ইউনিট ২

অন্তরক

ভূমিকা

দুইটি চলক যদি এমনভাবে সম্পর্কিত হয় যে একটির যে কোন মান পরিবর্তনের সাথে সাথে অন্যটির অনুরূপ একটি মান নির্ণীত হয়, তবে দ্বিতীয় চলকটিকে প্রথম চলকটির ফাংশন বলে। $y=f(x)$ দ্বারা একটি ফাংশন বুঝানো হয়, যেখানে x এবং y দুইটি চলক এবং x,y এর সাথে সম্পর্কিত। x এর যে কোন একটি মান পরিবর্তনের সাথে সাথে y এর অনুরূপ একটি মান পাওয়া যাবে। ক্যালকুলাসে অনেক সময় এই পরিবর্তনের হার নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়। ক্যালকুলাসে x এর সম্পর্কে y এর মানের এই পরিবর্তনের হারকে অন্তরক সহগ (Differntial co-efficient) *বলা হয়। বাস্তব জীবনেও অনেক ক্ষেত্রে এই পরিবর্তনের হার জানার প্রয়োজন হয়। যেমন- উৎপাদন বৃদ্ধির সাথে মুনাফা বৃদ্ধির হার, মানুষের আয় বৃদ্ধি বা হ্রাসের সাথে তার জীবনযাত্রার মানের পরিবর্তনের হার ইত্যাদি আরও অনেক পরিবর্তনের হার। বর্তমান ইউনিটে এই পরিবর্তনের হার অর্থাৎ অন্তরক সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।*

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- অন্তরক সহগের ধারণা লাভ করবেন;
- রেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হিসেবে অন্তরকের ধারণা লাভ করবেন;
- সীমা হিসাবে অন্তরকের ধারণা লাভ করবেন;
- ফাংশনের যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল ও ভাগফলের অন্তরক সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- ত্রিকোণমিতিক, সূচক, লগারিদম ফাংশনের অন্তরকের ধারণা লাভ করবেন;
- সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- পরামিতিক সমীকরণের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন;
- অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিপরীত ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন।

পাঠ-১
অন্তরকের ধারণা

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- অন্তরক সহগের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- নতির মাধ্যমে অন্তরকের বর্ণনা করতে পারবেন;
- মূল নিয়মের সাহায্যে অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে পারবেন।

অন্তরক সহগের ধারণা
ধরুন একটি চলমান কণা t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে। যেহেতু কণাটি অবিরাম চলতে থাকে অতএব, t এর প্রত্যেকটি মানের জন্য s এর একটি নির্দিষ্ট মান থাকবে। সুতরাং s,t এর একটি ফাংশন। যদি সময়ে খুবই ক্ষুদ্র বৃদ্ধি δt এর জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব δs হয়, তাহলে $\frac{\delta s}{\delta t}$, δt সময়ের ব্যবধানে গড় গতিবেগ নির্দেশ করবে। যদি δt খুব ক্ষুদ্র হয়, তবে এই ক্ষুদ্র সময়ের ব্যবধানে গতিবেগ v মানের বেশি পরিবর্তন ঘটবে না এবং tতম সেকেন্ডে গতিবেগ v প্রায় $\frac{\delta s}{\delta t}$ এর সমান হবে। সুতরাং বলা যায় $\delta t \to 0$ হলে $\frac{\delta s}{\delta t}$ অনুপাতটি যে মানের দিকে অগ্রসর হয় তাই v এর মান নির্দেশ করে।

i.e. $v = \mathop{Lt}\limits_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t}$

ইহাই t তম সেকেন্ডে কণাটির গতির হার বুঝায়। $\mathop{Lt}\limits_{\delta t \varnothing 0} \frac{\delta s}{\delta t}$ রাশিটি প্রতীক $\frac{ds}{dt}$ দ্বারা সূচিত হয়। ইহা t এর পরিবর্তনের ফলে s এর পরিবর্তনের হার নির্দেশ করে এবং একে t এর সম্পর্কে s এর অন্তরক সহগ বিভেদক সহগ (Differential Co–efficient) অথবা বৃদ্ধিহার (derivative) বলা হয়।

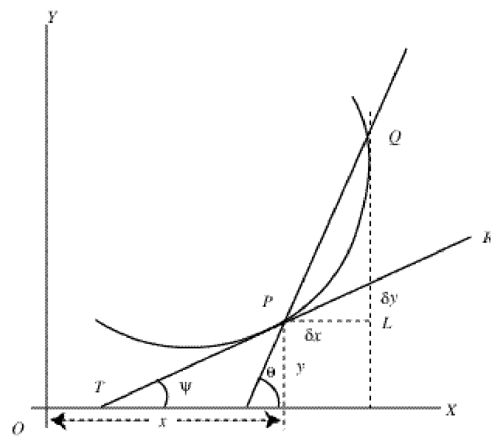
অনুরূপভাবে যদি y চলরাশি x-এর ফাংশন অর্থাৎ $y = \partial(x)$ এবং x এর সহিত অবিচ্ছিন্নভাবে (continuously) পরিবর্তিত হয় তাহলে x-এর সামান্য পরিবর্তন δx এর জন্য y এর প্রতিসঙ্গিক পরিবর্তন δy হলে, অন্তরক সহগ $\frac{dy}{dx} = \mathop{Lt}\limits_{\delta x \varnothing 0} \frac{\delta y}{\delta x}$, x এর সম্পর্কে y এর পরিবর্তনের হার (differential co–efficient of y with respect of x) বুঝাবে।

> যদি y চলরাশি x-এর ফাংশন অর্থাৎ $y = \partial(x)$ এবং x এর সহিত অবিচ্ছিন্নভাবে (continuously) পরিবর্তিত হয় তাহলে x-এর সামান্য পরিবর্তন δx এর জন্য y এর প্রতিসঙ্গিক পরিবর্তন δy হলে, অন্তরক সহগ $\frac{dy}{dx} = \mathop{Lt}\limits_{\delta x \varnothing 0} \frac{\delta y}{\delta x}$, x এর সম্পর্কে y এর পরিবর্তনের হার (differential co–efficient of y with respect of x) বুঝাবে।

নতির মাধ্যমে অন্তরক বর্ণনা বা $\frac{\delta y}{\delta x}$ এর জ্যামিতিক তাৎপর্য

ধরুন $y = f(x)$ বক্ররেখাটি PQ এর সমীকরণ। এর উপরিস্থিত কাছাকাছি দুটি বিন্দু P ও Q যাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) ও $(x+\delta x. \ y + \delta y)$। x এর সামান্য বৃদ্ধি δx এর জন্য y এর প্রতিসঙ্গিক বৃদ্ধি δy হয়। Q এর কোটির উপর PL লম্ব টানলে $QL = \delta y$ এবং $PL = \delta x$। যদি x অক্ষের সাথে PQ এর ছেদক θ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে ঐ সরলরেখার ঢাল $\tan\theta = \frac{QL}{\mathrm{PL}} =$

Error!



চিত্র : ২.১.১

অতএব $\delta x \to 0$ হলে $\frac{\delta y}{\delta x}$ যে মানের দিকে অগ্রসর হয় তাইই P বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্দেশ করে অর্থাৎ x অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে P বিন্দুতে স্পর্শকের নতি ψ হলে ঐ স্পর্শকের ঢাল হবে–

$$\tan\psi = \underset{\delta x \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

ইহা x-এর সম্পর্কে y এর পরিবর্তনের হার প্রকাশ করে। সুতরাং x-এর যে কোন মানের জন্য অন্তরক সহগ $\frac{\delta y}{\delta x}$ এর মান এবং $y = \partial(x)$ বক্ররেখার P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি সমান।

তাই $y = \partial(x)$ দ্বারা সূচিত বক্ররেখাস্থ কোন (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক যদি x অক্ষের সাথে ψ কোন উৎপন্ন করে, তবে $\frac{\delta y}{\delta x} = \tan\psi = (x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল বা নতি।

স্পর্শকের বিভিন্ন অবস্থান

$y = \partial(x)$ বক্ররেখার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x, y) তে

i) যদি $\frac{\delta y}{\delta x} = 1$ হয়, তাহলে রেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে।

ii) যদি $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$ হয়, তাহলে রেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে সমান্তরাল হয়।

iii) যদি $\frac{\delta y}{\delta x} = \square$ হয়, তাহলে রেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব হয়।

iv) যদি $\frac{\delta y}{\delta x}$ বিয়োগবোধক হয় তাহলে রেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের যোগবোধক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে।

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা বা মূল নিয়ম (First Principle) হতে অন্তরীকরণ

ধরুন $y = \partial(x)$ ———————— (i)

যদি x এর সামান্য বৃদ্ধি δx বা h এর জন্য y এর বৃদ্ধি δy বা k হয় তাহলে $y + \delta y$, $x + \delta x$ এর অনুরূপ মান

হবে, অর্থাৎ $(x+\delta x, y+\delta y)$ বিন্দু দ্বারা অবশ্যই $y=\partial(x)$ সমীকরণ সিদ্ধ হবে।

$\therefore y + \delta y = \partial(x+\delta x)$ ––––––––– (ii)

(ii) হতে (i) বিয়োগ করলে পাই–

$$\delta y = \partial(x+\delta x) - \partial(x)$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\partial(x+\delta x) - \partial(x)}{\delta x}$$

$$\therefore \underset{\delta x \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\partial(x+\delta x) - \partial(x)}{\delta x}$$

একে x এর সাপেক্ষে ┘ $\partial(x)$ কে y এর অন্তরক সহগ (বা বৃদ্ধিহার) বলে এবং তাকে $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}\{\partial(x)\}$, $\partial'(x)$ বা $\mathrm{D}\{\partial(x)\}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

$$\therefore \partial'(x) = \frac{dy}{dx} = \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\partial(x+h) - \partial(x)}{h}$$

