ইউনিট ৫

নির্দিষ্ট যোগজ ও তার প্রয়োগ

ভূমিকা

পূর্ববর্তী ইউনিটে আপনারা অনির্দিষ্ট যোগজের ধারণা লাভ করেছেন। এই ইউনিটে আপনারা নির্দিষ্ট যোগজ কি এবং কিভাবে তার প্রয়োগ করতে হয় সে সম্পর্কে বিস্তারিত ধারণা লাভ করবেন। নির্দিষ্ট যোগজের সাহায্যে কোন সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। নির্দিষ্ট যোগজ প্রয়োগ করে বক্ররেখার দৈর্ঘ্য, বক্ররেখা দ্বারা বেষ্টিত স্থানের ক্ষেত্রফল, কোন বস্তুর আয়তন ইত্যাদি নির্ণয় করা সম্ভব।

উদ্দেশ্য ঃ এই ইউনিট শেষে আপনি–

- নির্দিষ্ট যোগজের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবনে;
- দুটি বক্ররেখার মধ্যবর্তী ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।

পাঠ-১
নির্দিষ্ট যোগজের ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- নির্দিষ্ট যোগজের ধারনা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- কেন নির্দিষ্ট যোগজ বলা হয় তা বলতে পারবেন।

নির্দিষ্ট যোগজ

জ্যামিতিক প্রয়োজনে এবং যোগজ নির্ণয় প্রক্রিয়ার প্রয়োগকালে অনেক সময় স্বাধীন চলকের দুটি মানের জন্য একটি ফাংশনের যোগজের পার্থক্য নির্ণয়ের প্রয়োজন হয়। ধরুন x কে পরিবর্তনশীল করে অর্থাৎ x এর সাপেক্ষে একটি ফাংশন $\partial(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোজিত ফল $F(x)$ এবং ধরুন স্বাধীন চলক x এর দুটি নির্দিষ্ট মান $x=a$ এবং $x=b$। তাহলে x এর মান a হতে b তে পরিবর্তনের ফলে ফাংশন $F(x)$ এর মানের যে পরিবর্তন হয় তাকে অর্থাৎ $F(b)-F(a)$ কে a ও b সীমার মধ্যে $\partial(x)$ এর নির্দিষ্ট যোগজ (Definite Integral) বলে এবং তাকে $\int_a^b \partial(x)\,dx$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

অর্থাৎ $\int_a^b \partial(x)dx = [F(x)]_C^b = F(b) - F(a)$

এখানে a কে নিম্নসীমা (Lower or inferior limit) এবং b কে উর্ধ্বসীমা (Upper or Superior Limit) বলা হয়।

নির্দিষ্ট যোগজ বলা হয় কেন?

যদি $\partial(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ $F(x)+C$ হয় তবে

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \partial(x)\,dx &= [F(x)+C]_a^b \\
&= \{F(b)+C\} - \{F(a)+C\} \\
&= F(b)+C-F(a)-C \\
&= F(b)-F(a)
\end{aligned}
$$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, অনির্দিষ্ট যোগজের মতো নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের সময় কোন ধ্রুবক পদ C যোগ করার প্রয়োজন হয় না। নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ে C অপসারিত হয়। সুতরাং $\int_a^b \partial(x)dx = F(b)-F(a)$ নির্দিষ্ট বলে একে নির্দিষ্ট যোগজ নামকরণ করা হয়।

x কে পরিবর্তনশীল করে অর্থাৎ x এর সাপেক্ষে একটি ফাংশন $\partial(x)$ এর অনির্দিষ্ট যোজিত ফল $F(x)$ এবং ধরুন স্বাধীন চলক x এর দুটি নির্দিষ্ট মান $x=a$ এবং $x=b$। তাহলে x এর মান a হতে b তে পরিবর্তনের ফলে ফাংশন $F(x)$ এর মানের যে পরিবর্তন হয় তাকে অর্থাৎ $F(b)-F(a)$ কে a ও b সীমার মধ্যে $\partial(x)$ এর নির্দিষ্ট যোগজ বলে এবং তাকে $\int_a^b \partial(x)\, dx$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

অর্থাৎ $\int_a^b \partial(x)dx = [F(x)]_c^b = F(b) - F(a)$

এখানে a কে নিম্নসীমা এবং b কে উর্ধ্বসীমা বলা হয়।

পাঠ-২
নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- কতগুলো প্রয়োজনীয় সূত্র সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের পদ্ধতি

