অতএব, উভয়ক্ষেত্রে $x \varnothing 1$ হলে $f(x) \varnothing 2$ হয়। অতএব 2 এক্ষেত্রে ফাংশন $f(x)$ এর সীমাস্থ মান বা সীমা (limit)। একে প্রতীকের সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে লেখা হয়–

$$\lim_{x \to 1} \partial(x)=2$$

অতএব, ফাংশনের সীমাকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সংজ্ঞা ঃ চলরাশি x এর মান একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হয়ে a এর সন্নিকটবর্তী হওয়ায় যদি একটি প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l এর সন্নিকটবর্তী হয় তাহলে l কে a বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সীমা (limit) বলে।

একে $\lim_{x \to a} f(x) = l$ বা $\mathrm{Lt}_{x \to a} f(x) = l$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\lim_{x \to a} f(x)$ এবং $f(a)$ এর মধ্যে পার্থক্য

x এর মান ক্রমান্বয়ে a এর সন্নিকটবর্তী ($x>a$ অথবা $x<a$) হতে থাকলে ফাংশন $f(x)$ এর মান যে নিশ্চল রাশির নিকটবর্তী হতে থাকে $\lim_{x \to a} f(x)$ সংকেত দ্বারা তাই বুঝায়।

কিন্তু $f(x)$ ফাংশনে x এর পরিবর্তে a বসানো হলে ফাংশনটির যে নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় $f(a)$ দ্বারা তা নির্দেশ করে।

ফলে $\lim_{x \to a} f(x)$ এর মান এবং $f(a)$ এর মানের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।

পাঠ-৫
সীমাস্থ মান নির্ণয়ের পদ্ধতি

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সীমাস্থ মান নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- সীমাস্থ মান সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ফাংশনের মান নির্ণয়ের পদ্ধতি

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ফাংশনের মান নির্ণয় করতে হলে x-এর পরিবর্তে একটি নতুন চলরাশি h ধরতে হবে যার সীমা শূন্য (0) হলে সুবিধা হয়।

(i) $x = a+h$ বসালে $h = a-x$ হবে। যখন x এর মান a এর সন্নিকটবর্তী হতে থাকে তখন h এর মান শূন্যের (0) সন্নিকটবর্তী হয়।

$$\therefore \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

(ii) তারপর ফাংশনটিকে সরল করতে হবে এবং h এর মান অন্য সংখ্যার তুলনায় অতিশয় ক্ষুদ্র মনে করে ফাংশনের h যুক্ত পদগুলিকে বর্জন করতে হবে।

নিচের ফাংশনটি লক্ষ করা যাক–

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

উপরোক্ত ফাংশনে $x=3$ বসালে $f(3) = \frac{0}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত। কিন্তু $\frac{x^2-9}{x-3}$ ভগ্নাংশটিকে $x+3$ আকারে পরিণত করে $x=3$ বসালে তার মান 6, যা প্রদত্ত ভগ্নাংশের সীমাস্থ মান। এখন যদি প্রদত্ত ফাংশনে x-এর পরিবর্তে $3+h$ বসানো হয় তাহলে ভগ্নাংশটি নিম্ন আকার ধারণ করে–

$$\frac{(3+h)^2-9}{3+h-3}$$
$$= \frac{9+6h+h^2-9}{h}$$
$$= \frac{6h+h^2}{h}$$
$$= \frac{h(6+h)}{h}$$
$$= 6+h$$

যখন h এর মান ক্রমশ: ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর হয় তখন $6+h$ এর মান ক্রমশ 6 এর খুব নিকটবর্তী সংখ্যায় পরিণত হয়।

অতএব, $h \to 0$ হলে (অর্থাৎ h এর মান শূন্যের দিকে অগ্রসর হলে) $6+h \to 6$.

কিন্তু $h \to 0$ হলে $x \to 3$.

$\therefore x \to 3$ হলে $\frac{x^2-9}{x-3} \to 6$

উপরোক্ত ফলটি নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়–

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলির সাহায্যে আপনারা বিষয়টি আরও পরিষ্কারভাবে বুঝতে পারবেন।

উদাহরণ 1 : মান নির্ণয় করুন $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$

সমাধান ঃ $x=a$ হলে রাশিটির মান $\frac{0}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত

ধরুন $x = a+h$ (h ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক)

অতএব, $x \to a$ হলে $h \to 0$ হবে

$$\therefore \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{a+h-a}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2ah+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2a+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2a+h)$$

$$= 2a.$$

উদাহরণ 2: মান নির্ণয় করুন ঃ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2}$

সমাধান ঃ প্রদত্ত রাশিতে $x = 2$ বসালে তা $\frac{0}{0}$ আকার ধারন করে যা অসংজ্ঞায়িত।