সুতরাং মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে (with respect to x) কোন ফাংশন $\partial(x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে নিম্নলিখিতভাবে অগ্রসর হতে হয়–

i) প্রদত্ত ফাংশনে x-এর পরিবর্তে $x+h$ বসিয়ে মান নির্ণয় করুন।

ii) নতুন ফাংশন হতে প্রদত্ত ফাংশনের মান বিয়োগ করুন, অর্থাৎ $\mathrm{f}(x+h) - \mathrm{f}(x)$ নির্ণয় করুন।

iii) $h \to 0$ হলে $\frac{\partial(x+h) - \partial(x)}{h}$ এর সীমা নির্ণয় করুন।

উদাহরণ ঃ মূল নিয়মে x-কে পরিবর্তনশীল ধরে অর্থাৎ x–এর সাপেক্ষে x^4 এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $\partial(x) = x^4$

$$\therefore \partial(x+h) = (x+h)^4$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{d}{dx}(x^4) &= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\
&= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} \\
&= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h} \\
&= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} (4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)
\end{aligned}$$

যখন $h \to 0$ তখন, h, h^2 ও h^3 সকলেই শূন্যের দিকে অগ্রসর হয়

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

মূল নিয়মে x^n এর অন্তরক সহগ নির্ণয়

ধরুন $\partial(x) = x^n$ তাহলে $\partial(x+h) = (x+h)^n$

$$\therefore \text{সংজ্ঞানুসারে } \frac{d}{dx}\{\partial(x)\} = \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\partial(x+h) - \partial(x)}{h}$$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}(x^n) = \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{(x+h)^n-(x^n)}{h}$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{x^n\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - x^n}{h}$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{x^n}{h}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^n - 1\right]$$

যেহেতু $h \longrightarrow 0$ সুতরাং $h<x$ এবং $\frac{h}{x}$ এর প্রকৃত মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অতএব $\left(1+\frac{h}{x}\right)^n$ কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃত করা যায়।

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{x^n}{h}\left[1 + n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{x^2} + \ldots\ldots\ldots -1\right]$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t}\; x^n\left[n.\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h}{x^2} + h \text{ এর উচ্চঘাত সমন্বিত পদ}\right]$$

$$= x^n.n.\frac{1}{x} = nx^{n-1}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

ধ্রুব সংখ্যার অন্তরক সহগ

ধরুন $\partial(x) = c$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{\partial(x)\} = \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{\partial(x+h)-\partial(x)}{h}$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{c-c}{h}$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{0}{h} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(c) = 0$$

সুতরাং কোন ধ্রুবক সংখ্যার অন্তরক সহগ শূন্য।

ধ্রুবক ও একটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক সহগ

মনে করুন, c একটি ধ্রুবক

$$\therefore \frac{d}{dx}\{c\partial(x)\} = \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{c\partial(x+h) - c\partial(x)}{h}$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t}\; c\left\{\frac{\partial(x+h)-(x)}{h}\right\}$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t}\; c\infty \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{\partial(x+h)-\partial(x)}{h}$$

$$= c\frac{d}{dx}\{\partial(x)\}$$

সুতরাং কোন ধ্রুবক ও একটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক সহগ, ঐ ধ্রুবক ও ফাংশনের অন্তরক সহগের গুণফলের সমান।

পাঠ-২

ফাংশনের যোগফল ও বিয়োগফলের অন্তরক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- একই চলক বিশিষ্ট ফাংশনের যোগফল ও বিয়োগফলের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন।

একই চলক বিশিষ্ট দুইটি ফাংশনের যোগফল ও বিয়োগফলের অন্তরক সহগ

ধরুন u ও v উভয়ই x এর ফাংশন এবং $y = u+v$ অর্থাৎ y চলক x এর ফাংশন।

মনে করুন, x এর সামান্য বৃদ্ধি δx এর জন্য y , u ও v এর প্রতিসঙ্গিক বৃদ্ধি δy , δu, δv

$\therefore y = u+v$ -------------- (i) হতে পাই

$y + \delta y = (u+\delta u) + (v+\delta v)$ ——————————(ii)

(ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই–

$$\delta y = \delta u + \delta v$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\therefore \underset{\delta x \to 0}{\mathrm{L}t} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}\right)$$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = \underset{\delta x \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \dfrac{\delta u}{\delta x} + \underset{\delta x \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \dfrac{\delta v}{\delta x}$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

বা, $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

অনুরূপভাবে $\dfrac{d}{dx}(u-v) = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx}$

সুতরাং একই চলক বিশিষ্ট দুটি ফাংশনের যোগফল বা বিয়োগফলের অন্তরক সহগ তাদের পৃথক পৃথক অন্তরক সহগের যোগফল বা বিয়োগফলের সমান।

উদাহরণ 1 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sqrt{x^{-3}}$ কে অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^{-3}}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{-3/2}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\, x^{-3/2 - 1}$$

$$= -\frac{3}{2}\, x^{-5/2}$$

উদাহরণ 2 ঃ x এর সাপেক্ষে $5x^3+3x^2-4x-9$ কে অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ $\frac{d}{dx}(5x^3+3x^2-4x-9)$

$$= \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(3x^2) - \frac{d}{dx}(4x) - \frac{d}{dx}(1)$$
$$= 5\frac{d}{dx}(x^3) + 3\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1)$$
$$= 5.3x^2+3.2x-4.x^\circ-0$$
$$= 15x^2+6x-4$$

উদাহরণ 3 ঃ x এর সাপেক্ষে $\frac{x^9+x^3}{x^6}$ কে অন্তরীকরণ করুন।

সমাধানঃ $\frac{d}{dx}\left(\text{জf}(x^9+x^3,x^6)\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^9}{x^6}+\frac{x^3}{x^6}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}(x^3+x^{-3})$$
$$= \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^{-3})$$
$$= 3x^2 + (-3x^{-4})$$
$$= 3x^2 - \frac{3}{x^4}$$

উদাহরণ 4 ঃ x এর সাপেক্ষে $2x^3-4x^{5/2} + \frac{7}{2}x^{-2/3} + 7$ কে অন্তরীকরণ করুন।

সমাধানঃ $\frac{d}{dx}\left(2x^3-4x^{5/2}+\frac{7}{2}x^{-2/3}+7\right)$

$$= \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}\left(4x^{5/2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{7}{2}x^{-2/3}\right) + \frac{d}{dx}(7)$$
$$= 2\frac{d}{dx}(x3) - 4\frac{d}{dx}\left(x^{5/2}\right) + \frac{7}{2}\frac{d}{dx}\left(x^{-2/3}\right) + \frac{d}{dx}(7)$$
$$= 2.3x^{3-1} - 4.\frac{5}{2}x^{5/2-1} + \frac{7}{2}.\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-2/3-1} + 0$$
$$= 6x^2 - 10x^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{5}{3}}$$

উদাহরণ 5 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}$ কে অন্তরীকরণ করুন।

সমাধানঃ $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right) + 2\frac{d}{dx}(x^{-1})$$
$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{1/3-1} - 2x^{-1-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{3}x^{-2/3} - 2x^{-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2}$$

উদাহরণ 6 ঃ x এর সাপেক্ষে $(x+1)^2 (x+2)$ কে অন্তরীকরণ করুন।

সমাধানঃ $\frac{d}{dx}\{(x+1)^2 (x+2)\}$

$$= \frac{d}{dx}\{(x^2+2x+1)(x+2)\}$$

$$= \frac{d}{dx}(x^3+4x^2+5x+2)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^3) + 4\frac{d}{dx}(x^2) + 5\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2)$$

$$= 3x^2 + 4.2x + 5$$

$$= 3x^2+8x+5$$

অনুশীলনী– ২.১

x কে পরিবর্তনশীল ধরে বা x এর সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।

1. i) $\sqrt[3]{x^2}$ ii) $\frac{6}{x^4}$ iii) $\sqrt{x^3}$ iv) $\sqrt[3]{4x}$
2. i) $x^7 + 9$ ii) $ax^2-2bx+c$ iii) $x^{m}-a^{m}$
3. i) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ ii) $(x^2-5)^2$ iii) $x(5-x+3x^2)$ iv) $x^3(2^3-x^{-2})$
   v) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ vi) $ax^n - bx^{n-1}$

পাঠ-৩
ত্রিকোণমিতিক, সূচক ও লগারিদম ফাংশনের অন্তরক

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–
- ত্রিকোণমিতিক, সূচক ও লগারিদম ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন।

i) e^x এর অন্তরক

ধরুন $\partial(x) = e^x \quad \partial(x+h) = e^{x+h} = e^x.e^h$

সংজ্ঞানুসারে $\frac{d}{dx}\{\partial(x)\} = \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\partial(x+h) - \partial(x)}{h}$

$$\text{অর্থাৎ } \frac{d}{dx}(e^x) = \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{e^x.e^h - e^x}{h}$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{e^x}{h}(e^h - 1)$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{e^x}{h}\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \text{-----} - 1\right)$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ e^x\left(1 + \frac{h}{2!} + h \text{ এর উচ্চঘাত সমন্বিত পদ}\right)$$

$$= e^x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

ii) a^x এর অন্তরক সহগ

ধরুন $\partial(x) = a^x \ \therefore\ \partial(x+h) = a^{x+h} = a^x.\ a^h$

$$\text{সংজ্ঞানুসারে, } \frac{d}{dx}(a^x) = \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{a^x.a^h - a^x}{h}$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{a^x}{h}(a^x - 1)$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{a^x}{h}\left\{1 + h(\log_e a) + \frac{h^2}{2!}(\log_e a)^2 + \text{.....} - 1\right\}$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ a^x\left\{\log_e a + \frac{h}{2!}(\log_e a)^2 + h \text{ এর উপঘাত সমন্বিত পদ}\right\}$$

$$= a^x \log_e a$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$$

iii) $\log_e x$ বা $\log_e x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করুন।

ধরুন, $\partial(x) = \log_e \boldsymbol{x} \ \therefore\ \partial(x+h) = \log_e (x+h)$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $\frac{d}{dx}\left(\log_e \boldsymbol{x}\right) = \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\log_e(x+h) - \log_e \boldsymbol{x}}{h}$

$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{h}\ \log_e \frac{x+h}{h}$

$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{h}\ \log_e \left(1+\frac{x}{h}\right)$

$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{h}\left\{\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2}+\frac{1h^3}{3x^3}\text{------}\right\}$

$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+h \text{ এর উপঘাত সমন্বিত পদ}\right\}$