নির্দিষ্ট যোগজ অর্থাৎ $\int_a^b \partial(x)dx$ এর মান নির্ণয় করতে হলে নিম্নলিখিতভাবে কার্যপদ্ধতি সম্পন্ন করতে হবে।

(i) প্রথমে $\int f(x)dx$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে হবে এবং ধরুন তা $F(x)$

(ii) $F(x)$–ফাংশনে x এর পরিবর্তে উর্ধ্বসীমা b বসান অর্থাৎ $F(b)$ নির্ণয় করুন।

(iii) $F(x)$ ফাংশনে x এর পরিবর্তে নিম্নসীমা a বসান অর্থাৎ $F(a)$ নির্ণয় করুন।

(iv) $F(b)$ হতে $F(a)$ বিয়োগ করুন অর্থাৎ $F(b)–F(a)$ এর মানই হল $\int \partial(x)dx$ এর নির্দিষ্ট যোগজ।

কয়েকটি প্রযোজনীয় সূত্র

(i) $\int_a^b [\partial(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b \partial(x)dx \pm \int_c^b g(x)dx$

(ii) $\int_a^b k\partial(x)dx = k\int_a^b \partial(x)dx$, যেখানে k ধ্রুবক।

উদাহরণ 1 ঃ মান নির্ণয় করুন– $\int_0^1 5x^9dx$

সমাধান ঃ $\int_0^1 5x^9dx$

$$= 5\int_0^1 x^9dx = 5\left[\frac{x^{10}}{10}\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{10}\left[x^{10}\right]_0^1 = \frac{5}{10}\left[1^{10} - 0^{10}\right]$$

$$= \frac{5}{10} * 1 = \frac{1}{2}$$

উদাহরণ 2 ঃ মান নির্ণয় করুন– $\int_{-1}^{-2}(2+3y+5y^2)\,dy$

সমাধান ঃ $\int_{-1}^{-2}(2+3y+5y^2)\,dy$

$= 2\int_{-1}^{-2} dy + 2\int_{-1}^{-2} y\,dy + 5\int_{-1}^{-2} y^2\,dy$

$= 2[y]_{-1}^{-2} + 3\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{-2} + 5\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{-2}$

$= 2[y]_{-1}^{-2} + \frac{3}{2}[y^2]_{-1}^{-2} + \frac{5}{3}[y^3]_{-1}^{-2}$

$= 2[(-2)-(-1)] + \frac{3}{2}[(-2)^2-(-1)^2] + \frac{5}{3}[-(2)^3-(-1)^3]$

$= 2(-2+1) + \frac{3}{2}(4-1) + \frac{5}{3}(-8+1)$

$= -2 + \frac{3}{2} * 3 + \frac{5}{3}(-7)$

$= -2 + \frac{9}{2} - \frac{35}{3}$

$= \frac{-12+27-70}{6}$

$= \frac{-55}{6}$

উদাহরণ 3 ঃ মান নির্ণয় করুন– $\int_{0}^{\pi/2}(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta$

সমাধান ঃ $\int_{0}^{\pi/2}(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$

$= [-\cos\theta]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + [\sin\theta]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0] + [\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0]$

$= -[0-1] + [1-0]$

$= 1+1 = 2$

উদাহরণ 4 ঃ মান নির্ণয় করুন– $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$

সমাধান ঃ $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$

ধরুন, $\frac{x}{2} = z \quad \therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{d}{dx}(z)$

$$or, \frac{1}{2} = \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore dx = 2dz$$

যখন $x = 0$ তখন $z = 0$

এবং যখন $x=2$ তখন $z = \frac{2}{2} = 1$

সুতরাং $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^1 e^z.2dz$

$$= 2\int_0^1 e^z dz$$

$$= 2[e^z]_o^1$$

$$= 2[e^1 - e^0] = 2(e-1)$$

উদাহরণ 5 ঃ মান নির্ণয় করুন– $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos 3x\,dx$$

$$= \frac{3}{4}[\sin x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) + \frac{1}{12}\left[\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0\right]$$

$$= \frac{3}{4}[1-0] + \frac{1}{12}[-1-0]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{9-1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