ধরুন $x = 2+h$. এখন $x \to 2$ হলে $h \to 0$ হবে

$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+2(2+h)-8}{2+h-2}$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+6h}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+6)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} (h+6)$

$= 6$

উদাহরণ 3 : $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{3x^2-4x+1}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশিতে $x=1$ বসালে তা $\frac{0}{0}$ আকার ধারন করে যা অসংজ্ঞায়িত।

ধরুন $x = 1+h$. তাহলে $x\to 1$ হলে $h\to 0$ হবে।

$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{3x^2-4x+1}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2 + (1+h) -2}{3(1+h)^2-4(1+h)+1}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+2h+h^2)+1+h-3}{3(1+2h+h^2)-4h-4+1}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2+4h+2h^2+1+h-3}{3+6h+3h^2-4h-4+1}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+5h}{3h^2+2h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2h+5)}{h(3h+2)}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h+5}{3h+2}$

$= \frac{5}{2}$

উদাহরণ 4 : মান নির্ণয় করুন $\lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

সমাধান ঃ প্রদত্ত রাশিতে $x=0$ বসালে তা $\frac{0}{0}$ আকার ধারন করে।

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2} \times \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{a^2-(a^2-x^2)}{x^2\,(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{a^2-a^2+x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a+\sqrt{a^2}} = \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a}$$

উদাহরণ 5 ঃ মান নির্ণয় করুন $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

প্রদত্ত রাশিতে $x = 0$ বসালে তা $\frac{0}{0}$ আকার ধারন করে।

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}{x} * \frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x}}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+3x)-(1-4x)}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1+3x-1+4x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{7x}{x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-4x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{7}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{7}{1+1} = \frac{7}{2}$$

অনুশীলনী–১.২

মান নির্ণয় করুন ঃ

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ 2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+2}{x^2+2x-8}$ 3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^4+x^3-x^2-5x+4}{x^3-x^2-x+1}$

4. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ 5. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 6. $\lim_{h \to o} \frac{(x+h)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{h}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1+x}}$

পাঠ-৬
সীমার মৌলিক ধর্মাবলী

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সীমায় মৌলিক ধর্মাবলী বর্ণনা ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সীমা সম্পর্কিত কয়েকটি মৌলিক উপপাদ্য

নিম্নে সীমা সম্পর্কিত কতগুলো মৌলিক উপপাদ্য আলোচনা করা হল। সীমা সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে এগুলো সম্পর্কে জ্ঞান থাকা একান্ত অপরিহার্য। এখানে শুধুমাত্র উপপাদ্যগুলোর বিবৃতি দেয়া হলো।

উপপাদ্য ১ঃ দুই বা ততোধিক ফাংশনের সমষ্টির বা অন্তরফলের সীমা তাদের প্রত্যেকের পৃথক পৃথক সীমার সমষ্টির বা অন্তরফলের সমান।

মনে করুন u, v, w একই চলরাশি x এর ফাংশন

তাহলে $\lim (u \pm v \pm w) = \lim u \pm \lim v \pm \lim w$

উপপাদ্য ২ ঃ দুই বা ততোধিক ফাংশনের গুণফলের সীমা তাদের প্রত্যেকের পৃথক পৃথক সীমার গুণফলের সমান।

$\lim (u*v) = \lim u * \lim v$

উপপাদ্য ৩ ঃ দুটি ফাংশনের ভাগফলের সীমা তাদের সীমার ভাগফলের সমান যদি হরের সীমা শূন্য না হয়

$\lim \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lim u}{\lim v}$ যদি $\lim v \neq 0$.

পাঠ-৭
কয়েকটি প্রয়োজনীয় সীমা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- কয়েকটি প্রয়োজনীয় সীমার মান নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

কয়েকটি প্রয়োজনীয় লিমিটের প্রমাণ

1. প্রমাণ করুন যে, $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+$ ––––––

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots -1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\ldots\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\ldots\right)$$

$$= 1$$

2. প্রমাণ করুন $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

প্রমাণ ঃ $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\ldots\ldots\right)$$

$$= 1$$

3. প্রমাণ করুন $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x} = n$

প্রমাণ : $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left\{1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\text{-----}-1\right\}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left\{nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots\ldots\right\}$

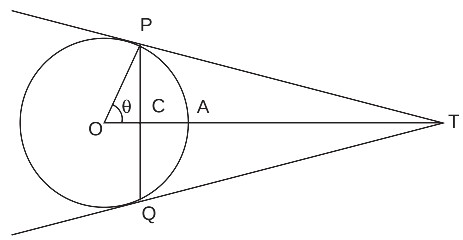
$= \lim_{x\to 0} \left\{n+\dfrac{n(n-1)}{2!}x+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^2+\ldots\ldots\right\}$