$= \frac{1}{x}$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\log_e \boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{x}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ আমরা জানি, $\log_a \boldsymbol{x} = \log_e \boldsymbol{x}\ .\ \log_a e$

যেহেতু $\log_a \boldsymbol{e}$ একটি ধ্রুবক

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\log_a \boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{x}\ \log_a \boldsymbol{e}$

i*v*) sin*x* এর অন্তরক সহগ

ধরুন, $\partial(x) = \sin x\ \ \therefore \partial(x+h) = \sin(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে $\frac{d}{dx}(\sin x) = \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t} \frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$

$\left[\because \sin\mathrm{A}-\sin\mathrm{B} = 2\cos\left(\frac{\mathrm{A+B}}{2}\right)\sin\left(\frac{\mathrm{A-B}}{2}\right)\right]$

$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left\{\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$

$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right).\ \ \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}$

$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \cos\left(x+\frac{1}{2}h\right).1\left[\because \underset{\theta\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\right]$

$=\cos x$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

***v*) cos*x* এর অন্তরক সহগ**

ধরুন, $\partial(x) = \cos x\ \ \therefore \partial(x+h) = \cos(x+h)$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $\frac{d}{dx}(\cos x) = \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{2\sin\left(x+\frac{1}{2}h\right)\ \sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{h}$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left\{-\sin\left(x+\frac{1}{2}h\right).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$= -\underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \sin\left(x+\frac{1}{2}h\right)\ \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

কিন্তু $\underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = \sin x$ এবং $\underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

vi) tan$x$ এর অন্তরগ সহগ

ধরুন $\partial(x) = \tan x$ তাহলে $\partial(x+h) = \tan(x+h)$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $\frac{d}{dx}(\tan x) = \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{h}\left[\frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left\{\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}\right\}$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{\sin h}{h}\cdot\underset{h\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos x.\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

vii) cot$x$ এর অন্তক সহগ

ধরুন $\partial(x) = \cot x \;\therefore\; \partial(x+h) = \cot(x+h)$

$$\therefore \text{ সংজ্ঞানুসারে } \frac{d}{dx}(\cot x) = \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{1}{h}\left[\frac{\sin x\cos(x+h) - \cos x\sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x-x-h)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(-h)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{1}{h}\left[\frac{-\sin h}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left[-\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= -\underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{\sin h}{h} \cdot \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{\sin x \sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$$

***v*iii) sec*x* এর অন্তরক সহগ**

ধরুন $\partial(x) = \sec x \quad \therefore \partial(x+h) = \sec(x+h)$

$$\therefore \text{ সংজ্ঞানুসারে, } \frac{d}{dx}(\sec x) = \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left[\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{1}{h}\left[\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \cdot \underset{h \varnothing 0}{\mathrm{L}t}\; \frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1 \cdot \frac{\sin x}{\cos x . \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

ix) cosec$x$ এর অন্তরক সহগ

ধরুন, $\partial(x)$ =cosec$x$ $\therefore \partial(x+h)$ =cosec $(x+h)$

$$\therefore \text{ সংজ্ঞানুসারে, } \frac{d}{dx}(\text{cosec}x) = \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{\text{cosec}(x+h)-\text{cosec}x}{h}$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right]$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{1}{h}\left[\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin x\left(-\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \underset{h\varnothing 0}{\text{L}t} \frac{1}{h}\left[\frac{-2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= -\underset{h\varnothing 0}{\text{L}t}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)\underset{h\varnothing 0}{\text{L}t}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1.\frac{\cos x}{\sin x.\sin x}$$

$$= -\frac{1}{\sin x}.\frac{\cos x}{\sin x} = -\text{cosec}x.\cot x.$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosec}x) = -\text{cosec}x\cot x.$$

ত্রিকোণমিতিক, সূচক ও লগরিদমিক ফাংশনের অন্তরক

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\log_e a$
$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_e a$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosce}^2 x$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$	$\frac{d}{dx}(\text{coscex}) = -\text{cosec}x\cot x$

পাঠ-৪
ফাংশনের গুণফলের অন্তরক সহগ

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- একই চলক বিশিষ্ট দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন।

দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক সহগ
মনে করুন u ও v উভয়ই x-এর ফাংশন।

এবং $y = uv$ -------- (i)

সুতরাং y , x এর ফাংশন।

এখন যদি x এর সামান্য বৃদ্ধি δx এর জন্য y , u ও v এর প্রতিসঙ্গিক বৃদ্ধি δy , δu ও δv হয় তাহলে

$$y+\delta y = (u+\delta u)\,(v+\delta u)$$

বা, $y+\delta y = uv + u\delta v + v\delta u + \delta u\delta v$ ————— (ii)

(ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে–

$$\delta y = u\delta v + v\delta u + (\delta u)(\delta v)$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \delta u\frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\therefore \underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left(u\frac{\delta v}{\delta x}\right) + \underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left(v\frac{\delta u}{\delta u}\right) + \underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left(\delta u\frac{\delta v}{\delta x}\right)$$

$$= u\underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right) + v\underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) + \underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \delta x.\ \underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)$$

যেহেতু $\delta x \longrightarrow 0$ হলে δx শূন্যের দিকে অগ্রসর হয় অতএব

$\underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\ \delta x\ \underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\frac{\delta v}{\delta x}$ শূন্যের দিকে অগ্রসর হয়।

$$\underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\frac{\delta y}{\delta x} = u\underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\frac{\delta v}{\delta x} + v\underset{\delta x\varnothing 0}{\mathrm{L}t}\frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

বা, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

> সুতরাং দুটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক সহগ = প্রথম ফাংশন * দ্বিতীয় ফাংশনের অন্তরক সহগ + দ্বিতীয় ফাংশন * প্রথম ফাংশনের অন্তরক সহগ।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

$$\frac{d}{dx}(uv\mathrm{w}\text{———}) = \frac{du}{dx}(v\mathrm{w}\text{——}) + \frac{dv}{dx}(u\mathrm{w}\text{———}) + \frac{d\mathrm{w}}{dx}(uv\text{———}) + \text{————}$$

উদাহরণ 1 ঃ x এর সাপেক্ষে $x^3\,\log x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = x^3\log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3\log x)$$
$$= x^3 \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(x)^3$$
$$= x^3 . \frac{1}{x} + \log x . 3x^2 = x^2 + 3x^2 \log x = x^2(1+3\log x)$$

উদাহরণ 2ঃ x এর সাপেক্ষে $x^2\sin x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = x^2\sin x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2\sin x)$$
$$= x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2 (\cos x) + \sin x . 2x = x^2\cos x + 2x \sin x$$

উদাহরণ 3 ঃ x এর সাপেক্ষে $2^x \sin x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = 2^x \sin x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2^x\sin x)$$
$$= 2^x \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(2^x)$$
$$= 2^x \cos x + \sin x . 2^x \log_e 2$$
$$= 2^x \{\cos x + \sin x . \log_e 2\}$$

উদাহরণ 4 ঃ x এর সাপেক্ষে $5e^x \log_a x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = 5e^x \log_a x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(5e^x \log_a x\right)$$
$$= 5e^x \frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) + \log_a x \frac{d}{dx}(5e^x)$$
$$= 5e^x \frac{1}{x} \log_a e + \log_a x . 5e^x$$
$$= 5e^x \left(\frac{1}{x}\log_a e + \log_a x\right)$$

উদাহরণ 5 ঃ xএর সাপেক্ষে $\left(\log_a x\right)(\log x)$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \left(\log_a x\right)(\log x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\left(\log_a x\right)(\log x)\right\}$$
$$= \log_a x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}\left(\log_a x\right)$$
$$= \log_a x . \frac{1}{x} + \log x . \frac{1}{x} \log_a e$$

$$= \frac{1}{x} \log_a x + \frac{1}{x} \log x \log_a e$$

উদাহরণ 6 ঃ x এর সাপেক্ষে $(3x+4)(5x^2-1)$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = (3x+4)(5x^2-1)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{(3x+4)(5x^2-1)\}$$

$$= (3x+4)\frac{d}{dx}(5x^2-1) + (5x^2-1)\frac{d}{dx}(3x-4)$$

$$= (3x+4).\ 10x + (5x^2-1).3$$

$$= 30x^2+40x+15x^2-3 = 45x^2+40x-3$$

উদাহরণ 7 ঃ x এর সাপেক্ষে $ax\log x + be^x\sin x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = ax \log x + be^x \sin x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax\log x + be^x\sin x)$$

$$= \frac{d}{dx}(ax\log x) + \frac{d}{dx}(be^x\sin x)$$

$$= ax\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{d}{dx}(ax) + be^x\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(be^x)$$

$$= ax.\frac{1}{x} + \log x.\ a + be^x\cos x + \sin x.\ be^x$$

$$= a(1+\log x) + be^x(\cos x + \sin x)$$

উদাহরণ 8 ঃ x এর সাপেক্ষে $(\sin x+\sec x+\tan x)(\operatorname{cosec}x+\cos x+\cot x)$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = (\sin x+\sec x+\tan x)(\operatorname{cosec}x+\cos x+\cot x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{(\sin x+\sec x+\tan x)(\operatorname{cosec}x+\cos x+\cot x)\}$$

$$= (\sin x+\sec x+\tan x)\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}x + \cos x + \cot x) + (\operatorname{cosec}x+\cos x+\cot x)\frac{d}{dx}(\sin x+\sec x+\tan x)$$

$$= (\sin x+\sec x+\tan x)(-\operatorname{cosec}x\cot x-\sin x-\operatorname{cosec}^2x) + (\operatorname{cosec}x+\cos x+\cot x)(\cos x+\sec x\tan x+\sec^2x)$$

$$= -(\sin x+\sec x+\tan x)(\operatorname{cosec}x\cot x+\sin x+\operatorname{cosec}^2x)+(\operatorname{cosec}x+\cos x+\cot x)(\cos x+\sec x\tan x+\sec^2x)$$

অনুশীলনী– ২.২

***x* এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করুন**

1. x^3e^x
2. $4e^x \sin x$
3. $x^5\log_a x$
4. $4x^3e^x+5$
5. $e^x(x^3+\sqrt{x})$
6. $ax^n\cos x$
7. $(x^2+3)(2x^2-1)$
8. $x^2\log_a x+ 7e^x\cos x$
9. $10^x.x^{10}$
10. $x^2e^x \log x$
11. $x\sec x \log(xe^x)$