উদাহরণ 6 ঃ $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$

ধরুন $1+2x = z$

$$\therefore \frac{d}{dx}(1+2x) = \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore z = \frac{dz}{dx} \quad \therefore dx = \frac{dz}{2}$$

যখন $x = 0$ তখন $z = 1+2.0 = 1$

যখন $x = 1$ তখন $z = 1+2 = 3$

সুতরাং $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = \int_1^3 \frac{dz}{2.z}$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2}\,[\log z]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\,[\log 3 - \log 1]$$

$$= \frac{1}{2}(\log 3 - 0)$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 = \log\sqrt{3}$$

উদাহরণ 7 ঃ $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x \, dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cos x \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\sin 2x \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin 3x + \sin x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 3x\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\,[-\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{6}\,[\cos 3x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\,[\cos x]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right] - \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\,[0-1] - \frac{1}{2}\,[0-1]$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1+3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

উদাহরণ ৪ ঃ $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}(2\cos^2 x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\,(1+\cos 2x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\,(1+2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^{\pi/2} 1.dx + 2\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} dx + \frac{2}{4}\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\,[x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} dx + \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \cos 4x dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] + \frac{1}{4}\left[\sin\pi - \sin 0\right] + \frac{1}{8}\,[x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\,[0-0] + \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] + \frac{1}{32}\,[\sin 2\pi - \sin 0]$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\,[0-0]$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$$

$$= \frac{3\pi}{16}$$

উদাহরণ 9 ঃ $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

ধরুন, $x = a\sin\theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(a\sin\theta) = a\cos\theta$$

$$\therefore dx = a\cos\theta\, d\theta$$

যখন $x = 0$ তখন $a\sin\theta = 0 = \sin 0$

$$\therefore \sin\theta = \sin 0 \quad \therefore \theta = 0$$

যখন $x = a$ তখন $a\sin\theta = a \quad \therefore \sin\theta = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2}$$

উদাহরণ 10 ঃ $\int_0^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int_0^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2}$ ধরুন, $1+\log x = z$

$$\therefore \frac{d}{dx}(1+\log x) = \frac{dz}{dx}$$

বা, $$\frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{dz}{dx}$$

বা, $$0+\frac{1}{x} = \frac{dz}{dx} \quad \frac{dx}{x} = dz$$

যখন $x=0$ তখন $z = 1+\log 0 = 1+0 = 1$

যখন $x=e^2$ তখন $z = 1+\log e^2 = 1+2\log e = 1+2 = 3$

সুতরাং $$\int_0^{e^2} \frac{dx}{x(1+\log x)^2}$$

$$= \int_1^3 \frac{dz}{z^2} = \int_1^3 z^{-2}dz$$

$$= \left[\frac{-z^{-1}}{1}\right]_1^3 = -\left[3^{-1} - 1^{-1}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{3} - 1\right] = -\left[-\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}$$

অনুশীলনী– ৫.১

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\log x}{x}\, dx$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\cos^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x\, dx$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 2x \cos 3x\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{dx}{x^2+a^2}$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x\, dx$

12. $\displaystyle\int_0^{1} x\, e^{x^2}\, dx$

13. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + \cos x)^2 dx$

14. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

পাঠ-৩
সখন্ড যোগজ পদ্ধতিতে নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সখন্ড যোগজ পদ্ধতিতে নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

সখন্ড যোগজ পদ্ধতিতে নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়

পূর্ববর্তী ইউনিটে আপনারা সখন্ড যোগজ পদ্ধতিতে অনির্দিষ্ট যোজিত ফল নির্ণয় করতে শিখেছেন। সখন্ড যোগজ পদ্ধতিতে নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে প্রথমে অনির্দিষ্ট যোজিত ফল নির্ণয় করুন। তারপর সীমার মান বসিয়ে নির্দিষ্ট যোজিত ফল নির্ণয় করুন। কারণ সখন্ড যোগজ পদ্ধতিতে সীমার অবস্থান সঠিকভাবে সংযোজন অসুবিধাজনক।