$= n$

4. যদি θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ ও রেডিয়ানে প্রকাশিত হয় তবে প্রমাণ করুন,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1, \quad \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$$

প্রমাণ : ধরুন O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের একটি চাপ PAQ এবং OA ব্যাসার্ধ PQ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। তাহলে PAQ চাপও PQ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হবে। ধরুন P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত PT ও QT স্পর্শকদ্বয় OA এর বর্ধিতাংশের সাথে T বিন্দুতে মিলিত হয়। ধরুন □$POA = \theta$ রেডিয়ান



চিত্র ১.৭.১

এখন জ্যা $PQ <$ চাপ $PAQ < PT + QT$

বা, $2PC < 2*$ চাপ $PA < 2PT$

বা, $PC <$ চাপ $PA < PT$

বা, $\dfrac{PC}{OP} < \dfrac{\text{চাপ } PA}{OP} < \dfrac{PT}{OP}$ $[\because OP > 0]$

অর্থাৎ $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ ———————— (i)

বা, $1 < \dfrac{\theta}{\sin\theta} < \dfrac{1}{\cos\theta}$

θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ এবং রেডিয়ানে প্রকাশিত হলে উপরোক্ত অসমতা সত্য হবে। θ এর মান ক্রমাগত কমতে থাকলে শেষ পর্যন্ত OP, PC তে সমাপতিত হবে। সুতরাং $\cos\theta$ এর মান 1 এর নিকটবর্তী হতে হতে শেষ পর্যন্ত 1 এর সমান হবে।

অর্থাৎ যখন $\theta\to 0$ তখন $1 < \lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\sin\theta} < 1$

$\therefore \lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\sin\theta} = 1$ অর্থাৎ $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

আবার, (i) নং হতে

$\cos\theta < \dfrac{\theta}{\tan\theta} < 1$

যখন $\theta\to 0$ তখন $1 < \lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\tan\theta} < 1 \therefore \lim_{\theta\to 0} \dfrac{\theta}{\tan\theta} = 1$

অর্থাৎ $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

পাঠ-৮
সীমা সম্পর্কিত বিবিধ সমস্যার সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সীমা সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

উদাহরণ 1ঃ মান নির্ণয় করুন $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x}{2x^2-5}$

সমাধান : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x}{2x^2-5}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{5}{x^2}}$$

$$= \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1+\frac{3}{x}}{2-\frac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

উদাহরণ 2 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \{\sec x\,(\sec x - \tan x)\}$

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \{\sec x\,(\sec x - \tan x)\}$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x\,(\sec x - \tan x)(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x(\sec^2 x-\tan^2 x)}{\sec x+\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\sec x+\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

উদাহরণ 3 ঃ মান নির্ণয় করুন $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ...\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \ -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - ...\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + ...\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x(1 + \frac{x^2}{3!} + ...)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2\left(1 + \frac{x^2}{3!} + ...\right)$$

$$= 2$$

উদাহরণ 4 ঃ মান নির্ণয় করুন $\lim\limits_{x \emptyset 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^3}$

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x \emptyset 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^3}$

$$= \lim_{x \emptyset 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \emptyset 0} \frac{\sin 2x - \sin 2x \cos 2x}{x^3 \cos 2x}$$

$$= \lim_{x \emptyset 0} \frac{\sin 2x\,(1 - \cos 2x)}{x^3 \cos 2x}$$

$$= \lim_{x \emptyset 0} \frac{2\sin x \cos x .\ 2\sin^2 x}{x^3 \cos 2x}$$

$$= \lim_{x \emptyset 0} 4.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 . \frac{\cos x}{\cos 2x}$$

$$= 4. \lim_{x \emptyset 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 . \frac{\lim\limits_{x \emptyset 0} \cos x}{\lim\limits_{x \emptyset 0} \cos x}$$

$$= 4.1.\frac{1}{1} = 4$$

উদাহরণ 5 ঃ মান নির্ণয় করুন $\lim\limits_{x \emptyset \square} 2^x \sin \dfrac{a}{2^x}$

সমাধান : $\lim\limits_{x\varnothing\square} 2^{x} \sin\dfrac{a}{2^{x}}$

$= \lim\limits_{x\varnothing\square} 2^{x}\left(\dfrac{\sin\frac{a}{2^{x}}}{\frac{a}{2^{x}}}\cdot\dfrac{a}{2^{x}}\right)$

$= \lim\limits_{x\varnothing\square} \dfrac{\sin\frac{a}{2^{x}}}{\frac{a}{2^{x}}} * a$