পাঠ-৫
ফাংশনের ভাগফলের অন্তরক সহগ

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- একই চলক বিশিষ্ট দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন।

দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরক সহগ
মনেকরুন, u ও v উভয়ই x -এর ফাংশন।

এবং $y = \frac{u}{v}$ ———— (i)

সুতরাং y চলরাশি x এর ফাংশন।

এখন যদি x এর সামান্য বৃদ্ধি δx এর জন্য y , u, v-এর প্রতিসঙ্গিক বৃদ্ধি δy , δu ও δv হয় তাহলে

$$y + \delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} \text{ ——— (ii)}$$

(ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই–

$$\delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{uv+v\delta u-uv-u\delta v}{v(v+\delta v)}$$

$$= \frac{v\delta u-u\delta v}{v(v-\delta v)}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v+\delta u)}$$

এখন $$\underset{\delta x \varnothing 0}{\text{L}t} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \varnothing 0}{\text{L}t} \frac{\left(v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}\right)}{v(v+\delta v)}$$

$$= \frac{\underset{\delta x \varnothing 0}{\text{L}t}\left(v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}\right)}{\underset{\delta x \varnothing 0}{\text{L}t} v(v+\delta v)}$$

$$= \frac{\underset{\delta x \varnothing 0}{\text{L}t}\, v\frac{\delta u}{\delta x} - \underset{\delta x \varnothing 0}{\text{L}t}\, u\frac{\delta v}{\delta x}}{\underset{\delta x \varnothing 0}{\text{L}t}\, v(v+\delta v)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v.v} \quad [\delta x \to 0 \text{ হলে } \delta v \to 0]$$

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$ = **Error!**,v^2)

অতএব, দুটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরক সহগ

$$= \frac{\text{হর *(লবের অন্তরক সহগ)- (লব* হরের অন্তরক সহগ)}}{(\text{হর})^2}$$

উদাহরণ 1ঃ x এর সাপেক্ষে $\frac{2x-3}{2x+1}$ কে অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \frac{2x-3}{2x+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{(2x+1)\frac{d}{dx}(2x-3)-(2x-3)\frac{d}{dx}(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x+1).2 - (2x-3).2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4x+2-4x+6}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{8}{(2x+1)^2}$$

উদাহরণ 2 ঃ x এর সাপেক্ষে $\frac{x^4}{\sin x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \frac{x^4}{\sin x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x\frac{d}{dx}(x^4) - x^4\frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{4x^3\sin x - x^4\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= x^3(4\operatorname{cosec}x - x\operatorname{cosec}\cot x)$$

উদাহরণ 3 ঃ x এর সাপেক্ষে $\frac{\log x}{\sin x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \frac{\log x}{\sin x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x\frac{d}{dx}(\log x) - \log x\frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x.\frac{1}{x} - \log x.\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{x}\sin x - \log x.\cos x}{\sin^2 x}$$

উদাহরণ 4 ঃ x এর সাপেক্ষে $\dfrac{\tan x}{e^x+5}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \dfrac{\tan x}{e^x+5}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x}{e^x+5}\right)$$

$$= \frac{(e^x+5)\dfrac{d}{dx}(\tan x) - \tan x\dfrac{d}{dx}(e^x+5)}{(e^x+5)^2}$$

$$= \frac{(e^x+5).\sec^2 x - \tan x.e^x}{(e^x+5)^2}$$

উদাহরণ 5 ঃ x এর সাপেক্ষে $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin x)\dfrac{d}{dx}(1+\sin x) - (1+\sin x)\dfrac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)\left\{\dfrac{d}{dx}(1)+\dfrac{d}{dx}(\sin x)\right\} - (1+\sin x)\left\{\dfrac{d}{dx}(1)-\dfrac{d}{dx}(\sin x)\right\}}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)(\cos x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - \sin x\cos x + \cos x + \sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

উদাহরণ 6 ঃ x এর সাপেক্ষে $\dfrac{\tan x+\cot x}{3e^x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \dfrac{\tan x+\cot x}{3e^x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\tan x+\cot x}{3e^x}\right)$$

$$= \frac{3e^x\dfrac{d}{dx}(\tan x+\cot x) - (\tan x+\cot x)\dfrac{d}{dx}(3e^x)}{(3e^x)^2}$$

$$= \frac{3e^x\left\{\dfrac{d}{dx}(\tan x)+\dfrac{d}{dx}(\cot x)\right\} - (\tan x+\cot x).3\dfrac{d}{dx}(e^x)}{9e^{2x}}$$

$$= \frac{3e^x(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x) - (\tan x+\cot x).3e^x}{9e^{2x}}$$

$$= \frac{3e^x(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x - \tan x - \cot x)}{9e^{2x}}$$

$$= \frac{1+\tan^2 x - 1 - \cot^2 x - \tan x - \cot x}{3e^x}$$

$$= \frac{\tan^2 x - \cot^2 x - \tan x - \cot x}{3e^x}$$

$$= \frac{(\tan x+\cot x)(\tan x-\cot x)-(\tan x+\cot x)}{3e^x}$$

$$= \frac{(\tan x+\cot x)(\tan x-\cot x-1)}{3e^x}$$

উদাহরণ 7 ঃ x এর সাপেক্ষে $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)$$

$$= \frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(1-\tan x)-(1-\tan x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan x)(-\sec^2 x)-(1-\tan x)\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x-\sec^2 x\tan x-\sec^2 x+\sec^2 x\tan x}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

অনুশীলনী– ২.৩

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করুন।

1. $\frac{3x}{x-2}$
2. $\frac{\sin x}{x}$
3. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$
4. $\frac{\log_a x}{x^2}$
5. $\frac{x^n}{\log x}$
6. $\frac{\log x}{x}$
7. $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$
8. $\frac{x\sin x}{1+\cos x}$
9. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
10. $\frac{e^x+\log x}{\log_a x}$
11. $\frac{x^n+\tan x}{e^x-\cot x}$
12. $\frac{\sin x}{x^2+\cos x}$
13. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$
14. $\frac{\sec x}{1+\sec x}$

পাঠ-৬
সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক।

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–
- সংযোজিত ফাংশন কি তা জানতে পারবেন;
- সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে পারবেন।

সংযোজিত ফাংশন বা ফাংশনের ফাংশন
ধরুন, $y = \cos^2 x = (\cos x)^2$

যেহেতু x এর যে কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য$\cos x$ এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। সুতরাং ফাংশনের সংজ্ঞানুযায়ী$\cos x$ হচ্ছে x এর একটি ফাংশন।

অর্থাৎ ধরুন $\cos x = g(x) = u$

$$\therefore = y = u^2$$

এখন উপরোক্ত সমীকরণ হতে u এর যে কোন একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য y এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। অতএব, y , u এর একটি ফাংশন।

$\therefore\ y = u^2 = \partial(u) = \partial\{g(u)\}$

এক্ষেত্রে$\cos x$ হল x এর ফাংশন এবং y হল$\cos x$ এর ফাংশন।

সুতরাং y , x এর একটি ফাংশনের ফাংশন।

ফাংশনের ফাংশন বা সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়

ধরুন, $y = \partial(u)$ এবং $u = g(x)$

y ও u উভয়ই স্বাধীন চলরাশি x এর ফাংশন বলে x এর সামান্য বৃদ্ধি δx এর সাপেক্ষে y ও u এর যথাক্রমে δy ও δu পরিমাণ বৃদ্ধি ঘটলে–

$$y + \delta y = \partial(u + \delta u)$$

বা, $\delta y = \partial(u+\delta u) - y = \partial(u+\delta u) - \partial(u)$

এবং $u + \delta u = g(x+\delta x)$

$\therefore\ \delta u = g(x+\delta x) - u = g(x+\delta x) - g(x)$

অতএব, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{\delta y}{\delta u} \cdot \dfrac{\delta u}{\delta x} = \dfrac{\partial(u+\delta u) - \partial(u)}{\delta u} \cdot \dfrac{g(x+\delta x) - g(x)}{\delta x}$

যেহেতু u,x এর ফাংশন, সুতরাং δx এর মান অভিশয় ক্ষুদ্র হলে δu এর মানও অতিশয় ক্ষুদ্র হবে।

সুতরাং $\dfrac{dy}{dx} = \underset{\delta u \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \dfrac{\partial(u+\delta u) - \partial(u)}{\delta u} \quad \underset{\delta x \varnothing 0}{\mathrm{L}t} \dfrac{g(x+\delta x) - g(x)}{\delta x}$

$$= \frac{d}{du}\{f(u)\} * \frac{d}{dx}\{g(x)\} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ উপরোক্ত সূত্রটিকে অধিক সংখ্যক ফাংশনের জন্য বর্ধিত করা যায়–

ধরুন, $x = \partial(u)$, $u = g(v)$, $v = F(z)$, $z = t(x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

উদাহরণ 1 ঃ x এর সাপেক্ষে $\cos\frac{x}{3}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \cos\frac{x}{3} = \cos u$

যেখানে, $u = \frac{x}{3}$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\cos u) = -\sin u = -\sin\frac{x}{3}$$

এবং $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(x) = \frac{1}{3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin\frac{x}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$$

উদাহরণ 2 ঃ x এর সাপেক্ষে $\log 2x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \log 2x = \log u$

যেখানে $u = 2x$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\log u) = \frac{1}{u} = \frac{1}{2x}$$

এবং $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) = 2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$$

উদাহরণ 3 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sin\sqrt{x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \sin\sqrt{x} = \sin u$

যেখানে $u = \sqrt{x}$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\sin u) = \cos u = \cos\sqrt{x}$$

এবং $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$$

উদাহরণ 4 ঃ x এর সাপেক্ষে $\cos^3 x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \cos^3 x = (\cos x)^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^3 x)$$

$$= \frac{d}{dx}(\cos x)^3$$

$$= \frac{d}{dx}(u)^3. \ [u = \cos x \text{ ধরে}]$$

$$= \frac{d}{du}(u)^3 \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= 3u^2 \cdot \frac{d}{dx}(u)$$
$$= 3(\cos x)^2 . \frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= 3\cos^2 x . (-\sin x)$$
$$= -3\sin x \cos^2 x$$

