ইউনিট ৪
যোগজ

ভূমিকা

সমাকলন বলতে অসীম ধারার সমষ্টি নির্ণয় বুঝায়। যদি কোন অসীম ধারার প্রতিটি পদের মান অপরিমেয়ভাবে ক্ষুদ্র হয়ে শূন্যের নিকটতম হয় তবে ঐরূপ ধারার যোগফলের কোন অসীম মান আছে কিনা তা নির্ধারণ করাই সমাকলনবিদ্যার প্রাথমিক উদ্দেশ্য। বস্তুত: বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রচেষ্টা হতে উক্তরূপ অসীম ধারার সৃষ্টি এবং তার সমষ্টির মান নির্ণয়ের চেষ্টার ফলেই সমাকলন বিদ্যার উদ্ভব। কিন্তু কার্যক্ষেত্রে এই পদ্ধতিটি জটিল। অনেক ক্ষেত্রে এই পদ্ধতির সাহায্যে সুনির্দিষ্ট ফল পাওয়া যায় না। সে কারণে আরও সহজ ও কার্যকরী পদ্ধতি উদ্ভবের প্রয়োজন হয়। তাই সমাকলন বিদ্যার অপর পদ্ধতিটি বিবেচনা করা হয়। এই পদ্ধতিতে কোন ফাংশনের পরিবর্তনশীল রাশির সাপেক্ষে অন্তরক সহগ জানা থাকলে মূল ফাংশনটি নির্ণয় করতে হয়। অর্থাৎ সমাকলন অন্তরীকরণে বিপরীত প্রক্রিয়া।

ঐতিহাসিকভাবে অন্তরকলন বিদ্যা সৃষ্টির অনেককাল পূর্বেই সমাকলন তথা যোজিত ফলের মৌলিক ধারনা গ্রীক গণিতজ্ঞদের জানা ছিল বলে যথেষ্ট প্রমাণ রয়েছে। সপ্তদশ শতাব্দীতে বৃটিশ বিজ্ঞানী আইজ্যাক নিউটন (Issac Newton) এবং জার্মান গণিতবিদ লিবনিজ (Leibnitz) প্রায় একই সময়ে এবং পৃথক পৃথকভাবে প্রমাণ করেন যে, অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়ায় কোন সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- প্রতি অন্তরক হিসাবে যোগজের ধারণা লাভ করবেন;
- কতিপয় প্রমিত ফাংশনের যোগজ সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন;
- যোগজের যোগাশ্রয়ী ধর্ম সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- মূলদ ভগ্নাংশের যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন;
- সখন্ড পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

পাঠ-১
যোগজের ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- অনির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- যোগজীকরণ চিহ্ন সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- যোগজীকরণ ধ্রুবক কি তা বলতে পারবেন।

অনির্দিষ্ট যোগজ বা সমাকল (Indefinite Integral)

x চলকের একটি প্রদত্ত ফাংশন $\partial(x)$ এর জন্য x চলকের অপর একটি ফাংশন $F(x)$ এমনভাবে নির্ণয় করা হয় যে $\frac{d}{dx}\{\partial(x)\} = F(x)$ হয়, তাহলে $\partial(x)$ কে x এর সাপেক্ষে $F(x)$ এর একটি অনির্দিষ্ট যোগজ বা অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite Integral) বলা হয় এবং তাকে $\vee F(x)\ dx = \partial(x)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এক্ষেত্রে $\partial(x)$ নির্ণয় করার পদ্ধতিকে সমাকল বা যোগজ নির্ণয় (Integration) এবং $F(x)$ কে সমাকলনীয় রাশি বা সমাকল্য (Integrand) বলা হয়।

যোগজীকরণ চিহ্ন (Integration Sign)

সমষ্টি নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে বিশেষভাবে চিহ্নিত করার জন্য গণিতবিদরা গ্রীক অক্ষর Σ (সিগমা) কে তার প্রতীক হিসাবে ব্যবহার করতেন। ইহা ইংরেজি শব্দ Summation এর প্রতিরূপ। তাই জার্মান গণিতবিদ Leibnitz যোগীকরণ চিহ্নকে প্রকাশ করার জন্য Summation শব্দের অদ্যক্ষর S কেই বেছে নেন। বর্তমান যোগীকরণ চিহ্ন '$\int$ ' টি *'S'* এর বিস্তৃত থাকার (Elongated form of *'S'*) এবং dx অন্তরক দ্বারা বুঝায় যে, যোগজ বা সমাকলন x এর সাপেক্ষে নির্ণয় করতে হবে।

যোগজীকরণ ধ্রুবক (Constant of Integration)

x নিরপেক্ষ c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক হলে $\frac{d}{dx}\{\partial(x)+c\}=F(x)$ হবে যদি $\frac{d}{dx}\{\partial(x)\} = F(x)$ হয়।

অতএব সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী $\int F(x)dx = \partial(x)+c)$. যেখানে $\int F(x)dx$ এর মান $\{\partial(x)+c\}$ কে উহার একটি অনির্দিষ্ট সমাকল এবং x নিরপেক্ষ অনির্দিষ্ট ধ্রুবক c কে সমাকলনের ধ্রুবক (Constant of Integration) বলা হয়।

x চলকের একটি প্রদত্ত ফাংশন $\partial(x)$ এর জন্য x চলকের অপর একটি ফাংশন $F(x)$ এমনভাবে নির্ণয় করা হয় যে $\frac{d}{dx}\ \{\partial(x)\} = F(x)$ হয়, তাহলে $\partial(x)$ কে x এর সাপেক্ষে $F(x)$ এর একটি অনির্দিষ্ট যোগজ বা অনির্দিষ্ট সমাকল (Indefinite Integral) বলা হয় এবং তাকে $\vee F(x)\ dx = \partial(x)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এক্ষেত্রে $\partial(x)$ নির্ণয় করার পদ্ধতিকে সমাকল বা যোগজ নির্ণয় (Integration) এবং $F(x)$ কে সমাকলনীয় রাশি বা সমাকল্য (Integrand) বলা হয়।

পাঠ-২
কতিপয় প্রমিত ফাংশনের যোগজ

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–
- কতিপয় প্রমিত ফাংশনের যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

ফাংশনের অন্তরীকরণের ফল হতে কতগুলো ফাংশনের যোগজ সহজেই নির্ণয় করা যায়। নিম্নে এইরূপ কিছু ফাংশনের সমাকলগুলো প্রমাণসহ দেওয়া হল।

i) $\boldsymbol{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1}$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right) = \frac{(n+1)x^{n+1}}{n+1} = x^n\ (n\neq-1)$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ii) $\boldsymbol{\int \frac{dx}{x} = \log x + C,\ x>0}$

প্রমাণঃ $x>0$ হলে $\log x$ বাস্তব

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log x + C) = \frac{1}{x}$$

সুতরাং $x>0$ হলে সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C$$

iii) $\boldsymbol{\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + C}$**, যেখানে *m* একটি ধ্রুবক।**

প্রমাণঃ যেহেতু $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{mx}}{m}+C\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{mx}}{m}\right) + \frac{d}{dx}(C)$$

$$= \frac{me^{mx}}{m} + 0 = e^{mx}$$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী–

$$\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + C$$

যদি $m=1$ হয়, তবে $\int e^x dx = e^x + C$

iv) $\displaystyle\int a^{mx}dx = \frac{a^{mx}}{m\log_e a} + C \; (m\neq 0,\ a>0,\ a\neq 1)$

প্রমাণ: যেহেতু $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{a^{mx}}{m\log_e a} + C\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{a^{mx}}{m\log_e a}\right) + \frac{d}{dx}(C)$$

$$= \frac{1}{m\log_e a} \cdot a^{mx} \cdot m\log_e a = a^{mx}$$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$$\int a^{mx}dx = \frac{a^{mx}}{m\log_e a} + C$$

যদি $m=1$ হয় তবে $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C,\ a>0,\ a\neq 1$

v) $\displaystyle\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$

প্রমাণ: যেহেতু $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos mx}{m} + C\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos mx}{m}\right) + \frac{d}{dx}(C)$$

$$= -\frac{1}{m}\frac{d}{dx}(\cos mx) + 0$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot (-\sin mx \cdot m)$$

$$= \sin mx$$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$$\int \sin mx\, dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$$

যদি $m=1$ হয় তবে $\int \sin x dx = -\cos x + C$

vi) $\displaystyle\int \cos mx dx = \frac{\sin mx}{m} + C$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin mx}{m} + C\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin mx}{m}\right) + \frac{d}{dx}(C)$$