ধরুন, $\dfrac{a}{2^{x}} = \theta$

যখন $x\varnothing\square$ তখন $\theta\varnothing 0$

$\therefore \lim\limits_{x\varnothing\square} \dfrac{\sin\frac{a}{2^{x}}}{\frac{a}{2^{x}}} * a$

$= \lim\limits_{x\varnothing\theta} \dfrac{\sin\theta}{\theta} * a$

$= 1 * a$

$= a$

উদাহরণ 6 ঃ $\lim\limits_{x\varnothing 0} \dfrac{1-\cos 7x}{3x^{2}}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x\varnothing 0} \dfrac{1-\cos 7x}{3x^{2}}$

$= \lim\limits_{x\varnothing 0} \dfrac{2\sin^{2}\frac{7x}{2}}{3x^{2}}$

$= \dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\varnothing 0} \dfrac{\sin^{2}\frac{7x}{2}}{x^{2}}$

$= \dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\varnothing 0} \dfrac{\sin^{2}\frac{7x}{2}}{\left(\frac{7x}{2}\right)^{2}}\cdot\dfrac{49}{4}$

$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{49}{4}\lim\limits_{x\varnothing 0}\left(\dfrac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\right)^{2} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{49}{4}\cdot 1 = \dfrac{49}{6}$

উদাহরণ 7 ঃ মান নির্ণয় করুন $\lim\limits_{x\varnothing 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}$

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x\varnothing 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}$

$$= \lim_{x \varnothing 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x \varnothing 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\sin^3 x \cos x}$$

$$= \lim_{x \varnothing 0} \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{\sin^3 x \cos x}$$

$$= \lim_{x \varnothing 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x}$$

$$= \lim_{x \varnothing 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \varnothing 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \varnothing 0} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} \cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\lim\limits_{x \varnothing 0} \cos^2 \frac{x}{2} \lim\limits_{x \varnothing 0} \cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.1} = \frac{1}{2}$$

উদাহরণ ৪ ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ $\lim\limits_{x \varnothing \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x \varnothing \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

ধরুন, $x = \frac{\pi}{2} + h$

যখন $x \varnothing \frac{\pi}{2}$ তখন $h \varnothing 0$

$$\therefore \lim_{x \varnothing \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$$

$$= \lim_{h \varnothing 0} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - h\right) \tan \left(\frac{\pi}{2} + h\right)$$

$$= \lim_{h \varnothing 0} \{-h\,(-\cot h)\}$$

$$= \lim_{h \varnothing 0} h \cot h$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{h}{\tan h}\right) = 1$$

উদাহরণ 9 ঃ মান নির্ণয় করুন ঃ $\lim_{x \to \infty} \{\log(3x-1) - \log(x+5)\}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to \infty} \{\log(3x-1) - \log(x+5)\}$

$$= \lim_{x \to \infty} \log \frac{3x-1}{x+5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \log \frac{3 - \frac{1}{x}}{1+5/x}$$

$$= \lim_{\frac{1}{x} \to 0} \log \frac{3 - \frac{1}{x}}{1+5/x} \left[x \to \infty \text{ হলে } \frac{1}{x} \to 0\right]$$

$$= \log \frac{3}{1}$$

$$= \log 3 - \log 1$$

$$= \log 3 - 0$$

$$= \log 3$$

উদাহরণ 10 ঃ মান নির্ণয় করুন $\lim_{x \to y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$

$$= \lim_{x \to y} \frac{2\cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}}{x-y}$$

$$= \lim_{x \to y} \cos\frac{1}{2}(x+y) \cdot \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}$$

$$= \lim_{x \to y} \cos\frac{1}{2}(x+y) \cdot \lim_{x \to y} \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}}$$

$$= \cos\frac{1}{2}(2y) \cdot \lim_{\frac{x-y}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} \quad \left[x \to y \text{ হলে } x-y \to 0 \therefore \frac{x-y}{2} \to 0\right]$$

$$= \cos y \cdot 1 = \cos y$$

অনুশীলনী– ১.৩

মান নির্ণয় করুন ঃ

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x-\sin x}{\sin 6x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{cosec} x-\cot x}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{\tan x-\tan y}{x-y}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী ১.১

1. $-\dfrac{13}{2}, -\dfrac{15}{14}$ 3. $\dfrac{1}{h}\ \dfrac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}$ 7. $\dfrac{p}{q}$

অনুশীলনী ১.২

1. 4, 2. $-\dfrac{1}{6}$, 3. 4, 4. 12, 5.1, 6. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, 7. 1

অনুশীলনী ১.৩

1. $\dfrac{1}{2}$, 2. $\dfrac{a^2}{b^2}$ 3. 1, 4. 8, 5. $\dfrac{1}{2}$

7. $\text{Sec}^2 x$ 8. $\dfrac{1}{2}$