উদাহরণ 5 ঃ x এর সাপেক্ষে $e^{\sin x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = e^{\sin x} = e^{u}$

যেখানে $u = \sin x$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(e^{u}) = e^{u} = e^{\sin x}$$

এবং $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^{\sin x}\cos x$$

উদাহরণ 6 ঃ x এর সাপেক্ষে $(1-x)^{-1}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = (1-x)^{-1} = u^{-1}$

যেখানে $u = (1-x)$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^{-1}) = -u^{-2} = -(1-x)^{-2}$$

এবং $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(1-x) = -1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -(1-x)^{-2} . (-1) = (1-x)^{-2}$$

উদাহরণ 7 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\log x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \sqrt{\log x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\log x}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}(\sqrt{u}) \qquad [\log x = u \text{ ধরে}]$$
$$= \frac{d}{du}(\sqrt{u}) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\, u^{-\frac{1}{2}} . \frac{d}{dx}(\log x)$$
$$= \frac{1}{2}(\log x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\left(\sqrt{\log x}\right)}$$

উদাহরণ 8 ঃ x এর সাপেক্ষে $\cos(5\pi - x)$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \cos(5\pi - x) = \cos u$

যেখানে $u = 5\pi - x$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\cos u) = -\sin u = -\sin(5\pi - x)$$

এবং $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(5\pi - x) = -1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= -\sin(5\pi - x)(-1)$

$= \sin(5\pi - x)$

উদাহরণ 9 ঃ x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করুন ঃ $\sin^2 x^2$

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \sin^2 x^2 = (\sin x^2)^2 = u^2$

যেখানে $u = \sin x^2 = \sin v$

যেখানে $v = x^2$

$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^2) = 2u = 2\sin x^2$

$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv}(\sin v) = \cos v = \cos x^2$

এবং $\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

$= 2\sin x^2 . \cos x^2 . 2x$

$= 4x \sin x^2 \cos x^2$

উদাহরণ 10 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sqrt{ax^2+bx+c}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \sqrt{ax^2+bx+c} = (ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}}$

যেখানে, $u = (ax^2+bx+c)$

$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)$

$= 2ax+b$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}} . (2ax+b)$

$= \frac{2ax+b}{2(ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}}$

উদাহরণ 11 ঃ x এর সাপেক্ষে $\log \frac{a+x}{a-x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \log \frac{a+x}{a-x} = \log u$

যেখানে $u = \frac{a+x}{a-x}$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\log u) = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{a-x}{a+x}$$

এবং $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

$$= \frac{(a-x)\frac{d}{dx}(a+x) - (a+x)\frac{d}{dx}(a-x)}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{(a-x).1 - (a+x).(-1)}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{a-x+a+x}{(a+x)^2}$$

$$= \frac{2a}{(a-x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{2a}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{2a}{(a+x)(a-x)} = \frac{2a}{a^2-x^2}$$

উদাহরণ 12 ঃ x এর সাপেক্ষে $\log\frac{e^x}{1+e^x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \log\frac{e^x}{1+e^x} = \log u$

যেখানে $u = \frac{e^x}{1+e^x}$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\log u) = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{e^x}{1+e^x}} = \frac{1+e^x}{e^x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

$$= \frac{(1+e^x)\frac{d}{dx}(e^x) - e^x\frac{d}{dx}(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{(1+e^x).e^x - e^x.e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x+e^{2x}-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1+e^x}{e^x} \cdot \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{1+e^x}$$

উদাহরণ 13 ঃ x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করুন $\log_e(\sin 2x)$

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \log_e(\sin 2x) = \log u$

যেখানে $u = \sin 2x = \sin v$

যেখানে $v = 2x$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\log u) = \frac{1}{u} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv}(\sin v) = \cos v = \cos 2x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) = 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sin 2x} .\cos 2x. \ 2$$

$$= 2\,\frac{\cos 3x}{\sin 2x}$$

$$= 2\cot 2x$$

উদাহরণ 14 ঃ x এর সাপেক্ষে $\log\sec(ax+b)^4$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \log\sec(ax+b)^4 = \log u$

যেখানে, $u = \sec(ax+b)^4 = \sec v$

যেখানে, $v = (ax+b)^4 = \mathrm{w}^4$

যেখানে $\mathrm{w} = ax+b$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(\log u) = \frac{1}{u} = \frac{1}{\sec(ax+b)^4}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv}(\sec v) = \sec v\tan v$$

$$= \sec(ax+b)^4\tan(ax+b)^4$$

$$\frac{dv}{d\mathrm{w}} = \frac{d}{d\mathrm{w}}(\mathrm{w}^4) = 4\mathrm{w}^3 = 4(ax+b)^3$$

$$\frac{d\mathrm{w}}{dx} = \frac{d}{dx}(ax+b) = a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{d\mathrm{w}} \cdot \frac{d\mathrm{w}}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sec(ax+b)^4} \cdot \sec(ax+b)^4\tan(ax+b)^4 \cdot 4(ax+b)^3.a$$

$$= 4a(ax+b)^3\tan(ax+b)^4$$

অনুশীলনী– ২.৪

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করুন।

1. (i) $\sin 3x$ (ii) $\tan\frac{x}{2}$ (iii) $\cot 5x$ (iv) $\sin^2 x$ (v) $(\log x)^3$
2. (i) $3e^{4x}$ (ii) $e^{\sqrt{x}}$ (iii) e^{-3x} (iv) e^{4-3x} (v) $\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)}$ (vi) e^{x^2-5x+2}

3. (i) $\sqrt[3]{x^2+1}$ (ii) $(5x-2)^{-2}$ (iii) $(3x-5)^4$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$
4. (i) $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (ii) $\sqrt{\sin x}$ (iii) $\log\sqrt{x}$
5. (i) $\log(\cos x)$ (ii) $\log(e^x+e^{-x})$ (iii) $\log(x^3-2x^2)$ (iv) $\log(px+q)$
6. (i) $\log\sec(ax+b)^3$ (ii) $\sin\left\{\log_e(\tan x)\right\}$ (iv) $\sin^2\left\{\log_e(\sec x)\right\}$

পাঠ-৭
পরামিতিক সমীকরণ বর্ণিত ফাংশনের অন্তরক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- পরামিতিক সমীকরণ কি তা জানতে পারবেন;
- পরামিতিক সমীকরণ বর্ণিত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে পারবেন।

কোন কোন ক্ষেত্রে একটি বক্ররেখার (curve) সমীকরণে x এবং y কে একটি তৃতীয় চলমান রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। এই তৃতীয় চলরাশিকে পরামিতি (Parameter) বলে। পরামিতির সাহায্যে প্রকাশিত কোন সমীকরণকে পরামিতিক সমীকরণ (Parameter equation) বলে।

কোন কোন ক্ষেত্রে সহজ বিজগণিতীয় পদ্ধতিতে বা ত্রিকোণমিতিক প্রক্রিয়ায় পরামিতিক সমীকরণ হতে পরামিতি অপসারণ করে একটি কার্তেসীয় সমীকরণ তৈরি করা যায়, যা আসলে কোন সঞ্চারপথের সমীকরণ। শেষোক্ত সমীকরণটি হতে সহজেই এদের অন্তরক সহগ নির্ণয় করা যায়।

আবার কোন কোন ক্ষেত্রে পরামিতিক সমীকরণ হতে পরামিতি অপসারণ করা কঠিন হয়। তখন নিম্নোক্ত উপায়ে অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হয়।

ধরুন, $x = \partial(t)$, এবং $y = g(t)$

উভয়ই স্বাধীন চলরাশি t এর ফাংশন। এখন মনে করুন t এর সামান্য বৃদ্ধি δt এর জন্য x ও y এর বৃদ্ধি যথাক্রমে δx ও δy

কাজেই $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{\frac{\delta y}{\delta t}}{\frac{\delta u}{\delta t}}$

কিন্তু $\delta t \to 0$ হলে $\delta x \to 0$

$\therefore$ সংজ্ঞানুযায়ী $\dfrac{dy}{dx} = \underset{\delta x \varnothing 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta t \varnothing 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\frac{\delta y}{\delta t}}{\frac{\delta x}{\delta t}}$

$$= \frac{\underset{\delta t \varnothing 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\delta y}{\delta t}}{\underset{\delta t \varnothing 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\delta x}{\delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

সুতরাং $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} / \dfrac{dx}{dt}$

উদাহরণ 1ঃ $x = a\cos\theta \,.\, y = b\sin\theta$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x = a\cos\theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$$

এবং $y = b\sin\theta$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta} = \frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\frac{b}{a} \cot\theta.$$

উদাহরণ 2 ঃ $x = a(\theta+\sin\theta)$ এবং $y = a(1+\cos\theta)$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x = a(\theta+\sin\theta)$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \{a(\theta + \sin\theta)\}$$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta)$$

$$y = a(1+\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \{a(1+\cos\theta)\}$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = -a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta} = \frac{-a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2}$$

উদাহরণ 3 ঃ যদি $x = a(\theta-\sin\theta)$. $y = a(1-\cos\theta)$ হয় তাহলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x = a(\theta-\sin\theta)$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \{a(\theta - \sin\theta)\}$$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$$

$$y = a(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \{a(1-\cos\theta)\}$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = -a(-\sin\theta) = a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \textbf{Error!}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \cot\frac{\theta}{2}$$

উদাহরণ 4 ঃ $x = a\sec^2\theta .\ y = a\tan^3\theta$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x = a\sec^2\theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a\sec^2\theta)$$
$$= a2\sec\theta\frac{d}{d\theta}(\sec\theta)$$
$$= 2a\sec\theta .\ \sec\theta\tan\theta$$
$$= 2a\sec^2\theta\tan\theta$$
$$y = a\tan^3\theta$$
$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a\tan^3\theta)$$
$$= 3a\tan^2\theta .\ \frac{d}{d\theta}(\tan\theta)$$
$$= 3a\tan^2\theta .\ \sec^2\theta$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta} = \textbf{Error!}$$
$$= \frac{3}{2}\tan\theta$$