উদাহরণ 1 ঃ $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x^2 \cos 2x \, dx$

$$= x^2 \int \cos 2x \, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x^2) \int \cos 2x \, dx\right\} dx$$

$$= x^2 \frac{\sin 2x}{2} - \int 2x . \frac{\sin 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x - \int x \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x - \left[x \int \sin 2x \, dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x) \int \sin 2x \, dx\right\} dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x - \left[x \frac{-\cos 2x}{2} - \int -\frac{\cos 2x}{2} \, dx\right]$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} . \frac{\sin 2x}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos 2x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \left\{\frac{\pi^2}{2}\sin 2\pi + \frac{\pi}{2}\cos 2\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right\} - \left\{-\frac{\pi^2}{2}\sin 2(-\pi) - \frac{\pi}{2}\cos(-2\pi) - \frac{1}{4}\sin(-2\pi)\right\}$$

$$= \left\{0 + \frac{\pi}{2} - 0\right\} - \left\{0 - \frac{\pi}{2} - 0\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

উদাহরণ 2 ঃ $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\, dx$

সমাধান ঃ $\int \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\, dx$

$$= \tan^{-1}(\sqrt{x}) \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}(\sqrt{x})\right)\int dx\right\} dx$$

$$= x\tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) - \int \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, x\, dx$$

$$= x\tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) - \int \frac{1+x-1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= x\tan^{-1}(\sqrt{x}) - \int\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= x\tan^{-1}(\sqrt{x}) - \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx + \int \frac{1}{(1+x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$$= x\tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} + \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= (x+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x}$$

$$\therefore \int_0^1 \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\, dx$$

$$= \left[(x+1)\tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x}\right]_0^1$$

$$= \{(1+1)\tan^{-1}1 - 1\} - \{(0+1)\tan^{-1}0 - 0\}$$

$$= 2.\frac{\pi}{4} - 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

উদাহরণ 3 ঃ $\int_0^1 xe^{-3x}\, dx$–এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int xe^{-3x}\, dx$

$$= x\int e^{-3x}\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^{-3x}\, dx\right\} dx$$

$$= x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int 1.\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{3}\ xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\ xe^{-3x} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\ xe^{-3x} - \frac{1}{9}\ e^{-3x}$$

$$= -e^{-3x}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

$$\therefore \int_0^1 xe^{-3x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-3x}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)\right]_0^1$$

$$= -\left[e^{-3.1}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) - e^{-3.0}\left(\frac{0}{3} + \frac{1}{9}\right)\right]$$

$$= -\left[e^{-3}.\frac{4}{9} - 1.\frac{1}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\ [1 - 4e^{-3}]$$

উদাহরণ 4 ঃ $\int_{e^2}^{e^3} \log x\,dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int \log x\,dx$

$$= \log x \int dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int dx\right\} dx$$

$$= \log x.x - \int \frac{1}{x}\ .\ x\,dx$$

$$= x\log x - \int dx$$

$$= x\log x - x$$

$$\therefore \int_{e^2}^{e^3} \log x\,dx$$

$$= [x\log x - x]_{e^2}^{e^3}$$

$$= (e^3.\ \log e^3 - e^3) - (e^2\log e^2 - e^2)$$

$$= (e^3.\ 3\log e - e^3) - (e^2.\ 2\log e - e^2)$$

$$= (3e^3 - e^3) - (2e^2 - e^2)$$

$$= 2e^3 - e^2$$

উদাহরণ 5 ঃ $\int_1^{\sqrt{e}} x \log x \, dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\int x \log x \, dx$

$$= \log x \int x\,dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\log x) \int x dx\right\} dx$$

$$= \log x . \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} . \frac{x^2}{2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} . \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$$

$$\therefore \int_1^{\sqrt{e}} x \log x \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \left\{\frac{(\sqrt{e})^2}{2} \log(\sqrt{e}) - \frac{(\sqrt{e})^2}{4}\right\} - \left\{\frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{4}\right\}$$

$$= \left(\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2} \log e - \frac{e}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{e}{4}\right) + \frac{1}{4} = \left(\frac{e}{4} - \frac{e}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

$$= 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

অনুশীলনী– ৫.২

মান নির্ণয় করুন

1. $\int_1^{\sqrt{e}} x \tan^{-1} x \, dx$
2. $\int_0^1 x e^x \, dx$
3. $\int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx$
4. $\int_0^e \log x \, dx$
5. $\int_1^e x \log x \, dx$
6. $\int_1^4 \log x \, dx$
7. $\int_0^\pi x \sin^2 x \, dx$
8. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x \, dx$
9. $\int_0^{\pi/2} e^x (\sin x + \cos x) dx$

