ইউনিট ৭

সমবিন্দু বল

ভূমিকা

এই ইউনিটে সমবিন্দু বল এবং সমবিন্দু বলের সাম্যাবস্থা সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এটি করতে গিয়ে বিভিন্ন পাঠে উপপাদ্যগুলোকে খুবই সুশৃঙ্খলভাবে বিন্যস্ত করা ছাড়াও সহজভাবে সমস্যা সমাধানকল্পে কিছু গুরুত্বপূর্ণ অনুসিদ্ধান্ত সন্নিবেশিত করা হয়েছে। ইউনিট-৬ এ ভেক্টর বিষয়ের উপর বিশেষ জোর দেয়া হয়েছে। সেদিকে লক্ষ রেখে এখানেও কিছু কিছু উপপাদ্য প্রমাণে এবং সমস্যা সমাধানে ভেক্টর পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়েছে যাতে শিক্ষার্থীরা ভেক্টর প্রয়োগে পরিষ্কার ধারণা ও দক্ষতা অর্জন করতে পারে। প্রতিটি পাঠে একই ধরনের সমস্যাগুলোকে একসাথে রাখা হয়েছে এবং বিশেষ সতর্কতার সাথে প্রতিটি পাঠে গুরুত্বপূর্ণ ও নির্দেশাত্মক প্রচুর সমস্যা বিশদভাবে উদাহরণমালায় সমাধান করে দেয়া হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি

- সমবিন্দু বলের ধারণা দিতে পারবেন;
- লব্ধি বল সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করতে পারবেন;
- বল সংযোজন ও বিশ্লেষণ সম্বন্ধে জানতে পারবেন;
- দুটি বলের অংশক ও লম্বাংশক সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- কোন কণাতে ক্রিয়াশীল দুটি বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন এবং সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগ করার দক্ষতা অর্জন করবেন;
- লম্বাংশকের সাহায্যে কোন কণাতে ক্রিয়াশীল সমতলীয় বলজোটের লব্ধি নির্ণয় করার দক্ষতা অর্জন করবেন;
- কোন কণাতে ক্রিয়াশীল বলজোটের সাম্যাবস্থা কি তা বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- কোন কণাতে ক্রিয়াশীল সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থায় প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন;
- কোন কণাতে ক্রিয়াশীল তিনটি বলের সাম্যাবস্থার ত্রিভুজ সূত্র ও তার বিপরীত সূত্র, লামির সূত্র ও তার বিপরীত সূত্রের বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন এবং সমস্যা সমাধানে সেগুলো প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

পাঠ-১
দুটি বলের লব্ধি নির্ণয়

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সমবিন্দু বলের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন;
- লব্ধি বল সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করতে পারবেন;
- বল সংযোজন পদ্ধতি সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- সামান্তরিক সূত্র প্রয়োগ করে দুটি বলের মান ও লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন;
- দুটি বলের লব্ধি নির্ণয় করতে ভেক্টর পদ্ধতি ব্যবহার করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন;
- একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বলের লব্ধি নির্ণয়ে কতগুলো বিশেষ ক্ষেত্র আলোচনা করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

সমবিন্দু বল

দুই বা ততোধিক বল একই বিন্দুতে এক সঙ্গে কোন বস্তুকণার উপর বিভিন্ন দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদেরকে সমবিন্দু বল বলে। তবে একই বিন্দু হতে বলগুলো একই তলে বা বিভিন্ন তলে ক্রিয়াশীল থাকতে পারে। আমরা সাধারণত উল্লেখ না থাকলে বলগুলোকে সমতলীয় ধরে নেব।

চিত্র- i　　　　চিত্র- ii

চিত্র: ৭.১.১

(i) নং চিত্রে সমবিন্দুগামী বলগুলো একতলীয় এবং (ii) নং চিত্রে সমবিন্দু বলগুলো ভিন্ন ভিন্ন তলে অবস্থিত।

দুই বা ততোধিক বল একই বিন্দুতে এক সঙ্গে কোন বস্তুকণার উপর বিভিন্ন দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদেরকে সমবিন্দু বল বলে। তবে একই বিন্দু হতে বলগুলো একই তলে বা বিভিন্ন তলে ক্রিয়াশীল থাকতে পারে।