উদাহরণ 5 ঃ $x=e^\theta\sin\theta .\ y = e^\theta\cos\theta$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x = e^\theta\sin\theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(e^\theta\sin\theta)$$
$$= e^\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) + \sin\theta\ \textbf{Error!}$$
$$= e^\theta\cos\theta + \sin\theta .\ e^\theta$$
$$= e^\theta(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$y = e^\theta\cos\theta$$
$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(e^\theta\cos\theta)$$
$$= e^\theta\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) + \cos\theta\frac{d}{d\theta}(e^\theta)$$
$$= e^\theta(-\sin\theta) + \cos\theta .\ e^\theta$$
$$= e^\theta(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta}$$
$$= \textbf{Error!}$$
$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

উদাহরণ 6 ঃ $x = a\cos^3\theta .\ y = a\sin^3\theta$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x = a\cos^3\theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(a\cos^3\theta\right)$$

$$= a.3\cos^2\theta.\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)$$

$$= 3a\cos^2\theta\,(-\sin\theta)$$

$$= -3a\,\sin\theta\cos^2\theta$$

$y = a\sin^3\theta$

$\therefore$ **Error!**

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = a.3\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)$$

$$= 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta} = \frac{-3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\,\sin\theta\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

উদাহরণ 7 ঃ $x = \cos 2t.\ y = 1+\sin 2t$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x = \cot 2t$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos 2t)$$

$$= -\sin 2t\frac{d}{dt}(2t) = -\sin 2t.\ 2 = -2\ \sin 2t$$

$y = 1 + \sin 2t$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \cos 2t.\frac{d}{dt}(2t) = \cos 2t.\ 2 = 2\cos 2t.$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{2\cos 2t}{-2\sin 2t} = -\cot 2t.$$

অনুশীলনী– ২.৫

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

1. $x = at^2,\ \ y = 2at$
2. $x = \sin^3 t,\ \ y = \cos^3 t$
3. $x = 2-3\cos\theta,\ \ y = 3+2\ \sin\theta$
4. $x = t^2+3t-2,\ \ y = 2-t-t^2$
5. $x = t^2e^{\mathrm{t}},\ \ y = t\log t$
6. $x = a\cos\theta + b\sin\theta,\ \ y = a\sin\theta - b\cos\theta$
7. $x = a(\cos t + t\ \sin t),\ \ y = a(\sin t - t\cos t)$
8. $x = xe^{2\mathrm{t}},\ y = 1+\cos t$
9. $x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$
10. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

পাঠ-৮
বিপরীত ফাংশনের অন্তরক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বিপরীত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে পারবেন।

বিপরীত ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়

ধরুন $x=\partial(y)$ এবং $y=g(x)$ দুটি বিপরীত ফাংশন। প্রথম ফাংশনে y স্বাধীন চলরাশি এবং দ্বিতীয় ফাংশনে x স্বাধীন চলরাশি।

ধরুন y এর সামান্য বৃদ্ধি δy এর জন্য x এর অনুরূপ বৃদ্ধি হল δx

$$\therefore \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{\frac{\delta x}{\delta x}}{\frac{\delta y}{\delta x}}$$ [লব ও হরকে δx দ্বারা ভাগ করে]

এখন $\delta y \rightarrow 0$ হলে $\delta x \rightarrow 0$ হবে

$$\therefore \underset{\delta y \emptyset 0}{\mathrm{L}t} \frac{\delta x}{\delta y} = \underset{\delta x \emptyset 0}{\mathrm{L}t} \frac{1}{\frac{\delta y}{\delta x}}$$

অর্থাৎ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় ফাংশনের ক্ষেত্রে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

অতএব, বিপরীত ফাংশনের অন্তরক সহগদ্বয় একে অপরের বিপরীত।

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরীকরণ

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয়ের জন্য উপরোক্ত সূত্রটিকে ব্যবহার করা হয়। নিতে কিছু বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক সহগ দেখানো হল।

(i) $\sin^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ

ধরুন, $y = \sin^{-1}x$, তাহলে বিপরীত ফাংশন $x = \sin y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\sin y) = \cos y = \sqrt{\cos^2 y}$$

$$= \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

এখন, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) $\cos^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ

ধরুন, $y = \cos^{-1}x$. তবে বিপরীত ফাংশন $x = \cos y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\cos y) = -\sin y = -\sqrt{\sin^2 y}$$

$$= -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$$

এখন, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(iii) $\tan^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ

ধরুন $y = \tan^{-1}x$ তাহলে $x = \tan y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\tan y) = \sec^2 y = 1+\tan^2 y = 1+x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$

(iv) $\cot^{-1}x$ এর অন্তরীকরণ

ধরুন $y = \cot^{-1}x$ তাহলে $x = \cot y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\cot y) = -\mathrm{cosec}^2 y$$

$$= -(1+\cot^2 y) = -(1+x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{1+x^2}$$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$

(v) $\sec^{-1}x$ এর অন্তরীকরণ

ধরুন $y = \sec^{-1}x$ তাহলে $x = \sec y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\sec y) = \sec y \tan y = \sec y\sqrt{\tan^2 y}$$

$$= \sec y\sqrt{\sec^2 y - 1} = x\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(vi) $\mathrm{cosec}^{-1}x$ এর অন্তরক সহগ

ধরুন, $y = \mathrm{cosec}^{-1}x$ তাহলে $x = \mathrm{cosec}\, y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\text{cosec}y)$$
$$= -\text{cosec}y \ \cot y = -\text{cosec}y\sqrt{\cot^2 y}$$
$$= -\text{cosec}y\sqrt{\text{cosec}^2 y - 1} = -x\sqrt{x^2-1}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

সুতরাং $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

উদাহরণ 1 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sin^{-1}3x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = \sin^{-1}3x = \sin^{-1}u$, যেখানে, $u = 3x$,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1}u)$$
$$= \frac{d}{du}(\sin^{-1}u) \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{d}{dx}(3x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} \cdot 3$$
$$= \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

উদাহরণ 2 ঃ x এর সাপেক্ষে $(\sin^{-1}x)^2$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = (\sin^{-1}x)^2 = (u)^2$, যেখানে $u = \sin^{-1}x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u^2)$$
$$= \frac{d}{du}(u^2) \cdot \frac{du}{dx} = 2u.\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = 2\sin^{-1}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

উদাহরণ 3 ঃ x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}e^x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \tan^{-1}e^x = \tan^{-1}u,$ যেখানে $u = e^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}u)$$
$$= \frac{d}{du}(\tan^{-1}u) \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^x)$$
$$= \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x$$
$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

উদাহরণ 4 ঃ x এর সাপেক্ষে $\cos^{-1}(ax+b)$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \cos^{-1}(ax+b) = \cos^{-1}u,$ যেখানে $u = (ax+b)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^{-1}u)$$
$$= \frac{d}{du}(\cos^{-1}u) \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{d}{dx}(ax+b)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}} \cdot a$$
$$= -\frac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$$

উদাহরণ 5 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sin^{-1}(\sin x)$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \sin^{-1}(\sin x) = \sin^{-1}u,$ যেখানে $u = \sin x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1}u)$$
$$= \frac{d}{du}(\sin^{-1}u) \cdot \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x$$
$$= \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{\cos x} = 1$$

উদাহরণ 6 ঃ x সাপেক্ষে $\tan(\sin^{-1}x)$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \tan(\sin^{-1}x) = \tan u,$ যেখানে $u = \sin^{-1}x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan u)$$
$$= \frac{d}{du}(\tan u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \sec^2 u \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$$

$$= \sec^2(\sin^{-1}x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(\sin^{-1}x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{1-\sin^2(\sin^{-1}x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

উদাহরণ 7 ঃ $(x^2+1)\tan^{-1}x - x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = (x^2+1)\tan^{-1}x - x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{(x^2+1)\tan^{-1}x - x\}$$

$$= \frac{d}{dx}\{(x^2+1)\tan^{-1}x\} - \frac{d}{dx}(x)$$

$$= (x^2+1)\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) + \tan^{-1}x \frac{d}{dx}(x^2+1) - 1$$

$$= (x^2+1).\frac{1}{x^2+1} + \tan^{-1}x.\ 2x - 1$$

$$= 1 + 2x\tan^{-1}x - 1 = 2x\tan^{-1}x$$

উদাহরণ 8 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sqrt{x^2-a^2} + a\sin^{-1}\frac{a}{x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \sqrt{x^2-a^2} + a\sin^{-1}\frac{a}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{x^2-a^2} + a\sin^{-1}\frac{a}{x}\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}(\sqrt{x^2-a^2} + a\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{a}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2-a^2) + a.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}.\ 2x + a.\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}}} \cdot \frac{-a}{x^2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x^2-a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$$

উদাহরণ 9 ঃ x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tan^{-1} x+\tan^{-1}1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x + \tan^{-1}1)$$

$$= \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) + \frac{d}{dx}(\tan^{-1}1)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + 0 = \frac{1}{1+x^2}$$

অনুশীলনী– ২.৬

***x*-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করুন।**

1. (i) $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ (ii) $\sin^{-1}x^2$ (iii) $\tan^{-1}\frac{x}{a}$ (iv) $\tan^{-1}(ax)$

   (v) $\cos^{-1}\frac{x}{3}$ (vi) $\sin^{-1}(2x-1)$ (vii) $\cot^{-1}(e^x)$
2. (i) $\tan x \sin^{-1}x$ (ii) $x^2 \sin^{-1}(1-x)$
3. $\log(\cos^{-1}x)$
4. $a^{\sin^{-1}x}$
5. (i) $\tan^{-1}\left\{\frac{1}{1-x^2}\right\}$ (ii) $\tan^{-1}\left\{\frac{a+bx}{b-ax}\right\}$ (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
6. (i) $(x^2-1)\sin^{-1}x$ (ii) $e^x \sin^{-1}x$ (iii) $(1-x^2)\cos^{-1}x$

   (iv) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x^2)$

পাঠ-৯
লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- লগারিদমের সাহায্যে ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন।

লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ (Logarithmic differentiation)