পাঠ-৪
নির্দিষ্ট যোগজের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

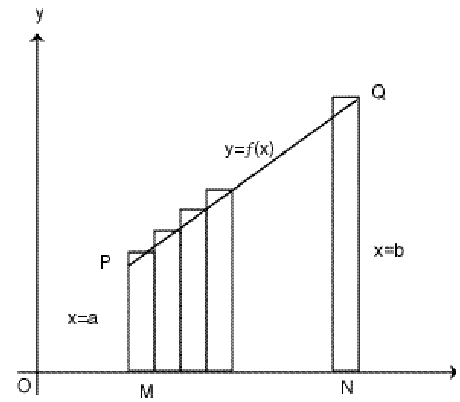
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- নির্দিষ্ট যোগজ হিসাবে কোন রেখা x অক্ষ এবং দুটি কোটির দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- দুটি বক্ররেখার মধ্যবর্তী ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।

সমতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

ধরুন $y = \partial(x)$ ফাংশনটি $a \le x \le b$ ব্যবধিতে সসীম, অবচ্ছিন্ন, এমমানবিশিষ্ট এবং ক্রমান্বয়ে ক্রমবর্ধমান এবং PQ বক্ররেখা $a \le x \le b$ ব্যবধিতে $y=\partial(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র নির্দেশ করে। ধরুন M ও N যথাক্রমে $x=a$ ও $x=b$ বিন্দুদ্বয়কে সূচিত করে। তাহলে $OM=a$, $ON=b$ এবং $MN = b-a$। এখন M ও N বিন্দুতে কোটিদ্বয় যথাক্রমে PM ও QN হলে $PM=\partial(a)$ এবং $QN=\partial(b)$। এখন PQ রেখাংশকে প্রত্যেকটি h দৈর্ঘ্যের $a, a+h, a+2h, a+3h......$ $a+(n-1)h, a+nh$ বিন্দুগুলো দ্বারা x সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করুন।



চিত্র: ৫.৪.১

তাহলে $a+nh=b$ বা $nh=b-a$ হবে। এখন $a+h, a+2h,..... a+(n-1)h$ বিন্দুগুলোতে কোটি অংকন করুন এবং পরপর অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ আয়তক্ষেত্রগুলো সম্পূর্ণ করুন।

ধরুন $y = \partial(x)$ লেখচিত্র, $x=a, x=b$ রেখাদ্বয় এবং x অক্ষদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল s এবং অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ আয়তক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি যথাক্রমে s_1 ও s_2 দ্বারা সূচিত হয়। তাহলে চিত্র হতে সহজেই বুঝা যায়–

$s_1 < s < s_2$

আবার, $s_1 = h\partial(a) + h\partial(a+h) + ... + h\partial\{a+(n-1)h\}$

$$= h \, {}^{n-1}_{r=0} \, \partial(a+rh)$$

আবার $s_2 = h\partial(a+h) + h\partial(a+2h) + ... + h\partial(a+nh)$

$$= h\partial(a) + h\partial(a+h) + ... + h\partial\{a+(n-1)h\} + h\partial(b) - h\partial(a)$$

$$[\because a+nh=b]$$

$$= h \sum_{r=0}^{n-1} \partial(a+rh) + h\partial(b) - h\partial(a)$$

যেহেতু a ও b সসীম, $nh=b-a$ বা $h = \frac{b-a}{n}$ সুতরাং $x\varnothing\Box$ হলে $h\varnothing 0$ হবে। আবার $\partial(a)$ ও $\partial(b)$ উভয়ই নির্দিষ্ট সসীম রাশি অতএব $h\varnothing 0$ হলে $h\partial(a)\varnothing 0$ এবং $h\partial(b)\varnothing 0$ হবে।

সুতরাং $\underset{h \varnothing 0}{Lt}\ s_2 = \underset{h \varnothing 0}{Lt} \left[h \sum_{r=0}^{n-1} \partial(a+rh) + h\partial(b) - h\partial(a) \right]$

$$= \underset{h \varnothing 0}{Lt}\ h \sum_{r=0}^{n-1} \partial(a+rh) + \underset{h \varnothing 0}{Lt}\ h\,[\partial(b) - \partial(a)]$$

$$= \underset{h \varnothing 0}{Lt}\ h \sum_{r=0}^{n-1} \partial(a+rh) = \int_a^b \partial(x)\, dx$$