লব্ধি বল

> একই সময়ে দুই বা ততোধিক বল কোন বস্তুকণার উপর বিভিন্ন দিকে ক্রিয়াশীল থাকলে প্রতিটি বল তার নিজের ক্রিয়ারেখা বরাবর কণাটিকে এর অবস্থান পরিবর্তন করতে সচেষ্ট হয়। কিন্তু একই সঙ্গে বস্তুকণাটি প্রতিটি বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর চলতে পারে না। কাজেই প্রদত্ত বলগুলোর মিলিত ফল একটি একক বলে রূপান্তরিত হয়ে কণাটিকে একটি নির্দিষ্ট দিকে সচল করে। ঐ একক বলকে প্রদত্ত বলগুলোর লব্ধি বল বলা হয়। প্রদত্ত বলগুলোর প্রত্যেকটিকে লব্ধি বলের অংশক বলে।

লব্ধি নির্ণয়

কতগুলো বলের লব্ধি নির্ণয় করার পদ্ধতিকে বলা হয় বল সংযোজন। মনে করুন, কোন বস্তুকণার উপর A বিন্দুতে কার্যরত দুটি বল $\overset{\varnothing}{P}$ এবং $\overset{\varnothing}{Q}$ যাদের কার্যরেখা AB, A হতে B এর দিকে। এদের লব্ধির মান $P+Q$ এবং লব্ধির দিক AB বরাবর A হতে B এর দিকে।

চিত্রঃ ৭.১.২

আবার দুটি বল $\overset{\varnothing}{P}$ এবং $\overset{\varnothing}{Q}$ ক্রিয়ারেখা AB, P বলের ক্রিয়ারেখা A হতে B এর দিকে এবং $\overset{\varnothing}{Q}$ বলের ক্রিয়ারেখা B হতে A এর দিক বরাবর। কাজেই দুটি বল পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত। মনে করুন $P>Q$, এক্ষেত্রে লব্ধির মান $P-Q$ এবং লব্ধির দিক AB বরাবর অর্থাৎ A হতে B এর দিকে এদের লব্ধি ক্রিয়াশীল হবে।

চিত্রঃ ৭.১.৩

কাজেই দুটি বল পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধি বলদ্বয়ের বিয়োগফলের সমান এবং লব্ধির ক্রিয়া দিক বৃহত্তর বলটির দিকে হবে। কোন বস্তুকণার উপর দুটি সমান বল বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধি শূন্য হবে এবং এক্ষেত্রে কণাটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

আবার কোন বস্তুর উপর দুটি বল একই বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন দিকে ক্রিয়ারত থাকলে এদের “লব্ধি বলের সামান্তরিক সূত্র” প্রয়োগ করে নির্ণয় করা যায়।

বলের সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram of forces)

কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বলকে যদি একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহুদ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়, তবে ঐ বাহুগুলোর ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা উক্ত বলদ্বয়ের লব্ধির মান ও দিক সূচিত হবে।

মনে করুন, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P ও Q বলদ্বয়ের দিক ও মান OA এবং OB দ্বারা সূচিত হয়েছে। এখন $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন।

তাহলে P ও Q বলের লব্ধি R এর দিক ও মান O বিন্দু হতে অঙ্কিত কর্ণ OC দ্বারা সূচিত হবে।

ভেক্টর সংকেতে প্রকাশ করলে–

$$\overset{\varnothing}{OA} + \overset{\varnothing}{OB} = \overset{\varnothing}{OC}$$

অর্থাৎ $$\overset{\varnothing}{P} + \overset{\varnothing}{Q} = \overset{\varnothing}{R}$$

চিত্র: ৭.১.৪

অনুসিদ্ধান্ত (১) ঃ $\overset{\varnothing}{OA} + \overset{\varnothing}{OB} = \overset{\varnothing}{OC}$

সুতরাং $\overset{\varnothing}{OA} + \overset{\varnothing}{AC} = \overset{\varnothing}{OC}$ [$\because$ $OB \parallel AC$ এবং $OB=AC$]