কোন ফাংশনের সূচক অন্য ফাংশন হলে অথবা কোন ফাংশন কয়েকটি ফাংশনের গুণফল দ্বারা বর্ধিত হলে, প্রথমে ঐ ফাংশনের লগ নিয়ে পরে তার অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হয়। এইরূপ অন্তরীকরণকে লগের সাহায্যে অন্তরীকরণকে বলে।

i. ধরুন $y = a^u$ যেখানে u, x এর একটি ফাংশন
এবং $a>0$ একটি ধ্রুবক রাশি।
উভয় পক্ষে লগ নিয়ে পাই–

$\log y = \log a^u = u \log a$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে–

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a.\frac{du}{dx}$$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = y \ \log a \ . \ \dfrac{du}{dx}$

$= a^u \log a.\dfrac{du}{dx}$

ii. ধরুন $y = u^v$ যেখানে u ও v উভয়ই x এর ফাংশন।
উভয় পক্ষে লগারিদম নিলে–

$\log y = \log u^v = v \log u$

উভয় পক্ষে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে–

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = v.\frac{1}{u}.\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\log u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left\{\frac{v}{u}.\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.\log u\right\}$$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = u^v\left\{\dfrac{v}{u}.\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}.\log u\right\}$

iii. ধরুন $y = \dfrac{uv\mathrm{w}}{\mathrm{z}}$, যেখানে u, v, w, z প্রত্যেকটি x এর ফাংশন।
উভয় পক্ষে লগারিদম নিলে–

$\log y = \log u + \log v + \log \mathrm{w} - \log \mathrm{z}$

উভয় পক্ষে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই–

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\mathrm{w}}\frac{d\mathrm{w}}{dx} - \frac{1}{\mathrm{z}}\frac{d\mathrm{z}}{dx}$$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = y\left\{\dfrac{1}{u}.\dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{v}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{\mathrm{w}}\dfrac{d\mathrm{w}}{dx} - \dfrac{1}{\mathrm{z}}\dfrac{dz}{dx}\right\}$

$$= \frac{uvw}{z}\left\{\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}-\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}\right\}$$

উদাহরণ 1ঃ x এর সাপেক্ষে x^x এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = x^x$

$$\therefore \log y = \log x^x = x \log x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x\log x)$$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\frac{d}{dx}(x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \log x.\ 1$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1+\log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\ (1+\log x)$$

$$= x^x(1+\log x)$$

উদাহরণ 2 ঃ x এর সাপেক্ষে x^{x^x} অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = x^{x^x}$

$$\therefore \log y = \log x^{x^x} = x^x\log x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x^x\log x)$$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x^x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x.\frac{d}{dx}(x^x)$

বা, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = x^x.\frac{1}{x} + \log x.\frac{d}{dx}(x^x)$

এখন ধরুন, $z = x^x$

$$\therefore \log z = x \log x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log z) = \frac{d}{dx}(x \log x)$$

বা, $\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{d}{dx}(x)$

বা, $\frac{dz}{dx} = z\left(x.\frac{1}{x} + \log x.1\right)$

বা, $\frac{d}{dx}(x^x) = x^x\ (1+\log x)$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^x.\frac{1}{x} + \log x\ .\ x^x\ (1+\log x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[x^x.\frac{1}{x} + x^x\log x\ (1+\log x)\right]$$

$$= x^{x^x}.\ x^x\left[\frac{1}{x} + \log x\ (1+\log x)\right]$$

উদাহরণ 3 ঃ x এর সাপেক্ষে $x^{\cos^{-1}x}$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = x^{\cos^{-1}x}$

$$\therefore \log y = \cos^{-1}x \log x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\{\cos^{-1}x . \log x\}$$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos^{-1}x . \frac{d}{dx}(\log x) + \log x . \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$

$$= \cos^{-1}x . \frac{1}{x} + \log x . \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$= x^{\cos^{-1}x}\left[\frac{\cos^{-1}x}{x} - \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

উদাহরণ 4 ঃ x এর সাপেক্ষে e^{e^x} এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = e^{e^x}$

$$\therefore \log y = e^x \log e$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(e^x \log e)$$

বা, $\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = e^x \frac{d}{dx}(\log e) + \log e \frac{d}{dx}(e^x)$

$$= e^x.\text{o} + \log e . e^x$$

$$= e^x \log e$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y\, e^x \log e$$

$$= e^{e^x} . e^x.1 = e^{e^x} . e^x$$

উদাহরণ 5 ঃ x এর সাপেক্ষে $\left(x^x\right)^x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $y = (x^x)^x = x^{x.x} = x^{x^2}$

$$\therefore \log y = \log x^{x^2} = x^2 \log x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x^2 \log x)$$

বা, $\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(\log x) + \log x . \frac{d}{dx}(x^2)$

বা, $\frac{1}{y} . \frac{dy}{dx} = x^2 . \frac{1}{x} + \log x . 2x$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\ [x+2x \log x]$

বা, $\frac{dy}{dx} = x^{x^2} . x\,(1+2 \log x)$

উদাহরণ 6 ঃ x এর সাপেক্ষে $(\log x)^x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = (\log x)^x$

$$\therefore \log y = \log(\log x)^x = x.\log(\log x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\{x.\log(\log x)\}$$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{d}{dx}\{\log(\log x)\} + \log(\log x)\frac{d}{dx}(x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x} + \log(\log x).1$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{\log x} + \log(\log x)\right]$

$$= (\log x)^x\left[\frac{1}{\log x} + \log(\log x)\right]$$

উদাহরণ 7 ঃ x এর সাপেক্ষে $\sin x \sin 2x \sin 3x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$

$$\therefore \log y = \log(\sin x \sin 2x \sin 3x)$$

$$= \log \sin x + \log \sin 2x + \log \sin 3x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(\log\sin x + \log \sin 2x + \log \sin 3x)$$

বা, $\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log\sin x) + \frac{d}{dx}(\log\sin 2x) + \frac{d}{dx}(\log\sin 3x)$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}.\cos x + \frac{1}{\sin 2x}.\cos 2x.2 + \frac{1}{\sin 3x}\cos 3x.3$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{3\cos 3x}{\sin 3x}$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\sin 2x\sin 3x + 2\cos 2x\sin x\sin 3x + 3\cos 3x\sin x\sin 2x}{\sin x\sin 2x\sin 3x}$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cos x\sin 2x\sin 3x + 2\cos 2x\sin x\sin 3x + 3\cos 3x\sin x\sin 2x}{\sin x\sin 2x\sin 3x}\right]$

$= \sin x\sin 2x\sin 3x\left[\frac{\cos x\sin 2x\sin 3x + 2\cos 2x\sin x\sin 3x + 3\cos 3x\sin x\sin 2x}{\sin x\sin 2x\sin 3x}\right]$

$= \cos x\sin 2x\sin 3x + 2\cos 2x\sin x\sin 3x + 3\cos 3x\sin x\sin 2x$

উদাহরণ 8 ঃ xএর সাপেক্ষে $x^x e^x \sin x$ এর অন্তরীকরণ করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $y = x^x e^x \sin x$

$$\therefore \log y = \log(x^x e^x \sin x)$$
$$= \log x^x + \log e^x + \log\sin x$$
$$= x\log x + x\log e + \log\sin x$$
$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x\log x + x\log e + \log\sin x)$$

বা, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\log x) + \frac{d}{dx}(x\log e) + \frac{d}{dx}(\log\sin x)$

বা, $\frac{1}{\mathrm{y}}\frac{\mathrm{dy}}{dx} = x\frac{\mathrm{d}}{dx}(\log x) + \log x\frac{\mathrm{d}}{dx}(x) + \log\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}}{dx}(x) + \frac{1}{\sin x}\cos x$

বা, $\frac{dy}{dx} = y\left[x.\frac{1}{x} + \log x + 1.1 + \cot x\right]$

$$= y\ [2+\log x + \cot x]$$
$$= x^x e^x \sin x\ [2+\log x+\cot x]$$

অনুশীলনী– ২.৭

***x* এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করুন।**

1. (i) x^y (ii) x^{e^x} (iii) $(\sin x)^x$ (iv) $(\sin x)^{\cos x}$
   (v) $(ax)^{bx}$ (vi) $(\sin x)^{\log x}$ (vii) $(\sin^{-1}x)^{\log x}$ (viii) a^{x^x} (ix) a^{a^x}

পাঠ-১০
অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরক

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- অব্যক্ত ফাংশন কাকে বলে বলতে পারবেন;
- অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় করতে পারবেন।

অব্যক্ত ফাংশন (Implicit Function)
যদি x ও y এর সম্পর্ক $\partial(x,y) = 0$ আকারের কোন সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত হয় এবং যদি ইহা হতে y কে সরাসরি x এর মাধ্যমে প্রকাশ করা না যায়, তবে y কে x এর অব্যক্ত ফাংশন বলা হয়। অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ নির্ণয়ের জন্য x কে পরিবর্তনশীল মনে করে ঐ সমীকরণের প্রত্যেকটি পদকে অন্তরীকরণ করতে হবে এবং y কে x এর একটি অজ্ঞাত ফাংশন মনে করলে তার অন্তরক সহগ $\frac{dy}{dx}$ হবে।

উদাহরণ 1 ঃ $x+y = xy^2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x+y = xy^2$

x কে পরিবর্তনশীল ধরে অন্তরীকরণ করলে পাই–

$$\frac{d}{dx}(x+y) = \frac{d}{dx}(xy^2)$$

বা, $\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y) = x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x)$

বা, $1 + \frac{dy}{dx} = x.2y\frac{dy}{dx} + y^2.1$

বা, $2xy\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1-y^2$

বা, $\frac{dy}{dx}(2xy-1) = 1-y^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1-y^2}{2xy-1}$$

উদাহরণ 2 ঃ $x^4+x^2y^2+y^4=0$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^4+x^2y^2+y^4 = 0$

x কে পরিবর্তনশীল মনে করে প্রত্যেক পদকে অন্তরীকরণ করলে পাই–

$$\frac{d}{dx}(x^4+x^2y^2+y^4) = 0$$

বা, $\frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(x^2y^2) + \frac{d}{dx}(y^4) = 0$