$= \frac{1}{m} \cdot m\cos mx + 0 = \cos mx$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$\int \cos mx \, dx = \frac{\sin mx}{m} + C$

যদি $m=1$ হয় তবে $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

vii) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

প্রমাণঃ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\tan x + C)$

$= \frac{d}{dx}(\tan x) + \frac{d}{dx}(C) = \sec^2 x + 0 = \sec^2 x$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

viii) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

প্রমাণ : যেহেতু $\frac{d}{dx}(-\cot x + C)$

$= \frac{d}{dx}(-\cot x) + \frac{d}{dx}(C)$

$= -\frac{d}{dx}(\cot x) + 0 = -(-\operatorname{cosec}^2 x) = \operatorname{cosec}^2 x$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

ix) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

প্রমাণঃ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sec x + C)$

$= \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(C) = \sec x \tan x$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

x) $\int$ cosec$x$ cot$x$ dx = –cosec$x$ +C

প্রমাণঃ যেহেতু $\frac{d}{dx}(-\text{cosec}x + C)$

$= \frac{d}{dx}(-\text{cosec}x) + \frac{d}{dx}(C)$

$= -\frac{d}{dx}(\text{cosec}x) + 0$

$= -(-\text{cosec}x \cot x) = \text{cosec}x \cot x$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$$\int \text{cosec}x \cot x\, dx = -\text{cosec}x + C$$

অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণ প্রক্রিয়ার সম্পর্ক বোঝার সুবিধার জন্য নিম্নে উভয় প্রক্রিয়ায় প্রয়োগের ফল পাশাপাশি দেয়া হল।

i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
ii) $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, \quad x>0$	$\int \frac{dx}{x} = \log x$
iii) $\frac{d}{dx}\left(e^{mx}\right) = me^{mx}$	$\int e^{mx}\, dx = \frac{1}{m}\, e^{mx}$
iv) $\frac{d}{dx}(a^{mx}) = m\log_e a\, .a^{mx}$	$\int a^{mx}\, dx = \frac{a^{mx}}{m\log_e a}$
v) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x\, dx = e^x$
vi) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.\log_e a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a}$
vii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x$
viii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x$
ix) $\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$	$\int \cos mx\, dx = \frac{\sin mx}{m}$
x) $\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx$	$\int \sin mx dx = -\frac{\cos mx}{m}$
xi) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x$
xii) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$	$\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x$
xiii) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x$
xiv) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}x) = -\text{cosec}x \cot x$	$\int \text{cosec}x \cot x\, dx = -\text{cosec}x$

পাঠ-৩
যোগজের যোগাশ্রয়ী ধর্ম

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- যোগজের যোগাশ্রয়ী ধর্ম সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

যোগজের সাধারণ নিয়মাবলী

i) x নিরপেক্ষ অনির্দিষ্ট ধ্রুবক a হলে $\int a\partial(x)dx = a\int \partial(x)dx$

প্রমাণঃ ধরুন $\int \partial(x)\,dx = F(x)+C$

যেখানে C সমাকলন ধ্রুবক

$\therefore$ সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$\frac{d}{dx}\{F(x)+C\} = \partial(x)$

এখন যদি x নিরপেক্ষ অনির্দিষ্ট ধ্রুবক a হয় , তবে

$\frac{d}{dx}[a\{F(x)+C\}] = a\frac{d}{dx}[F(x)+C] = \partial(x)$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$\int a\partial(x)dx = a[F(x)+C] = a\int \partial(x)\,dx$

ii) দুইটি ফাংশন $\partial(x)$ ও $g(x)$ এর জন্য– $\int [\partial(x)\pm g(x)]dx = \int \partial(x)dx \pm \int g(x)dx$

প্রমাণ : ধরুন $\int \partial(x)dx = p(x)$ এবং $\int g(x)\,dx = q(x)$

তাহলে $\frac{d}{dx}[p(x)] = \partial(x)$ এবং $\frac{d}{dx}[q(x)] = g(x)$

এখন $\frac{d}{dx}[p(x)\pm q(x)] = \frac{d}{dx}[p(x)] \pm \frac{d}{dx}[q(x)]$

$= \partial(x) \pm g(x)$

সুতরাং সমাকলনের সংজ্ঞানুযায়ী

$\int [\partial(x)\pm g(x)]dx = p(x)\pm q(x) = \int \partial(x)dx \pm \int g(x)\,dx$

একইভাবে n সংখ্যক ফাংশন $\partial_1(x), \partial_2(x), \partial_3(x), \ldots\ldots \partial_n(x)$

এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\int [\partial_1(x) \pm \partial_2(x) \pm \partial_3(x) \pm \ldots\ldots \pm \partial_n(x)]\, dx$$
$$= \int \partial_1(x)dx \pm \int \partial_2(x)dx \pm \int \partial_3(x)dx \pm \ldots\ldots \pm \int \partial_n(x)dx$$

আবার n সংখ্যক অনির্দিষ্ট ধ্রুবক a_1, a_2, a_3 .... a_n এর ক্ষেত্রেও প্রমাণ করা যায় যে,

$$\int [a_1\partial_1(x) \pm a_2\partial_2(x) \pm a_3\partial_3(x) \pm \ldots\ldots \pm a_n\partial_n(x)dx]$$
$$= a_1\int f_1(x)dx \pm a_2\int \partial_2(x)dx \pm a_3\int \partial_3(x)dx \pm \ldots\ldots \pm a_n\int \partial_n(x)dx$$

উদাহরণ 1 ঃ নিম্নের ফাংশনগুলোর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

(i) $\int x^6 dx$ (ii) $\int \frac{dx}{3}$ (iii) $\int (x-5)(x+5)\, dx$ (iv) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

(v) $\int \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) dx$ (vi) $\int \left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right) dx$ (vii) $\int (x^3-5e^x+3\sin x)\, dx$

(viii) $\int \frac{x^3+3}{\sqrt{x}}\, dx$ (ix) $\int \tan^2 x\, dx$ (x) $\int \frac{\sin x+\mathrm{cosec} x}{5\tan x}\, dx$

(xi) $\int \sqrt{(1-\sin 2x)}\, dx$ (xii) $\int \sec^2 x\, \mathrm{cosec}^2 x\, dx$

সমাধান ঃ

(*i*) $\int x^6 dx$

$$= \frac{x^{6+1}}{6+1} + C$$
$$= \frac{x^7}{7} + C = \frac{1}{7}x^7 + C$$

(*ii*) $\int \frac{dx}{3}$

$$= \frac{1}{3}\int dx = \frac{1}{3}x + C$$

(*iii*) $\int (x-5)(x+5)\, dx$

$$= \int (x^2-25)dx = \int x^2 dx - \int 25dx$$
$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 25\int dx = \frac{x^3}{3} - 25x + C$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 25x + C$$

$(iv)\ \int \sqrt[3]{x}\ dx$

$$= \int x^{\frac{1}{3}}\ dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\ x^{\frac{4}{3}} + C$$

$(v)\quad \int \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

$$= \int \left(x^4+2.x^2.\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\ dx$$

$$= \int (x^4 + 2 + x^{-4})\ dx$$

$$= \int x^4 dx + 2 \int dx + \int x^{-4}\ dx$$

$$= \frac{x^{4+1}}{4+1} + 2.x + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2x + \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$= \frac{1}{5}\ x^5 + 2x - \frac{1}{3} x^{-3} + C$$

$(vi)\ \int \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c\right)\ dx$

$$= \int \frac{a}{x^2}\ dx + \int \frac{b}{x}\ dx + \int\ c\ dx$$

$$= a \int x^{-2} dx + b \int \frac{dx}{x} + c \int dx$$

$$= a\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + b\log x + c.x + C$$

$$= a\frac{x^{-1}}{-1} + b\ \log x + cx + C$$

$$= -\frac{a}{x} + b\ \log x + cx + C$$

$(vii)\ \int (x^3 - 5e^x + 3\sin x)\ dx$

$$= \int x^3 dx - \int 5e^x dx + \int 3\sin x dx$$

$$= \int x^3 dx - 5 \int e^x dx + 3 \int \sin x\ dx$$

$$= \frac{x^{3+1}}{3+1} - 5e^x + 3(-\cos x) + C$$

$$=\frac{1}{4}x^4 - 5\vee e^x - 3\cos x + C$$

$(viii)$ $\int \frac{x^3+3}{\sqrt{x}}\, dx$

$$=\int (x^3+3)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$=\int \left(x^3.x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$=\int \left(x^{\frac{5}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$=\int x^{\frac{5}{2}}\, dx + \int 3x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$=\int x^{\frac{5}{2}}\, dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + 3\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$=\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 3\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$=\frac{2}{7}\, x^{\frac{7}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$$