এবং $\underset{h \varnothing 0}{Lt}\ s_1 = \underset{h \varnothing 0}{Lt}\ h \sum_{r=0}^{n-1} \partial(a+rh) = \int_a^b \partial(x)\, dx$

অর্থাৎ যখন $h \varnothing 0$ তখন

$s = \int_a^b \partial(x)\, dx$ এবং $s_2 = \int_a^b \partial(x)\, dx$

কিন্ড়ু $s_1 < s < s_2$

সুতরাং $h \varnothing 0$ হলে $s = \vee_a^b f(x)\, dx$

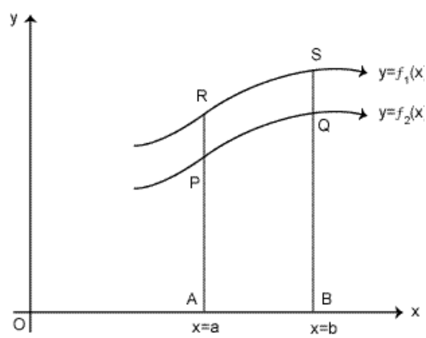
সুতরাং $y = \partial(x)$ বক্ররেখা, x অক্ষ ও $x=a,\ x=b$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_a^b \partial(x)\, dx = \int_a^b y\, dx$$

একইভাবে $x=\partial(y)$ বক্ররেখা y অক্ষ ও $y=c,\ y=d$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল $= \int_c^d \partial(y)\, dy = \int_c^d x\, dy$

দুটি বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

ধরুন $y = \partial_1(x)$ এবং $y = \partial 2(x)$ বক্ররেখা দুইটি এবং $x=a$ ও $x=b$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র ৫.৪.২

ধরুন $A(a.0)$ এবং $B(b.0)$ প্রদত্ত দুটি বিন্দু এবং $x=a,\ x=b$ রেখাদ্বয় $y= \partial_2(x)$ বক্ররেখাকে P ও Q বিন্দুতে এবং $y= \partial_1(x)$ বক্ররেখাকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং $PQRS$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

এখন $PQRS$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ($ABSR$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল – $ABQP$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল)

$$= \int_a^b \partial_1(x)\,dx - \int_a^b \partial_2(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \{\partial_1(x) - \partial_2(x)\}\,dx$$

$$= \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$$

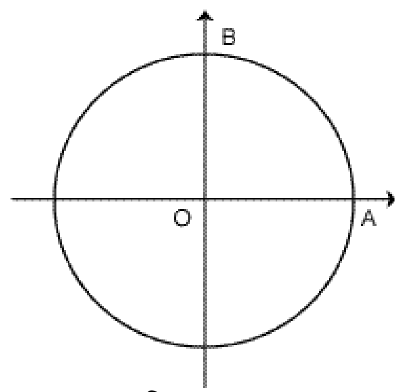
এখানে y_1 ও y_2 যথাক্রমে RS ও PQ বক্ররেখাদ্বয়ের কোটি নির্দেশ করে।

বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

ধরুন বৃত্তটির সমীকরণ

$x^2+y^2 = a^2$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ a। এরূপ বৃত্ত অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে প্রতিসম। সুতরাং বৃত্তের ক্ষেত্রফল তার যে কোন চতুর্ভাগ OAB অংশের ক্ষেত্রফলের চারগুণ। এখানে ধনাত্মক x অক্ষ, ধনাত্মক y অক্ষ এবং AB বৃত্তাংশ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রই AOB চতুর্ভাগ।



চিত্র ৫.৪.৩

সুতরাং OAB অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_{x=0}^{x=a} y\,dx.$

বৃত্তের সমীকরণ হতে পাই $y = \sqrt{a^2-x^2}$

$\therefore$ OAB অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_o^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

ধরুন $x = a\sin\theta$

$\therefore dx = a\cos\theta\,d\theta$

যখন $x = 0$ তখন $\theta = \sin 0 = 0$

যখন $x = a$ তখন $\theta = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ OAB অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\ .\ a\cos\theta\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\ .\ a\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\theta}\ .\ a\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} a\cos\theta .\, a\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(0+\frac{\sin 0}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - (0+0)\right\}$$

$$= \frac{a^2}{2} * \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

$\therefore$ সম্পূর্ণ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 * \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^2$