যা বলসংযোগের ত্রিভুজ সূত্ররূপে পরিচিত।

অনুসিদ্ধান্ত (২) ঃ ত্রিভুজের মধ্যমা সূত্র

$\overset{\varnothing}{OA} + \overset{\varnothing}{OB} = \overset{\varnothing}{OC}$ (সামান্ রিক স ত্র)

$\overset{\varnothing}{OA} + \overset{\varnothing}{OB} = \overset{\varnothing}{OD} + \overset{\varnothing}{DC}$

চিত্র: ৭.১.৫

$\therefore \overset{\varnothing}{OA} + \overset{\varnothing}{OB} = \overset{\varnothing}{2OD}$ [$\because$ $OD=DC$ কারণ সামান্তরিকের কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।]

অনুসিদ্ধান্ত (৩) ঃ অনুসিদ্ধান্ত (১) হতে পাই

$\overset{\varnothing}{OA} + \overset{\varnothing}{AD} = \overset{\varnothing}{OD}$

$m.\overset{\varnothing}{OA} + m.\overset{\varnothing}{AD} = m.\overset{\varnothing}{OD}$ ....(i)

আবার, $\overset{\varnothing}{OB} + \overset{\varnothing}{BD} = \overset{\varnothing}{OD}$

$n.\overset{\varnothing}{OB} + n.\overset{\varnothing}{BD} = n.\overset{\varnothing}{OD}$ ....(ii)

চিত্র: ৭.১.৬

(i) + (ii) হতে পাই–

$m.\overset{\varnothing}{OA} + m.\overset{\varnothing}{AD} + n.\overset{\varnothing}{OB} + n.\overset{\varnothing}{BD} = (m+n).\overset{\varnothing}{OD}$

$\therefore m.\overset{\varnothing}{OA} + n.\overset{\varnothing}{OB} + m.\overset{\varnothing}{AD} + n.\overset{\varnothing}{BD} = (m+n).\overset{\varnothing}{OD}$

***D* বিন্দুটি *AB* কে এমনভাবে বিভক্ত করে যে, $m.\overset{\varnothing}{AD} = n.\overset{\varnothing}{BD}$ অর্থাৎ *D* বিন্দুটি *AB* কে *n : m* অনুপাতে বিভক্ত করে।**

অতএব, $m.\overset{\varnothing}{OA} + n.\overset{\varnothing}{OB} = (m+n)\overset{\varnothing}{OD}$

[$\because m.\overset{\varnothing}{AD} = n.\overset{\varnothing}{BD}$ এবং এরা পরস্পর বিপরীতমুখী বলে একে অপরকে নিষ্ক্রিয় করে।]

যা, (m, n) সূত্র বা অনুপাতিক সূত্র হিসেবে পরিচিত।

সমবিন্দু দুটি বলের লব্ধি নির্ণয়

পদ্ধতি–১

মনে করুন O বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়াশীল দুটি বল P ও Q এর মান ও দিক যথাক্রমে OA ও OB দ্বারা সূচিত হয়েছে। $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন এবং OC যোগ করুন। তাহলে বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OC কর্ণই P ও Q বলের লব্ধি R এর মান ও দিক সূচিত করবে। মনে করুন, R, P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

(i) নং চিত্রে OA এর উপর এবং (ii) নং চিত্রে OA এর বর্ধিতাংশের উপর CD লম্ব অঙ্কন করুন।

চিত্রঃ ৭.১.৭

(i) নং চিত্রে $OC^2 = OD^2 + CD^2$

$$= (OA-AD)^2 + CD^2$$
$$= OA^2 + AD^2 - 2OA.\ AD + CD^2$$
$$= OA^2 + (AD^2+CD^2) - 2.OA.\ AC.\ \cos(\pi-\alpha)$$
$$= OA^2 + AC^2 + 2OA.\ AC\cos\alpha$$
$$\therefore R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$$
$$\therefore R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$$