(ix) $\int \tan^2 x\, dx$

$$=\int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$=\int \sec^2 x\, dx - \int 1 dx$$

$$=\int \sec^2 dx - 1\int dx$$

$$= \tan x - x + C$$

(x) $\int \frac{\sin x + \operatorname{cosec} x}{5\tan x}\, dx$

$$=\int \frac{1}{5}\left(\frac{\sin x}{\tan x} + \frac{\operatorname{cosec} x}{\tan x}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{5}(\cos x + \operatorname{cosec} x \cot x)\, dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{ \int \cos x \, dx + \int \operatorname{cosex} x \cot x \, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{5}(\sin x - \operatorname{cosec} x) + C$$

$xi)$ $\int \sqrt{1 - \sin 2x} \; dx$

$$= \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x} \; dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} \, dx$$

$$= \int (\sin x - \cos x) \, dx$$

$$= \int \sin x dx - \int \cos x \, dx$$

$$= -\cos x - \sin x + C$$

$$= -(\cos x + \sin x) + C$$

$xii)$ $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \; dx$$

$$= \int \frac{4}{4\sin^2 x \cos^2 x} \; dx$$

$$= \int \frac{4}{(2\sin x \cos x)^2} \; dx$$

$$= \int \frac{4}{(\sin 2x)^2} \; dx$$

$$= \int 4 \operatorname{cosec}^2 2x \, dx$$

$$= 4 \int \operatorname{cosec}^2 2x dx$$

অনুশীলনী– ৪.১

নিম্নের ফাংশনগুলোর যোজিতফল নির্ণয় করুন।

1. $\int 5x^{14}dx$

2. $\int (3x^2-5x^3)\, dx$

3. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

4. $\int \frac{x^3+1}{x+1}\, dx$

5. $\int (3\cos x - 5\sec^2 x+7)\, dx$

6. $\int (\sec x \tan x - 3\mathrm{cosec}^2 x)\, dx$

7. $\int \sec x\, (\sec x-\tan x)\, dx$

8. $\int \frac{a\cot x+b\tan^2 x-c\sin^2 x}{\sin x}\, dx$

9. $\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\, dx$

10. $\int (\log x+5a^x-2e^x)\, dx$

11. $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}}\, dx$

পাঠ-৪
প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- চলকের পরিবর্তনের সাহায্যে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ঃ চলক পরিবর্তন
ধরুন $\vee\partial(x)\ dx$ নির্ণয় করতে হবে, যেখানে $\partial(x)$ অর্থাৎ সমাকলনীয় রাশি আমাদের জানা কোন আদর্শ আকারের নয় অর্থাৎ $\partial(x)$ এর সরাসরি যোগজ নির্ণয় করা যায় না। প্রতিস্থাপন পদ্ধতির লক্ষ হল চলকের পরিবর্তনের সাহায্যে সমাকলনীয় রাশিকে আমাদের জানা একটি আদর্শ সমাকলনীয় রাশিতে পরিণত করা। নিম্নে চলকের পরিবর্তনের পদ্ধতি দেয়া হল–

ধরুন $I = \int \partial(x)\ dx$

অতএব সংজ্ঞানুসারে $\dfrac{dI}{dx} = \partial(x)$

এখন ধরুন $x = F(z)$

তাহলে $\dfrac{dx}{dz} = F'(z)$

অতএব, $\dfrac{dI}{dz} = \dfrac{dI}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dz} = \partial(x)\ F'(z)$

$= \partial\{F(z)\}\ F'(z)$

সুতরাং সংজ্ঞানুযায়ী $I = \int \partial\{F(z)\}\ F'(z)\ dz$

বা, $\int \partial(x)\ dx = \int \partial\{F(z)\}\ F'(z)\ dz$

সুতরাং $\partial(x)dx$ এর মধ্যে $x=F(z)$ অর্থাৎ $\int f(x)\ dx$ দ্বারা সূচিত রাশিতে x এর স্থানে $F(z)$ এবং dx এর স্থানে $F'(z)\ dz$ বসাতে হবে। তারপর z কে নতুন পরিবর্তনশীল চলক মনে করে যোগজীকরণ প্রক্রিয়া সম্পন্ন করতে হবে। যোগজ ও z এর স্থানে x দ্বারা প্রকাশিত তার সমতুল্য মান বসাতে হবে।

দ্রষ্টব্য ঃ $x=F(z)$ হলে $\dfrac{dx}{dz} = F'(z)$, কিন্তু প্রতিস্থাপনের সময় সাধারণভাবে $dx=F'(z)dz$ বসানো হয়।

কিছু প্রয়োজনীয় আকার (Some Important form)

$\int \partial(ax+b)dx$ এর মান প্রতিস্থাপন প্রক্রিয়া নির্ণয় করুন।

i) a, b, n প্রত্যেকটি ধ্রুবক এবং $n \neq -1$ হলে $\int (ax+b)^n dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ ধরুন $ax+b = z$

$$\therefore x = \frac{1}{a} z - \frac{b}{a}$$

$$\therefore dx = \frac{1}{a} dz$$

$$\therefore \int (ax+b)^n dx = \int z^n . \frac{1}{a} dz$$

$$= \frac{1}{a} \int z^n dz$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$$

ii) $\int \sin(ax+b)dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন। (xএর মান রেডিয়ানে)

সমাধান ঃ ধরুন $ax+b=z$

$$\therefore x = \frac{1}{a} z - \frac{b}{a}$$

$$\therefore dx = \frac{1}{a} dz$$

$$\therefore \int \sin(ax+b)\, dx = \int \sin z . \frac{1}{a} dz$$

$$= \frac{1}{a} \int \sin z dz$$

$$= \frac{1}{a} (-\cos z)$$

$$= -\frac{1}{a} \cos z$$

$$= -\frac{1}{a} \cos (ax+b)$$

অনুরূপভাবে $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin (ax+b)$

$$\int \sec^2(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \tan^2 (ax+b)$$

$$\int \text{cosec}^2(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a} \cot (ax+b)$$

iii) a ও b ধ্রুবক হলে $\int e^{ax+b}dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $ax+b=z \quad \therefore dx = \frac{1}{a}\, dz$

$$\therefore \int e^{ax+b}dx = \int e^{z}.\frac{1}{a}\, dz$$
$$= \frac{1}{a}\int e^{z}dz$$
$$= \frac{1}{a}e^{z}$$
$$= \frac{1}{a}\, e^{ax+b}$$

যখন $b=0, \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\, e^{ax}$

iv) a ও b ধ্রুবক হলে $\int \frac{dx}{ax+b}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $ax+b=z$

$$\therefore dx = \frac{1}{a}\, dz$$
$$\therefore \int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{a}\, dz$$
$$= \frac{1}{a}\, \log_e z$$
$$= \frac{1}{a}\, \log_e (ax+b)$$

যখন $b=0$ তখন $\int \frac{dx}{ax} = \frac{1}{a}\, \log_e ax$

দ্রষ্টব্য ঃ যখন সমাকলনীয় রাশি sine বা cosine এর উচ্চঘাতের ফাংশন আকারে থাকে তখন তাকে গুণীতক কোণের sine বা cosine এর আকারে প্রকাশ করা হয় এবং পরে সাধারণ নিয়মে যোজিত ফল নির্ণয় করা হয়। আবার যোগজীকরণ রাশি যদি sine ও cosine বা sine ও sine বা cosine ও cosine এর গুণফল আকারে থাকে তবে তাকে প্রথমে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের সংখ্যায় প্রকাশ করা হয় ও পরে সাধারণ নিয়মে যোজিত ফল নির্ণয় করা হয়। এরূপ পরিবর্তনের জন্য নিম্নলিখিত সূত্রগুলো প্রয়োজনীয়–

$2\sin^2 x = 1-\cos 2x$

$2\cos^2 x = 1+\cos 2x$

$4\sin^3 x = 3\sin x-\sin 3x$

$4\cos^3 x = 3\cos x+\cos 3x$

$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$

$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$

$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$

$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$

উদাহরণ 1ঃ $\int (2x-3)^4 dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $\int (2x-3)^4 dx$

ধরুন $2x-3 = z$

$\therefore 2dx = dz$

$\therefore dz = \frac{dx}{z}$

$$\therefore \int (2x-3)^4\, dx = \int z^4 . \frac{1}{2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \int z^4 dz$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{10} (2x-3)^5 + C$$

উদাহরণ 2 ঃ $\int \sqrt{2x+3}\ dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \sqrt{(2x+3)}\, dx$

$$= \int (2x+3)^{1/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{(2x+3)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2x+3)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{2}{3} (2x+3)^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} (2x+3)^{3/2} + C$$