উদাহরণ 1ঃ $y=x^2$, x অক্ষ এবং $x=1$ ও $x=3$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে $y = \partial(x) = x^2$

এবং x এর সীমা 1 হতে 3

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_1^3 y\, dx$

$$= \int_1^3 \partial(x)\, dx = \int_1^3 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] = \left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \left[9 - \frac{1}{3}\right] = \frac{26}{3}$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\frac{26}{3}$ বর্গ একক।

উদাহরণ 2 ঃ $xy = c^2$ পরাবৃত্ত x অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $xy = c^2$

$$\therefore y = \frac{c^2}{x}$$

এখানে $y = \partial(x) = \frac{c^2}{x}$ এবং x এর সীমা a হতে b

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_a^b y\, dx$

$$= \int_a^b \partial(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{c^2}{x}\, dx$$

$$= c^2 \int_a^b \frac{dx}{x}$$

$$= c^2 [\log x]_a^b$$

$$= c^2 [\log b - \log a]$$

$$= c^2 \log \frac{b}{a}$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $c^2 \log\frac{b}{a}$ বর্গএকক ।

উদাহরণ 3 ঃ $y^2=8x$ পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

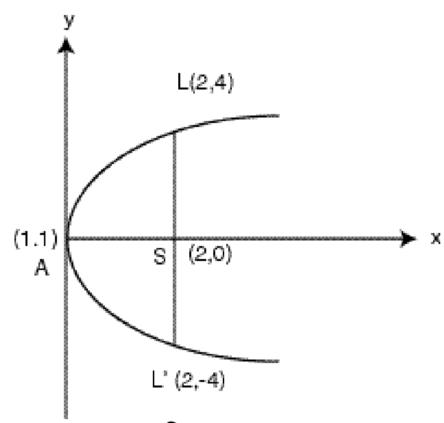
সমাধান ঃ $y^2=8x$ কে $y^2=4ax$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই

$4ax = 8x$ বা $a=2$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x=2$ এখন $y^2=8x$ সমীকরণে $x=2$ বসিয়ে পাই $y^2=8*2=16$

$\therefore\ y = \pm 4$

সুতরাং $y^2=8x$ ও $x=2$ এর ছেদবিন্দু $L=(2,4)$ ও $L'(2,-4)$। এখানে সীমা $x=0,\ x=2$



চিত্র: ৫.৪.৪

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^2 y\, dx$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{8x}\ dx = 2\int_0^2 2\sqrt{2}\sqrt{x}\ dx$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{x}\ dx = 4\sqrt{2}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^2$$

$$= 4\sqrt{2} * \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^2$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\left[2^{3/2} - 0^{3/2}\right]$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3} * 2\sqrt{2} = \frac{32}{3}$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\frac{32}{3}$ বর্গ একক।

উদাহরণ 4 ঃ $x^2+y^2=2ax$ এবং $y^2=ax$ বক্ররেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $x^2+y^2=2ax$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a,0)$ এবং ব্যাসার্ধ a.

$y^2=ax$ পরাবৃত্তের শীর্ষ $(0,0)$ এবং অক্ষরেখা x অক্ষ।

প্রদত্ত বক্ররেখার যে অংশ $x=0$, $x=a$ কোটিদ্বয়ের মধ্যে আবদ্ধ

তার ক্ষেত্রফল $\int_0^a (y_1-y_2)\, dx$

$$= \int_0^a \left(\sqrt{2ax-x^2} - \sqrt{ax}\right) dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{\{a^2-(x-a)^2\}}\, dx - \int_0^a \sqrt{ax}\, dx$$

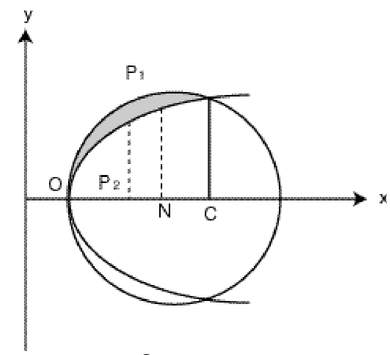
$$= \left[\frac{(x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a}\right]_0^a - \frac{2}{3}\sqrt{a}\left[x^{3/2}\right]_0^a$$

$$= \left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(-1)\right] - \frac{2}{3}\sqrt{a}\left(a^{2/3} - 0\right)$$

$$= \left[0 - \frac{a^2}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{2}{3}\sqrt{a}\,.\,a^{3/2}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} - \frac{2}{3}a^2$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$$