বা, $4x^3 + x^2\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x^2) + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $4x^3 + x^2.2y\frac{dy}{dx} + y^2.2x + 4y^3\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $(2x^2y+4y^3)\dfrac{dy}{dx}=-4x^3-2xy^2$

বা, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x^3+2xy^2}{2x^2y+4y^3}$

উদাহরণ 3 ঃ $x^y=e^{x-y}$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^y=e^{x-y}$

উভয় পক্ষে লগারিদম নিয়ে

$\log(x^y)=\log(e^{x-y})$

বা, $y\log x=(x-y)\log e$

বা, $y\log x=x-y$ $[\because \log e=1]$

এখন x কে পরিবর্তনশীল মনে করে প্রত্যেক পদকে অন্তরীকরণ করলে পাই–

$\dfrac{d}{dx}(y\log x)=\dfrac{d}{dx}(x-y)$

বা, $\dfrac{dy}{dx}.\log x+y.\dfrac{d}{dx}(\log x)=\dfrac{d}{dx}(x)-\dfrac{d}{dx}(y)$

বা, $\dfrac{dy}{dx}\log x+y.\dfrac{1}{x}=1-\dfrac{dy}{dx}$

বা, $\dfrac{dy}{dx}\log x+\dfrac{dy}{dx}=1-\dfrac{y}{x}$

বা, $\dfrac{dy}{dx}(1+\log x)=\dfrac{x-y}{x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x(1+\log x)}$

উদাহরণ 4 ঃ $\log(xy)=x^2+y^2$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\log(xy)=x^2+y^2$

x কে পরিবর্তনশীল মনে করে প্রত্যেক পদকে অন্তরীকরণ করলে পাই

$\dfrac{d}{dx}\{\log(xy)\}=\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2)$

বা, $\dfrac{d}{dx}(\log u)=\dfrac{d}{dx}(x^2)+\dfrac{d}{dx}(y^2)$ $[xy=u$ ধরিয়া$]$

বা, $\dfrac{1}{u}.\dfrac{d}{dx}(u)=2x+2y\dfrac{dy}{dx}$

বা, $\dfrac{1}{xy}\dfrac{d}{dx}(xy)=2x+2y\dfrac{dy}{dx}$

বা, $\dfrac{1}{xy}\left(x\dfrac{dy}{dx}+y.1\right)=2x+2y\dfrac{dy}{dx}$

বা, $\dfrac{dy}{dx}.\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=2x+2y\dfrac{dy}{dx}$

বা, $\dfrac{dy}{dx}.\dfrac{1}{y}-2y\dfrac{dy}{dx}=2x-\dfrac{1}{x}$

বা, $\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1}{y}-2y\right)=\dfrac{2x^2-1}{x}$

বা, $\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1-2y^2}{y}\right) = \dfrac{2x^2-1}{x}$

বা, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{2x^2-1}{1-2y^2}$

উদাহরণ 5 ঃ $x\cos y + y\cos x = 1$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x\cos y + y\cos x = 1$

x কে পরিবর্তনশীল মনে করে প্রত্যেক পদকে অন্তরীকরণ করলে পাই

$\dfrac{d}{dx}(x\cos y + y\cos x) = \dfrac{d}{dx}(1)$

বা, $\dfrac{d}{dx}(x\cos y) + \dfrac{d}{dx}(y\cos x) = 0$

বা, $x\dfrac{d}{dx}(\cos y) + \cos y\dfrac{d}{dx}(x) + y\dfrac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\dfrac{d}{dx}(y) = 0$

বা, $x(-\sin y)\dfrac{dy}{dx} + \cos y + y(-\sin x) + \cos x\dfrac{dy}{dx} = 0$

বা, $\cos x\dfrac{dy}{dx} - x\sin y\dfrac{dy}{dx} = y\sin x - \cos y$

বা, $\dfrac{dy}{dx}(\cos x - x\sin y) = y\sin x - \cos y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\sin x - \cos y}{\cos x - x\sin y}$

অনুশীলনী– ২.৮

$\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

1. $3xy - x^3 = y^3$
2. $x^y = y^x$
3. $x^2+y^2 = \sin(xy)$
4. $e^{xy} - 4xy = 2$
5. $e^x+e^y = e^{x+y}$
6. $x^y . y^x = 1$
7. $(\cos x)^y = (\sin y)^x$

উত্তরমালা

অনুশীলনী ২.১

1\. i) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ ii) $-24x^{-5}$ iii) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ iv) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{4x^{-2/3}}$

2\. i) $7x^6$ ii) $2(ax-b)$ iii) mx^{m-1}

3\. i) $2x-\frac{2}{x^3}$ ii) $4x^3-20x$ iii) $9x^2-2x+5$ iv) $24x^2-1$

v) $\frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{3}x^{-4/3}$ vi) $anx^{n-1} - b(n-1)x^{n-2}$

অনুশীলনী– ২.২

1\. $x^3e^x+3x^2e^x$ 2. $4e^x(\cos x+\sin x)$ 3. $x^4\left(\log_a e + \log_a x\right)$

4\. $4x^3e^x+12x^2e^x$ 5. $e^x\left\{x^2(x+3)+\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\}$ 6. $a(xx^{n-1}\cos x + x^n\sin x)$

7. $8x^3+10x$ 8. $x\left(\log_a e+2\log_a x\right)+7e^x(\cos x-\sin x)$

9. $x^9(10^x.x\log_e 10+10^{x+1})$ 10. $xe^x(2\log x+x\log x+1)$

11. $\sec x\,[1+2x+x^2\tan x+\log x(1+\tan x)]$

অনুশীলনী ২.৩

1. $\dfrac{-6}{(x-2)^2}$ 2. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

3. $\dfrac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ 4. $\dfrac{1}{x^3}(1-2\log x)$

5. $\dfrac{x^{n-1}(x\log x-1)}{(\log x)^2}$ 6. $\dfrac{1-\log x}{x^2}$

7. $\dfrac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}$ 8. $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$

9. $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ 10. $\dfrac{e^x\left\{\log_a x-\frac{1}{x}\log_a e\right\}}{\left(\log_a x\right)^2}$

11. $\dfrac{(e^x-\cot x)(nx^{n-1}+\sec^2x)-(x^n+\tan x)(e^x+\mathrm{cosec}^2x)}{(e^x-\cot x)^2}$

12. $\dfrac{x^2\cos x-2x\sin x+1}{(x^2+\cos x)^2}$ 13. $\dfrac{2(1-x)^2}{(1-x+x^2)^2}$

14. $\dfrac{\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}$

অনুশীলনী ২.৪

1. (i) $3\cos x$ (ii) $\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}$ (iii) $-5\mathrm{cosec}^2 5x$

   (iv) $\sin 2x$ (v) $\dfrac{3}{x}(\log x)^2$

2. (i) $12e^{4x}$ (ii) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ (iii) $-3e^{-3x}$ (iv) $-3e^{4-3x}$ (v) $-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

   (vi) $(2x-5)\,e^{x^2-5x+2}$

3. (i) $\dfrac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$ (ii) $\dfrac{-10}{(5x-2)^3}$ (iii) $12(27x^3-15x^2+75x-125)$

   (iv) $\dfrac{-x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. (i) $3\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ (ii) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (iii) $\dfrac{1}{2x}$

5. (i) $-\tan x$ (ii) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (iii) $\dfrac{3x-4}{x(x-2)}$ (iv) $\dfrac{p}{px+q}$

6. (i) $3a(ax+b)^2\tan(ax+b)^3$ (ii) $\mathrm{cosec}2x.\cos\{\log(\tan x)\}$

(iii) $\tan x.\ \sin 2(\log \sec x)$

অনুশীলনী-২.৫

1. $\frac{1}{t}$ 2. $\cot\theta$ 3. $\frac{2}{3}\cot\theta$ 4. $\frac{-(1+2t)}{2t+3}$

5. $\frac{(1+\log t)}{te^{t}(t+2)}$ 6. $\frac{a\cos\theta+b\sin\theta}{b\cos\theta-a\sin\theta}$ 7. $\tan t$

8. $-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin t$ 9. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$ 10. 1

অনুশীলনী-২.৬

1. (i) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (ii) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (iii) $\frac{a}{a^2+x^2}$ (iv) $\frac{a}{1+a^2x^2}$

   (v) $\frac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$ (vi) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ (vii) $-\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

2. (i) $\sin^{-1}x\sec^2x+\frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $2x\sin^{-1}(1-x)-\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

3. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}.\cos^{-1}x}$

4. $\frac{a^{\sin^{-1}x}\log a}{\sqrt{1-x^2}}$

5. (i) $\frac{2x}{2-2x^2+x^4}$ (ii) $\frac{1}{1+x^2}$ (iii) $-\frac{1}{1+x^2}$

6. (i) $2x\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$ (ii) $e^x\left\{\sin^{-1}x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$

   (iii) $-2x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$ (iv) 0

অনুশীলনী-২.৭

1. (i) $\dfrac{y^2}{x(1-y\log x)}$ (ii) $x^{e^x}.\, e^x\left(\log x+\dfrac{1}{x}\right)$

   (iii) $(\sin x)^x\,\{x\cot x+\log(\sin x)\}$

   (iv) $(\sin x)^{\cos x}\,(-\sin x\log\sin x+\cot x\cos x)$

   (v) $(ax)^{bx}\,[b\{\log(ax)+1\}]$

   (vi) $(\sin x)^{\log x}\left[\log x\cot x+\dfrac{1}{x}\log(\sin x)\right]$

   (vii) $(\sin^{-1}x)^{\log x}\left[\dfrac{\log(\sin^{-1}x)}{x}+\dfrac{\log x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}\right]$

   (viii) $a^{x^x}\; x^x\log a\,(1+\log x)$

   (ix) $a^{a^x}\left(\log_e a\right)^2$

অনুশীলনী-২.৮

1. $\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$

2. $\dfrac{y\,(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$

3. $\dfrac{y\cos(xy)-2x}{2y-x\cos(xy)}$

4. $-\dfrac{y}{x}$

5. $\dfrac{e^x(e^y-1)}{e^y(1-e^x)}$

6. $\dfrac{-y\,(x\log y+y)}{x(y\log x+x)}$

7. $\dfrac{y\tan x+\log(\sin y)}{\log(\cos x)-x\cot y}$