উদাহরণ 3 ঃ $\int \sin 5x dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $5x = z$

$\therefore 5.dx = dz$

$\therefore dx = \frac{1}{5}\ dz$

$$\therefore \int \sin 5x\, dx = \int \sin z . \frac{1}{5}\ dz$$

$$= \frac{1}{5} \int \sin z\, dz$$

$$= \frac{1}{5} (-\cos z) + C$$

$$= -\frac{1}{5} \cos z + C = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$$

উদাহরণ 4 ঃ $\int \text{cosec}^2(a-bx)\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $(a-bx) = z$

$\therefore\ -bdx = dz$

$\therefore\ dx = -\frac{1}{b}\ dz$

$$\therefore \int \text{cosec}^2(a-bx)dx = \int \text{cosec}^2 z\, .\, -\frac{1}{b}\ dz$$

$$= -\frac{1}{b}\int \text{cosec}^2 z\ dz$$

$$= -\frac{1}{2}(-\cot z) + C$$

$$= -\frac{1}{b}\ \cos z + C$$

$$= \frac{1}{b}\ \cot(a-bx) + C$$

উদাহরণ 5 ঃ $\int \sqrt{1+\cos x}\ dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \sqrt{1+\cos x}\ dx$

$$= \int \sqrt{2\cos^2 x/2}\ dx$$

$$= \sqrt{2}\int \cos\frac{x}{2}\ dx$$

ধরুন $\frac{x}{2} = z$

$\therefore\ \frac{1}{2}\ dx = dz$

$\therefore\ dx = 2dz$

$$\therefore\ \sqrt{2}\int \cos\frac{x}{2}\ dx = \sqrt{2}\int \cos z.\ 2dz$$

$$= 2\sqrt{2}\int \cos z\ dz$$

$$= 2\sqrt{2}\ \sin z + C$$

$$= 2\sqrt{2}\ \sin\frac{x}{2} + C$$

উদাহরণ 6 ঃ $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2 x/2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x/2}$$

$$=\frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2}\, dx$$

ধরুন $\frac{x}{2} = z \;\therefore \frac{1}{2}\, dx = dz \;\therefore dx = 2dz$

$$\therefore \frac{1}{2}\int \sec^2\frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int \sec^2 z.\, 2dz$$

$$=\frac{1}{2}.\, 2\int \sec^2 z\, dz$$

$$=\int \sec^2 z dz = \tan z + C$$

$$=\tan\frac{x}{2} + C$$

উদাহরণ 7ঃ $\int \sin^2 3x dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \sin^2 3x dx$

$$=\int \frac{1}{2}\,.\, 2\sin^2 3x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)\, dx$$

$$=\frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx$$

$$=\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx$$

ধরুন, $6x = z$

$\therefore 6dx = dz$

$\therefore dx = \frac{dz}{6}$

$$\therefore \int \cos 6x dx = \int \cos z.\, \frac{1}{6}\, dz$$

$$=\frac{1}{6}\int \cos z\, dz$$

$$=\frac{1}{6}\sin z$$

$$=\frac{1}{6}\sin 6x$$

$$\therefore \int \sin^2 3x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{6}\sin 6x + C$$

$$=\frac{1}{12}(6x - \sin 6x) + C$$

উদাহরণ 8 ঃ $\int \sin px \cos qx\, dx\ (p>q)$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $I = \int \sin px \cos qx\, dx$

$$=\frac{1}{2}\int 2\sin px \cos qx\, dx$$

$$=\frac{1}{2}\int [\sin(px+qx)+\sin(px-qx)]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int \sin(px+qx)dx+\int \sin(px-qx)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int \sin (p+q)x\,dx+\int \sin(p-q)x\,dx\right]$$

ধরুন $(p+q)\,x = u$ এবং $(p-q)x = v$

$\therefore (p+q)\,dx = du$ $\therefore (p-q)dx = dv$

$\therefore dx = \frac{1}{p+q}\,du$ $\therefore dx = \frac{1}{p-q}\,dv$

$$\therefore I =\frac{1}{2}\left[\int \sin u.\frac{1}{p+q}du+\int \sin v.\frac{1}{p-q}\,dv\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\int \sin u\,du+\frac{1}{p-q}\int \sin v\,dv\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}(-\cos u)+\frac{1}{p-q}(-\cos v)\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(p+q)x}{p+q}-\frac{\cos(p-q)x}{p-q}\right]+C$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(p+q)x}{p+q}+\frac{\cos(p-q)x}{p-q}\right]+C$$

উদাহরণ 9 ঃ $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int 5\cos 4x \sin 3x dx$

$$=5.\frac{1}{2}\int 2\cos 4x \sin 3x\,dx$$

$$=\frac{5}{2}\int [\sin(4x+3x)-\sin(4x-3x)]dx$$

$$=\frac{5}{2}\int (\sin 7x-\sin x)\,dx$$

$$=\frac{5}{2}\left[\int \sin 7x dx-\int \sin x\,dx\right]$$

$$=\frac{5}{2}\left[\frac{1}{7}(-\cos 7x)-(-\cos x)\right]+C$$

$$=\frac{5}{2}\left(\cos x-\frac{1}{7}\cos 7x\right)+C$$

উদাহরণ 10 : $\int \cos^3 x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\int \cos^3 x\, dx$

$$=\frac{1}{4}\int 4\cos^3 x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int (3\cos x+\cos 3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\int \cos x\, dx + \vee cos3x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[3\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right] + C$$

$$= \frac{1}{12}\ [9\sin x + \sin 3x] + C$$

উদাহরণ 11 ঃ $\int \sin^4 x dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \sin^4 x dx$

$$= \int (\sin^2 x)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}.\ 2\sin^2 x\right)^2 dx$$

$$= \vee \frac{1}{4}(2\sin^2 x)^2\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(2\cos^2 2x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\ \vee\left[\frac{3}{2} - 2cos2x + \frac{1}{2}\, cos4x\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int \frac{3}{2}dx - \int 2\cos 2x dx + \int \frac{1}{2}\cos x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\int dx - 2\int \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.\ \frac{\sin 4x}{4}\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + C$$

উদাহরণ 12 ঃ $\int e^{5-7x}\ dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $5 - 7x = z$

$$\therefore\ -7dx = dz$$

$$\therefore\ dx = -\frac{1}{7}\ dz$$

$$\therefore \int e^{5-7x} dx = \int e^z.\left(-\frac{1}{7}dz\right)$$

$$= -\frac{1}{7}\int e^z dz$$

$$= -\frac{1}{7}\, e^{z}+C = -\frac{1}{7}\, e^{5-7x}+C$$

উদাহরণ 13 ঃ $\int a^{4x}\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $4x = z$

$$\therefore\ 4dx = dz$$

$$\therefore\ dz = \frac{dz}{4}$$

$$\therefore \int a^{4x}dx = \int a^{z}.\ \frac{1}{4}\ dz$$

$$= \frac{1}{4}\int a^{z}dz$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{a^{z}}{\log_e a} + C$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{a^{4x}}{\log_e a} + C$$

উদাহরণ 14 : $\int\frac{3dx}{4+5x}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $4+5x = z$

$$\therefore\ 5dx = dz$$

$$\therefore\ dx = \frac{dz}{5}$$

$$\therefore \int\frac{3dx}{4+5x} = 3\int\frac{dx}{4+5x}$$

$$= 3\int\frac{dz}{5z}$$

$$= \frac{3}{5}\int\frac{dz}{z}$$

$$= \frac{3}{5}\ \log_e z + C = \frac{3}{5}\ \log_e (4+5x) + C$$

উদাহরণ 15 ঃ $\int \sec^2(3x+2)dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $3x+2 = z$

$$\therefore\ 3dx = dz$$

$$\therefore\ dx = \frac{dz}{3}$$

$$\therefore \int \sec^2(3x+2)dx = \int \sec^2 z.\ \frac{dz}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec^2 z\ dz$$

$$= \frac{1}{3}\ \tan z + C$$

$$= \frac{1}{3}\tan(3x+2) + C$$

উদাহরণ 16 ঃ $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$

$$= \int \frac{1}{2} . 2\sin^2 x \cos 2x\, dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\ \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos 2x dx - \int \cos^2 2x dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int 2\cos^2 2x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{\sin 4x}{4}\right] + C$$
$$= \frac{1}{4}\left[\sin 2x - x - \frac{1}{4}\sin 4x\right] + C$$

উদাহরণ 17ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$

$$= \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})\,(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})}\ dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{(x+a)} - \sqrt{x+b}}{(x+a)-(x+b)}\ dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{a-b}\ dx$$
$$= \frac{1}{a-b}\int \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}\right)\ dx$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\int (x+a)^{1/2} dx - \int (x+b)^{1/2} dx\right]$$