(ii) নং চিত্রে $OC^2 = OD^2 + CD^2$

$$= (OA+AD)^2 + CD^2$$
$$= OA^2+AD^2+2OA.\ AD+CD^2$$
$$= OA^2+(AD^2+CD^2) + 2OA.AC.\cos\alpha$$
$$= OA^2+AC^2+2OA.AC.\cos\alpha$$
$$\therefore R^2 = P^2+Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$
$$\therefore R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$$

লব্ধি বলের দিক ঃ (i) নং চিত্রে $\tan\theta = \dfrac{CD}{OD} = \dfrac{CD}{OA\text{-}AD} = \dfrac{AC\sin(\pi-\alpha)}{OA\text{-}AC\cos(\pi-\alpha)} = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

(ii) নং চিত্রে $\tan\theta = \dfrac{CD}{OD} = \dfrac{AC\sin\alpha}{OA+AD} = \dfrac{AC\sin\alpha}{OA+AC\cos\alpha}$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

সুতরাং α কোণে আনত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধির মান $R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$

এবং লব্ধি R বলের দিক $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

পদ্ধতি-২

ভেক্টর পদ্ধতি ঃ মনে করুন O বিন্দুতে OA বরাবর P বল এবং OB বরাবর Q বল ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি R এর ক্রিয়ারেখা P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ .... (i)

ডট গুণ বা স্কেলার গুণনের সাহায্যে পাই–

$\vec{R}.\vec{R} = \left(\vec{P} + \vec{Q}\right).\left(\vec{P} + \vec{Q}\right)$

$= \vec{P}.\vec{P} + \vec{P}.\vec{Q} + \vec{Q}.\vec{P} + \vec{Q}.\vec{Q}$

$R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$ .... (ii)

[$\vec{P}.\vec{P} = P^2\cos 0^\circ = P^2$ এবং $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P} = 2PQ\cos\alpha$]

আবার (i) হতে পাই–

$$\vec{P}.\vec{R} = \vec{P}.\vec{P} + \vec{P}.\vec{Q}$$

$$PR\cos\theta = P^2+PQ\cos\alpha$$

$$\therefore\ R\cos\theta = P+Q\cos\alpha \text{ .... (iii)}$$

KY©: 7.1.8

আবার (i) হতে ভেক্টর গুণন ব্যবস্থা করে পাই–

$$\vec{P} * \vec{R} = \vec{P} * \vec{P} + \vec{P} * \vec{Q}$$

$$PR\sin\theta\, \underline{n} = 0 + PQ\sin\alpha\, \underline{n}$$ [P ও Q বলের উপর একক লম্ব ভেক্টর n
]

$$\therefore R\sin\theta = Q\sin\alpha \text{ .... (iv)}$$

(iv) কে (iii) দ্বারা ভাগ করে পাই–

$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

কতগুলো বিশেষ ক্ষেত্র;

(i) যদি দুটি বল P ও Q একই দিকে ক্রিয়াশীল হয় তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 0$ হবে,

$\therefore R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos 0 = P^2+Q^2+2PQ = (P+Q)^2$

$\therefore R \qquad = P+Q$

$\alpha = 0°$ হলে $\cos\alpha = 1$ যেখানে $\cos\alpha$ এর মান বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম লব্ধি $R=P+Q$ যা একই ক্রিয়ারেখা বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

(ii) যদি দুটি বল P ও Q পরস্পর বিপরীতমুখী হয় এবং $P>Q$ হয় তবে $\alpha = 180°$

$\therefore R^2 \qquad = P^2+Q^2+2PQ\cos 180° = P^2+Q^2 - 2PQ = (P-Q)^2$

$\therefore R \qquad = P-Q$

$\alpha = 180°$ হলে $\cos\alpha = \cos 180° = -1$ যা $\cos\alpha$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম লব্ধি $R = P-Q$ যা একই রেখা বরাবর বপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হবে।

(iii) যদি দুটি বল P ও Q পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল হয় তবে $\alpha=90°$

$\therefore R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos 90° = P^2+Q^2$