চিত্র: ৫.৪.৫

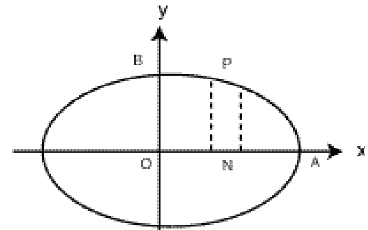
যেহেতু বৃত্ত ও পরাবৃত্ত উভয়ই অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম, সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল–

$$= 2*a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right)$$ বর্গ একক।

উদাহরণ 5 ঃ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ধনাত্মক বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষ দ্বারা বেষ্টিত চৌকণের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন এবং তা হতে সমগ্র উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটির কেন্দ্র $(0,0)$ এবং বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$। সুতরাং A ও B বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $A(a, 0)$ ও $B\,(0, b)$



চিত্রঃ ৫.৪.৬

সুতরাং OAB চৌকণের ক্ষেত্রফল = উপবৃত্ত এবং y অক্ষ $(x=0)$ ও $x=a$ রেখা দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^a y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac{b}{a}\left(\frac{\pi a^2}{4}\right)$$

$= \frac{\pi ab}{4}$ বর্গ একক।

যেহেতু উপবৃত্তটি তার অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম, সুতরাং সমগ্র উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $4*$ OAB চৌকণের অংশের ক্ষেত্রফল = $4 * \frac{\pi ab}{4} = \pi ab$ বর্গ একক।

অনুশীলনী– ৫.৩

1. (*i*) $y=\sin x$ বক্ররেখা, x অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\pi$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
   (*ii*) $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ বক্ররেখা, x অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=a$ রেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
2. $y^2=4x$ হতে $y=2x$ রেখা দ্বারা কর্তৃত অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
3. দেখান যে, $y^2=4x$ পরাবৃত্ত এবং $y=2x-4$ সরলরেখার অর্ন্তর্গত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল 9 বর্গএকক।
4. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের যে অংশ $x=\frac{a}{2}$ রেখাংশ দ্বারা খন্ডিত তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
5. $y^2=4ax$ পরাবৃত্ত এবং এর নাভিলম্ব দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
6. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$ উপবৃত্তের একটি চৌকণের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন এবং তা হতে সমগ্র উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
7. দেখান যে, $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ বক্ররেখাদ্বয়ের সাধারণ অংশের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}\ a^2$.

উত্তরমালা

অনুশীলনী ৫.১

1. $\frac{5}{6}$ 2. $\frac{28}{3}$ 4. 1 5. $\frac{1}{2}(\log 2)^2+\log 2)$ 6. $\frac{\pi^3}{24}$

7. $\frac{\pi}{4}$ 8. $\frac{2}{3}$ 9. $\frac{2}{8}$ 10. $\frac{3}{5}$ 11. $\frac{\pi}{4a}$ 13. $\frac{1}{2}(e-1)$

14. $\frac{\pi^2}{8}$ 16. $\frac{\pi^2}{6}$

অনুশীলনী ৫.২

1. $\frac{1}{12}(5\pi - 6\sqrt{3} + 6)$ 2. 1 3. $1 - \frac{2}{e}$ 4. 1

5. $\frac{1}{4}(e^2+1)$ 6. $(8\log 2-3)$ 7. $\frac{\pi^2}{4}$

8. $\frac{4}{25}\left(e^{3\pi/4}+1\right)$ 9. $e^{\pi/2}$

অনুশীলনী ৫.৩

1. (i) 2 বর্গ একক (ii) $c^2\sin\pi\,(\frac{a}{c})$ 2. $\frac{1}{3}$ বর্গ একক

4. $\frac{a^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$ বর্গ একক। 5. $\frac{8a^2}{3}$ 6. $\frac{35\pi}{4}$, 35π