ধরুন $(x+a) = p$ এবং $x+b = q$

$\therefore dx = dp$ $\qquad\qquad \therefore dx = dq$

$$\therefore I = \frac{1}{a-b}\left[\int p^{1/2} dp - \int q^{1/2} dq\right]$$
$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{p^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{q^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{2}{3}\left(p^{3/2} - q^{3/2}\right)\right] + C$$

$$= \frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{3/2} - (x+b)^{3/2}\right] + C$$

অনুশীলনী–৪.২

নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

1. $\int (3-2x)^4 dx$
2. $\int \sqrt{1-\frac{x}{2}}\, dx$
3. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-4x}}\, dx$
4. $\int 3\sin x \cos x\, dx$
5. $\int \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) dx$
6. $\int \cos^2\frac{\theta}{2}\, d\theta$
7. $\int 3\cos 3x \cos x\, dx$
8. $\int \sin 4x \sin 2x\, dx$
9. $\int \sin^3 x\, dx$
10. $\int \cos^4 x\, dx$
11. $\int \frac{1+e^{5\theta}}{\sqrt{e^{3\theta}}}\, d\theta$
12. $\int 10^{3x}\, dx$
13. $\int \left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right) dx$
14. $\int 5(3-x)^{-1}\, dx$
15. (i) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$
16. $\int \left\{\frac{1}{(a+x)^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right\} dx$
17. $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$
18. $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}}\, dx$
19. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

পাঠ-৫
প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (আরও কিছু নিয়ম)

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–
- বিশেষ কিছু নিয়মের মাধ্যমে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

নিয়ম–১ ঃ সমাকলনীয় রাশি যদি x^n –এর ফাংশন ও x^{n-1}এর গুণফল হয়, তবে $x^n=z$ ধরে তার যোজিত ফল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1 ঃ $\int x e^{x^2} dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x e^{x^2} dz$

ধরুন $x^2 = z$

$\therefore 2xdx = dz$

$\therefore x\, dx = \dfrac{dz}{2}$

$$\therefore \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2} e^z + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

উদাহরণ 2ঃ $\int x\sqrt{x^2+1}\ dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x\sqrt{x^2+1}\ dx$

ধরুন $x^2 + 1=z$

$\therefore 2xdx = dz \quad \therefore xdx = \dfrac{dz}{2}$

$$\therefore \int x\sqrt{x^2+1}\ dx = \int \frac{1}{2} . \sqrt{z}\ dz$$

$$= \frac{1}{2}\int z^{1/2}\ dz$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{z^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{2}{3} z^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

নিয়ম ২ ঃ সমাকলনীয় রাশি যদি যে কোন শক্তি বিশিষ্ট ফাংশন ও তার অন্তরক সহগের গুণফল হয়, তবে ফাংশনটির জন্য z ধরে রাশিটির যোজিত ফল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 3 ঃ $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

ধরুন $\sin x = z$

$\therefore \cos x \, dx = dz$

$\therefore \int \sin^3 x \cos x dz$

$= \int z^3 .dz$

$= \frac{1}{4} z^4 + C$

$= \frac{1}{4} \sin^4 x + C$

উদাহরণ 4 ঃ $\int \cos^2 x \sin x \, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \cos^2 x \sin x \, dx$

ধরুন $\cos x = z \;\; \therefore -\sin x \, dx = dz$

$$\therefore \int \cos^2 x \sin x \, dx = \int z^2(-dz)$$

$$= -\int z^2 dz$$

$$= -\frac{1}{3} z^3 + C$$

$$= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

নিয়ম ৩ ঃ সমকালনীয় রাশিটির একটি ফাংশনের লব হরের অন্তরক সহগ হলে তার সমাকলিত মান হরের লগারিদম হবে।

প্রমাণ ঃ $\int \frac{\partial'(x)}{\partial(x)} \, dx = \log \partial(x)$

ধরুন $\partial(x) = z \;\; \therefore \partial'(x) \, dx = dz$

$$\therefore \int \frac{\partial'(x)}{\partial(x)} \, dx = \int \frac{dz}{z} = \log z = \log \partial(x)$$

উদাহরণ 5 ঃ $\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$

ধরুন $1+x^2 = z$

$\therefore 2x dx = dz$

$$\therefore \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \int \frac{dz}{z} = \log z + C$$

$$= \log(1+x^2) + C$$

উদাহরণ 6 ঃ $\int \frac{dx}{x\log x}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{x\log x}$

ধরুন $\log x = z \;\therefore \frac{1}{x}\,dx = dz$

$\therefore \int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{dz}{z}$

$= \log z + C = \log(\log x) + C$

নিয়ম ৪ঃ সমাকলনীয় রাশিটি এমন একটি ভগ্নাংশ যার হর কোন রাশির বর্গমূল এবং লব ঐ রাশির অন্তরক।

অর্থাৎ $\int \frac{\frac{1}{2}\partial'(x)\,dx}{\sqrt{\partial(x)}} = \sqrt{\partial(x)}$

প্রমাণ ঃ ধরুন $\sqrt{\partial(x)} = z$

$\therefore \frac{\frac{1}{2}\partial'(x)}{\sqrt{\partial(x)}}\,dx = dz$

$\therefore \int \frac{\frac{1}{2}\partial'(x)}{\sqrt{\partial(x)}}\,dx = \int dz = z = \sqrt{\partial(x)}$

উদাহরণ 7 ঃ $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ এর যোগজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

ধরুন $1-x^2=z$

$\therefore -2xdx = dz \;\therefore xdx = -\frac{1}{2}\,dz$

$\therefore \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$

$= -\frac{1}{2}\int z^{-1/2}\,dz$

$= -\frac{1}{2}\cdot \frac{z^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$

$= -\sqrt{z} + C$

$= -\sqrt{1-x^2} + C$

tan*x*, cot*x*. sec*x*, cosec*x* এর যোগজ

(i) $\int \tan x \, dx$

$= \int \frac{\sec x \tan x}{\sec x} \, dx$

$= \log \sec x = -\log \cos x$

$\therefore \int \tan x \, dx = \log \sec x = -\log \cos x$

(ii) $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \log \sin x = -\log \operatorname{cosec} x$

$\therefore \int \cot x \, dx = \log \sin x = -\log \operatorname{cosec} x$

(iii) $\int \operatorname{cosec} x \, dx$

$= \int \frac{dx}{\sin x}$

$= \int \frac{dx}{2\sin {}^x\!/_2 \cos {}^x\!/_2}$

$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2 {}^x\!/_2 \, dx}{\tan {}^x\!/_2}$ [লব ও হরকে $\sec^2\frac{x}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \int \frac{dz}{z}$ [$\tan\frac{x}{2} = z$ ধরলে $\frac{1}{2} \sec^2\frac{x}{2} \, dx = dz$]

$= \log z = \log \tan\frac{x}{2}$

$\therefore \int \operatorname{cosec} x \, dx = \log \tan\frac{x}{2}$

iv) $\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$

$= \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}$

$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \, dx$

[লব ও হরকে $\sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

$\therefore \int \sec x \, dx = \log \tan x \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

$$= \log(\sec x + \tan x)$$

অনুশীলনী– ৪.৩

নিম্নলিখিত ফাংশনগুলোর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

1. (i) $\int x^2\cos x^3 dx$ (ii) $\int x^2 a^{x^3} dx$ (iii) $\int x\sin x^2 dx$
2. (i) $\int \cos^3 x \sin x\,dx$ (ii) $\int \tan^3 x \sec^2 x\,dx$
3. (i) $\int \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$ (ii) $\int \frac{dx}{x(1+\log x)}$ (iii) $\int \frac{\tan x}{\log(\cos x)}\,dx$

   (iv) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$ (v) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (vi) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$
4. $\int \operatorname{cosec}\frac{1}{2}x\,dx$
5. $\int \frac{dx}{1+e^x}$
6. $\int \cos\cos(\sin x)\,dx$
7. $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$
8. $\int \sec\frac{x}{2}\,dx$
9. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\sin^{-1}x)}$

   (ii) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}}$ (iii) $\int \frac{\tan(\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

   (iv) $\int \frac{\cos(\tan^{-1}x)}{1+x^2}\,dx$ (v) $\int \frac{2x\sin^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

পাঠ-৬
প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ঃ আদর্শ যোগজ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে কয়েকটি আদর্শ যোগজ সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

কয়েকটি আদর্শ যোগজ (Some Standard Integrans)

(i) $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ (ii) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ (iii) $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

উপরোক্ত সমাকলনগুলিকে আদর্শ আকার (Standard form) রূপে ধরে সূত্র হিসেবে ব্যবহার করা হয়। যেহেতু $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$, $\sec^2\theta-1 = \tan^2\theta$, $1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$, $1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$ কাজেই সমাকলনীয় রাশি x^2+a^2 এর কোন ঘাত হলে x এর পরিবর্তে $a\tan\theta$; x^2-a^2 এর কোন ঘাত হলে x এর পরিবর্তে $a \sec\theta$; a^2-x^2 এর কোন ঘাত হলে x এর পরিবর্তে $a\sin\theta$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করা সুবিধাজনক। আবার অনেক ক্ষেত্রে বিকল্প পদ্ধতিতেও যোগজ নির্ণয় করা সুবিধাজনক হয়। নিম্নে পদ্ধতিগুলো আলোচনা করা হল।

(i) $\boldsymbol{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\frac{x}{a}}$

প্রমাণ ঃ মনে করুন $x = a\tan\theta$

$\therefore dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}$$

= \i(,,)\f($a \sec^2\theta\, d\theta, a^2(1+\tan^2\theta)$)\

$$= \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta}$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\ \theta = \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\frac{x}{a}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $\boldsymbol{\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x}$

দ্রষ্টব্য $x=a\cot\theta$ ধরে $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}$

(ii) $\boldsymbol{\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2x} \log\frac{a+x}{a-x}\ .\ (x<a)}$

প্রমাণ ঃ $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right\} dx$

$$= \frac{1}{2a}\left\{\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x}\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log(a+x) - \log(a-x)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$$

(iii) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}.\ (x>a)$

প্রমাণ ঃ $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right\}$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log(x-a)-\log(x+a)\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}$$

(iv) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}$

প্রমাণ: ধরূন $x=a\sin\theta$

$\therefore dx=a\cos\theta\, d\theta$

এবং $\theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}$$

$$=\int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}$$

$$=\int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}}$$

$$=\int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta}$$

$$=d\theta=\theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

দ্রষ্টব্য ঃ $x=a\cos\theta$ ধরে $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\cos^{-1}\frac{x}{a}$

অনুসিদ্ধান্ড় ঃ $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x$ **অথবা** $\cos^{-1}x$

(v) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\log\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$

প্রমাণ ঃ ধরুন $\sqrt{x^2\pm a^2}=z-x$

$\therefore z=x+\sqrt{x^2\pm a^2}$

$$\therefore dz=\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)dx=\frac{z}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx$$

$$\therefore \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{dz}{z}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dz}{z}$$

$$= \log z$$

$$= \log \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

উদাহরণ 1 ঃ $\int \frac{dx}{16+x^2}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{16+x^2}$

$$= \int \frac{dx}{(4)^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{x}{4}$$

উদাহরণ 2 ঃ $\int \frac{4dx}{16a^2+x^2}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $I = \int \frac{4dx}{16a^2+x^2}$

$$= \int \frac{4dx}{(4a)^2 + x^2}$$

ধরুন $x = 4a \tan\theta$ $\quad \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{x}{4a}$

এবং $dx = 4a\sec^2\theta d\theta$

$$\therefore I = 4\int \frac{4a \sec^2\theta d\theta}{16a^2 + 16a^2 \tan^2\theta}$$

$$= 16a \int \frac{\sec^2\theta}{16a^2(1+\tan^2\theta)} d\theta$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} d\theta$$

= **Error!**$d\theta$

$$= \frac{1}{a} \theta + C$$

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{4a} + C$$

উদাহরণ 3 ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $I = \int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(5)^2-(4x)^2}}$$

ধরুন, $x = \frac{5}{4}\sin\theta$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{4}\sin\theta\right)$$

বা, $1 = \frac{5}{4}\cos\theta\frac{d\theta}{dx}$

$$\therefore dx = \frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta$$

আবার $x = \frac{5}{4}\sin\theta$

$$\therefore \theta = \sin^{-1}\frac{4x}{5}$$

$$\therefore I = \int \frac{\frac{5}{4}\cos\theta d\theta}{\sqrt{(25-25\sin^2\theta)}}$$

$$= \int \frac{\frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{25(1-\sin^2\theta)}}$$

$$= \int \frac{\frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{5^2\cos^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta}{5\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\theta = \textbf{Error!}$$

উদাহরণ 4 ঃ $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$ এর যোজিত মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$

ধরুন, $x^2 = z$

$$\therefore 2x\,dx = dz$$

$$\therefore x\,dx = \frac{dz}{2}$$

$$\therefore \int \frac{x\,dx}{x^4+1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1} z + C$$

$$= \frac{1}{2} \tan -1\, x^2 + C$$

উদাহরণ 5 ঃ $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$ এর যোগজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$

$$= 3 \int \frac{dx}{x^2-8x+16+9}$$

$$= 3 \int \frac{dx}{(x-4)^2+3^2}$$

$$= 3.\frac{1}{3} \tan^{-1}\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

অনুশীলনী– ৪.৪

1. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$

2. $\int \frac{dx}{5+x^2}$

3. $\int \frac{x^2\, dx}{1+x^6}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

5. (*i*) $\int \frac{dx}{25a^2-49x^2}$ (*ii*) $\int \frac{dx}{25x^2-4}$

6. (*i*) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ (*ii*) $\int \frac{dx}{1+x+x^2}$

পাঠ-৭
মূলদ ভগ্নাংশের সমাকলন

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- মূলদ ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে বিশ্লেষণ করে যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলদ বিজগণিতীয় ভগ্নাংশের অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে হলে প্রথমে তাকে আংশিক ভগ্নাংশে বিশ্লেষণ করতে হয় এবং পরে প্রত্যেক অংশের জন্য পৃথক যোজিত ফল নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ 1 ঃ $\int \frac{x+1}{3x^2-x-2}\,dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{x+1}{3x^2-x-2}$

$= \frac{x+1}{(x-1)(3x+2)}$

ধরুন $\frac{x+1}{(x-1)(3x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{3x+2}$

$\therefore x+1 = A(3x+2) + B(x-1)$

উভয় পক্ষে $x=1$বসিয়ে পাই $2 = 5A \;\; \therefore A = \frac{2}{5}$

এখন x এর সহগ সমীকৃত করে পাই–

$1 = 3A + B$

বা, $1 = 3.\frac{2}{5} + B$

বা, $1 = \frac{6}{5} + B$

$\therefore B = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$

$\therefore \frac{x+1}{(x-1)(3x+2)} = \frac{2}{5}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{5}\frac{1}{3x+2}$

$\therefore \int \frac{x+1}{3x^2-x-2}\,dx = \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{3x+2}$

$= \frac{2}{5}\log(x-1) - \frac{1}{5}\log(3x+2)$

উদাহরণ 2 ঃ $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$ এর যোগজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন, $\frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$\therefore x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$

$x=1$ বসিয়ে উভয় পক্ষ হতে পাই

$1 = 2A \quad \therefore A = \frac{1}{2}$

উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই–

$0 = A+B$

বা, $B = -A = -\frac{1}{2}$

উভয় পক্ষ হতে ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই–

$0 = A-C$

$\therefore C = A = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}$$

$$\therefore \int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

উদাহরণ 3 ঃ $\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}\,dx$ এর যোগজ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ ধরুন $\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2}$

$\therefore x^2 = A(x-1)^2(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-2) + D(x-1)^3$

$x = 1$ বসিয়ে পাই

$1 = -C \;\therefore C = -1$

$x = 2$ বসিয়ে পাই–

$4 = D(1)^3 \quad \therefore D = 4$

x^3 এর সহগ সমীকৃত করে পাই–

$0 = A+D \quad \therefore A = -D = -4$

ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই–

$0 = -2A + 2B - 2C - D$

বা, $0 = +8 + 2B + 2 - 4$

বা, $2B = -6$

$\therefore B = -3$

$$\therefore \frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} = -\frac{4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{4}{x-2}$$

$$\therefore \int \frac{x^2dx}{(x-1)^3(x-2)} = -\int \frac{4}{x-1}\,dx - 3\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 4\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -4\log(x-1) + 3\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + 4\log(x-2)$$

$$= 4\log\frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2}$$

উদাহরণ 4 ঃ $\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{x^2+x+2}{x^2-1} = \frac{x^2-1+x+3}{x^2-1}$

$$= \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{x+3}{x^2+1}$$

$$= 1 + \frac{x+3}{x^2-1}$$

ধরুন $\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$\therefore x+3 = A(x-1) + B(x+1)$

$x=1$ বসিয়ে পাই $4 = 2B \therefore B=2$

$x=-1$ বসিয়ে পাই $2 = -2A \;\; \therefore A = -1$

$\therefore \frac{x-3}{x^2-1} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$

$\therefore \frac{x^2+x+2}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$

$$\therefore \int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\, dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= x - \log(x+1) + 2\log(x-1)$$

অনুশীলনী– ৪.৫

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$
2. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$
3. $\int \frac{x^2}{x^2-16}$
4. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$
5. $\int \frac{(x-1)}{(x-2)(x-3)}\, dx$
6. $\int \frac{(x^2+x)\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$
7. $\int \frac{dx}{(x+3)(x^2+4)}$
8. $\int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\, dx$
9. $\int \frac{dx}{x(x-1)^2(x^2+1)}$
10. $\int \frac{2x^2-1}{(x+1)^2(x-2)}\, dx$

পাঠ-৮
সখন্ড যোজন পদ্ধতি

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- একটি ফাংশন যদি দুইটি ফাংশনের গুণফল আকারে থাকে তবে সখন্ড যোজন পদ্ধতিতে তার যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন;
- প্রথম ফাংশন নির্বাচনের নিয়ম সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

সখন্ড যোজন পদ্ধতি (Integration by parts)

একটি ফাংশন যদি দুইটি ফাংশনের গুণফল আকারে দেয়া থাকে তবে তার যোগজ নির্ণয়ের জন্য সাধারণত সখন্ড যোজন পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয়।

u ও v ফাংশন দুইটি x চলকের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ যোগ্য হলে–

$$\int uv\,dx = u\int vdx - \int\left[\frac{du}{dx}\int vdx\right]dx$$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি

$$\frac{d}{dx}(uw) = u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}$$

এখানে u ও w উভয়ই x এর ফাংশন।

x কে পরিবর্তনশীল ধরে উভয়পক্ষকে সমাকলন করলে পাই–

$$uw = \int\left(u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}\right)dx$$

$$= \int u\frac{dw}{dx}\,dx + \int w\frac{du}{dx}\,dx$$

$$or,\ \int u\frac{dw}{dx}\,dx = uw - \int w\frac{du}{dx}\,dx$$

ধরুন $\frac{dw}{dx} = v \therefore dw = vdx$ বা, $w = \int vdx$

সুতরাং $\int uvdx = u\int vdx - \int\left[\frac{dv}{dx}\int v\,dx\right]dx$

অর্থাৎ দুইটি ফাংশনের গুণফলের সমাকল

= (প্রথম ফাংশন) * (দ্বিতীয় ফাংশনের সমাকল) – [(প্রথম ফাংশনের অন্তরক সহগ) * (দ্বিতীয় ফাংশনের সমাকল)] এর সমাকল।

দুইটি ফাংশনের গুণফলের সমাকল = (প্রথম ফাংশন) * (দ্বিতীয় ফাংশনের সমাকল) – [(প্রথম ফাংশনের অন্তরক সহগ) * (দ্বিতীয় ফাংশনের সমাকল)] এর সমাকল।

প্রথম ফাংশন নির্বাচনের নিয়ম

সহগ যোগজ পদ্ধতির ক্ষেত্রে কোনটি প্রথম ফাংশন এবং কোনটি দ্বিতীয় ফাংশন তা নির্বাচন করা একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। নিম্নে কতগুলো নিয়ম দেয়া হল–

সমাকলনীয় রাশি–

i) বিজগাণিতিক ও ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের গুণফল হলে বিজগাণিতিক ফাংশনটি হবে প্রথম ফাংশন।
ii) বীজগাণিতিক ও সূচক ফাংশনের গুণফল হলে বিজগাণিতিক ফাংশনটি হবে প্রথম ফাংশন।
iii) বিজগাণিতিক ও লগারিদমিক ফাংশনের গুণফল হলে লগারিদমিক ফাংশনটি প্রথম ফাংশন।
iv) বিজগাণিতিক ও বিপরীতবৃত্তীয় ফাংশনের গুণফল হলে বিপরীতবৃত্তীয় ফাংশনটি প্রথম ফাংশন।
v) ত্রিকোণমিতিক ও সূচক ফাংশনের গুণফল হলে, যে কোনটিকে প্রথম ফাংশন।

উদাহরণ 1 ঃ $\int x\sin x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x \sin x\, dx$

$$= x\int \sin x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x) \int \sin x\, dx\right\} dx$$

$$= x(-\cos x) - \int 1\,(-\cos x)dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

উদাহরণ 2 ঃ $\int x^2e^x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x^2e^x\, dx$

$$= x^2\int e^x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^2) \int e^x\, dx\right\} dx$$

$$= x^2e^x - \int 2x.\, e^x\, dx$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x dx$$

$$= x^2e^x - 2\left[x\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\right\} dx\right]$$

$$= x^2e^x - 2[xe^x - \int e^x\, dx]$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

উদাহরণ 3 ঃ $\int x \log x$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x\log x\, dx$

$$= \log x \int x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(lgox)\int x\, dx\right\} dx$$

$$= \log x.\, \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2\log x - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ x^2\log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

উদাহরণ 4 ঃ $\int x \tan^{-1}x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x \tan^{-1}x\, dx$

$$= \tan^{-1}x \int x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int x\, dx\right\} dx$$
$$= \tan^{-1}x.\ \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2}\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\ x^2 \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\ x^2 \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\ x^2 an^{-1}x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\ x^2\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{2}\ \tan^{-1}x + C$$

উদাহরণ 5 ঃ $\int e^x \sin x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $I = \int e^x \sin x\, dx$

$$= e^x \int \sin x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(e^x) \int \sin x\, dx\right\} dx$$
$$= e^x (-\cos x) - \int e^x (-\cos x)\, dx$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$
$$= -e^x \cos x + e^x \int \cos x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(e^x)\int \cos x\, dx\right\} dx$$
$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$
$$= e^x (\sin x - \cos x) - I$$
$$\therefore 2I = e^x (\sin x - \cos x)$$
$$\therefore I = \frac{1}{2}\ e^x (\sin x - \cos x)$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরুন $I = \int e^x \sin x\, dx$

$$= \sin x \int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\sin x) \int e^x dx\right\} dx$$
$$= \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx$$

$$= e^x \sin x - \left[\cos x \int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\cos x) \int e^x dx\right\} dx\right]$$

$$= e^x \sin x - \left[\cos x \, e^x - \int -\sin x \, e^x \, dx\right]$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - I$$

$$\therefore 2I = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

উদাহরণ 6 ঃ $\int x \sin x \cos x \, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুণ।

সমাধান ঃ $\int x \sin x \cos x \, dx$

$$= \frac{1}{2} \int x. 2\sin x \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int x \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x \int \sin 2x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x) \int \sin 2x \, dx\right\} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int -\frac{\cos 2x}{2} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} . \frac{\sin 2x}{2}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C$$

উদাহরণ 7ঃ $\int \frac{xe^x \, dx}{(x+1)^2}$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \frac{xe^x \, dx}{(x+1)^2}$

$$= \int \frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2} \, dx$$

$$= \int \frac{e^x}{x+1} \, dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{x+1} \int e^x dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) \int e^x dx\right\} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} \, dx$$

$$= \frac{e^x}{x+1} - \int -(x+1)^{-2} e^x dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$$

$$= \frac{e^x}{x+1} + \int \frac{e^x}{(x+1)^2} \, dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2} dx = \frac{e^x}{x+1}$$

উদাহরণ 8 ঃ $\int x\sin^3 x \, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x\sin^3 x\, dx$

$$= \int x.\frac{1}{4}\,.\,4\sin^3 x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int x\,(3\sin x - \sin 3x)\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int x\sin x dx - \frac{1}{4}\int x\sin 3x dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[x\int \sin x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \sin x dx\right\}dx\right] - \frac{1}{4}\left[x\int \sin 3x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \sin 3x dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{3}{4}\,[x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx] - \frac{1}{4}\left[x\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \int\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)dx\right]$$

$$= -\frac{3}{4}\,x\cos x + \frac{3}{4}\int \cos x\, dx + \frac{1}{12}\,x\cos 3x - \frac{1}{12}\int \cos 3x dx$$

$$= -\frac{3}{4}x\cos x + \frac{3}{4}\,\sin x + \frac{1}{12}\,x\cos 3x - \frac{1}{12}\,.\,\frac{\sin 3x}{3}\,+C$$

$$= -\frac{3}{4}x\cos x + \frac{3}{4}\,\sin x + \frac{1}{12}x\cos x - \frac{1}{36}\,\sin 3x + C$$

উদাহরণ 9 ঃ $\int e^x(\sin x+\cos x)dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int e^x(\sin x+\cos x)dx$

$$= \int e^x\sin x dx + \int e^x\cos x dx$$

$$= \int e^x\sin x dx + \left[e^x\int \cos x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(e^x)\int \cos x\, dx\right\}dx\right]$$

$$= \int e^x\sin x\, dx + e^x\sin x - \int e^x\sin x\, dx + C$$

$$= e^x\sin x + C$$

উদাহরণ 10 ঃ $\int e^x(\tan x - \log\cos x)dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int e^x(\tan x - \log\cos x)dx$

$$= \int e^x\tan x\, dx - \int e^x\log(\cos x)dx$$

$$= \tan x\int e^x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\tan x)\int e^x dx\right\}\, dx - \left[\log(\cos x)\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\log(\cos x)\int e^x dx\right\}dx\right]$$

$$= \tan x\, e^x - \int \sec^2 x\, e^x\, dx - \log(\cos x)e^x - \int\frac{\sin x}{\cos x}\, -e^x dx$$

$$= e^x\tan x - \left[e^x\int \sec^2 dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(e^x)\int \sec^2 x dx\right\}\right] - e^x\log(\cos x) - \int e^x\tan x dx$$

$$= e^x\tan x - e^x\tan x + \int e^x\tan x dx - e^x\log(\cos x) - \int e^x\tan x dx$$

$$= -e^x\log(\cos x)$$

উদাহরণ 11ঃ $\int x \cos 2x \cos 3x\, dx$ এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x \cos 2x \cos 3x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int x.2\cos 2x \cos 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x(\cos 5x + \cos x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int x \cos 5x\, dx + \frac{1}{2}\int x \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\int \cos 5x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos 5x dx\right\}dx\right] + \frac{1}{2}\left[x\int \cos x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int \cos x dx\right\}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}x\left(\frac{\sin 5x}{5}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{\sin 5x}{5}\, dx + \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2}\int \sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{10}x \sin 5x - \frac{1}{10}\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) + \frac{1}{2}x \sin x - \frac{1}{2}(-\cos x) + C$$

$$= \frac{1}{10}\, x \sin 5x + \frac{1}{50}\cos 5x + \frac{1}{2}x \sin x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

অনুশীলনী– ৪.৬

নিম্নলিখিত গুলোর যোজিত ফল নির্ণয় করুন।

1. $\int \log x\, dx$ 2. $\int \frac{\log(\log x)}{x}\, dx$

3. $\int x \cos x\, dx$ 4. $\int x e^{-x} dx$

5. (i) $\int x\cos^2 x dx$ (ii) $\int x^2 \sin^2 x dx$

6. (i) $\int \cos^{-1} x dx$ (ii) $\int x \sin^{-1} x dx$ (iii) $\int \tan^{-1} x\, dx$

7. (i) $\int x e^{ax} dx$ (ii) $\int e^x \sin 2x\, dx$ (iii) $\int e^{2x} \cos 2x$

8. (i) $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)dx$ (ii) $\int e^x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ (iii) $\int \frac{e^x}{x}(1+x\log x)\, dx$

9. $\int x \sin x \sin 2x\, dx$

উত্তরমালা

অনুশীলনী– ৪.১

1. $\frac{1}{3}\, x^{15}+C$
2. $x^3 - \frac{5}{4}\, x^4$
3. $\frac{3}{4}\, x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}}$
4. $\frac{1}{3}\, x^3 - \frac{1}{2}\, x^2 + x$
5. $3\sin x - 5\tan x + 7x$
6. $\sec x + 3\cot x$
7. $\tan x - \sec x$
8. $-a\,\mathrm{cosec}\,x + b\sec x + c\cos x$
9. $\tan x - x$
10. $\frac{1}{x} + \frac{5a^x}{\log_e a} - 2e^x$
11. $\frac{3}{2}\, e^{3/2}\, x + 4e^{1/2}\, x - 2e^{-1/2}\, x$

অনুশীলনী–৪.২

1. $-\frac{1}{10}(3-2x)^{5}$
2. $-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{3/2}$
3. $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-4x)^2}$
4. $-\frac{3}{4}\cos 2x$
5. $-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$
6. $\frac{1}{2}(\theta + \sin\theta)$
7. $\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 4x + \sin 2x\right]$
8. $\frac{1}{12}(3\sin 2x - \sin 6x)$
9. $\frac{1}{12}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos x$
10. $\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} + \sin 2x + \frac{1}{8}\, sin 4x\right]$
11. $\frac{2}{3}\, e^{-3/2\,\theta} + \frac{2}{7}\, e$**Error!**
13. $2e^{x/2} - 2e^{-x/2}$
14. $-5\log_e(3-x)$
15. (i) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x$ (ii) $\tan x - \cot x$
16. $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a+x}$
17. $2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)$
18. $\frac{2}{3}\, e^{3/2x} + 4e^{x/2} - 2e^{-1/2x}$
19. (i) $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}\right]$ (ii) $\frac{2}{3}\left[x^{3/2} + (x-1)^{3/2}\right]$

অনুশীলনী ৪.৩

1. $(i)\ \frac{1}{3}\ \sin x^3$ $(ii)\ \frac{a^{x^3}}{3\log_e a}$ $(iii)\ -\frac{1}{2}\ \cos x^2$

2. $(i)\ -\frac{1}{4}\ \cos^4 x$ $(ii)\ \frac{1}{4}\ \tan^4 x$

3. $(i)\ \frac{1}{3}(\log x)^3$ $(ii)\ \log(1+\log x)$ $(iii)\ -\log\{\log(\cos x)\}$

   $(iv)\ -\log(1+\cos x)$ $(v)\ \log(1+e^x)$ $(vi)\ \log(e^x+e^{-x})$

4. $\frac{1}{2}\ \log\tan\frac{x}{4}$

5. $-\log(1+e^{-x})$

6. $\sin(\sin x)$

7. $\cos\frac{1}{x}$

8. $2\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

9. (i) $\log(1+\sin^{-1}x)$ (ii) $2\sqrt{\tan^{-1}x+3}$ (iii) $\log\sec(\sin^{-1}x)$

   (iv) $\sin(\tan^{-1}x)$ (v) $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x^2)^2$

অনুশীলনী– ৪.৪

1. $\frac{1}{6}\ \tan^{-1}\frac{3x}{2}$

2. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}$

3. $\frac{1}{3}\ \tan^{-1}x^3$

4. $\sin^{-1}\frac{x}{5}$

5. $(i)\ \frac{1}{7oa}\ \log\frac{5a+7x}{5a-7x}$ $(ii)\ \frac{1}{20}\ \log\frac{5x-2}{5x+2}$

6. $(i)\ \tan^{-1}(x+2)$ $(ii)\ \frac{2}{\sqrt{3}}\ \tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

অনুশীলনী– ৪.৫

1. $\frac{1}{4}\ \log\frac{x-2}{x+2}$

2. $2\log(x-2)-\log(x-1)$

3. $x+2\log\frac{x-4}{x+4}$

4. $\frac{1}{8}\ \log(x+1)-\frac{1}{4}\ \log(x+3)+\frac{1}{8}\ \log(x+5)$

5. $2\log(x-3)-\log(x-2)$

6. $\log(x-1)+\tan^{-1}x$

7. $\frac{1}{13}\ \log(x+3)-\frac{1}{26}\ \log(x^2+4)+\frac{3}{26}\ \tan^{-1}\frac{x}{2}$

8. $\frac{x^2}{2}+\frac{11}{9}\ \log(x-1)-\frac{1}{3}(x-1)\ +\frac{16}{9}\ \log(x+2)$

9. $\log x-\log(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)\ +\frac{1}{2}\ \tan^{-1}x$

10. $\frac{11}{9}\ \log(x+1)+\frac{1}{3}(x+1)\ +\frac{7}{9}\ \log(x-2)$

অনুশীলনী ৪.৬

1. $x \log x - x$
2. $\log x\,[\log(\log x) - 1]$
3. $x\sin x + \cos x$
4. $-(x+1)e^{-x}$
5. (i) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x$ (ii) $\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x$
6. (i) $x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$ (ii) $\frac{1}{4}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}x\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$ (iii) $x\tan x^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$
7. (i) $\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$ (ii) $\frac{1}{5}e^{x}(\sin 2x - 2\cos 2x)$ (iii) $\frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x + \sin x)$
8. (i) $e^x\sin x$ (ii) $\frac{e^{-x}}{x}$ (iii) $e^x\log x$
9. $\frac{1}{2}x\sin x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}x\sin 3x - \frac{1}{38}\cos 3x$