$\therefore R \qquad = \sqrt{P^2+Q^2}$

(iv) P ও Q বলদ্বয়ের পরস্পর সমান হলে–

$$R^2 = P^2+P^2+2P.P\cos\alpha$$
$$= 2P^2+2P^2\cos\alpha = 2P^2.(1+\cos\alpha)$$
$$= 2P^2.\, 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

এবং R বলের দিক P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে–

$$\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P+P\cos\alpha} = \frac{P\sin\alpha}{P(1+\cos\alpha)}$$

$$= \frac{P.2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}{P.2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{\alpha}{2}$$

সুতরাং একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বল সমান হলে এদের লব্ধি বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করবে।

উদাহরণ 1ঃ ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G। দেখান যে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বলদ্বয়ের লব্ধি $3\overrightarrow{AG}$ ।

সমাধান ঃ

অনুসিদ্ধান্ত (2) অর্থাৎ ত্রিভুজ মধ্যমা সূত্র ব্যবহার করে পাই– $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$

যেহেতু G ভরকেন্দ্র কাজেই $AG = \frac{2}{3}AD$

$\therefore 3AG = 2AD$

চিত্রঃ ৭.১.৯

উদাহরণ 2 ঃ $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ বলগুলো কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। দেখান যে, এদের লব্ধি $2\overrightarrow{AC}$

সমাধান ঃ

ভেক্টর প্রতীকের সাহায্যে বলগুলোর

লব্ধি $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$ [অনুসিদ্ধান্ড় (1) অর্থাৎ ত্রিভুজ সূত্র ব্যবহার করে]

$= 2\overrightarrow{AC}$

চিত্রঃ ৭.১.১০

উদাহরণ 3 ঃ ABC ত্রিভুজের সমতলে অবস্থিত O একটি বিন্দু। D,E,F যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করুন যে, OD, OF এবং EO দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত বল তিনটির লব্ধি OB রেখা দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যাবে।

সমাধান ঃ ভেক্টর প্রতীকের সাহায্যে বলগুলোর লব্ধি

$$= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{EO}$$

$$= \overrightarrow{OF} + \left(\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD}\right)$$

$$= \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{ED} \quad \text{[অনুসিদ্ধান্ত (1) হতে পাই]}$$

চিত্রঃ ৭.১.১১

$= \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB}$ [$\because ED \parallel AB \therefore ED = \frac{1}{2} AB = FB$ কারণ F, AB মধ্যবিন্দু।]

$$= \overrightarrow{OB}$$

উদাহরণ 4 **ঃ** T ও O যথাক্রমে ΔABC এর লম্বকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র। দেখান যে, OA, OB, OC দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত বলগুলোর লব্ধি OT দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়।

সমাধান ঃ

ভেক্টর পদ্ধতি ব্যবহার করে বলগুলোর লব্ধি

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

চিত্রঃ ৭.১.১২

$= 1.\overrightarrow{OA} + 2.\overrightarrow{OD}$ [এখানে D, BC এর মধ্যবিন্দু এবং G ভরকেন্দ্র এবং অনুসিদ্ধান্ত-2 প্রয়োগ করে।]

$= (1+2)\overrightarrow{OG}$ [(m,n) সূত্র অর্থাৎ অনুসিদ্ধান্ত (3) হতে পাই ।]

$$= 3\overrightarrow{OG}$$

$= \overrightarrow{OT}$ [$\because$ ভরকেন্দ্র G, লম্বকেন্দ্র T ও পরিকেন্দ্র O এর সংযোজক রেখা OT কে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$$\therefore 2OG = GT \therefore 2OG + OG = GT + OG \therefore 3OG = OT \text{]}$$

উদাহরণ 5 ঃ 8পাউন্ড ওজন ও 7 পাউন্ড ওজনের দুটি বল একটি বস্তুকণাতে পরস্পর $60°$ কোণে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন লব্ধি R

বলের সামান্তরিক সূত্র ব্যবহার করে পাই

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$

$$= 8^2+7^2+2.8.7.\cos 60^\circ$$

$$= 64+49+2.56.\frac{1}{2}$$

$$= 169 = (13)^2$$

$\therefore R$ $= 13$ পাউন্ড-ওজন।

মনে করুন লব্ধি বল R 8 পাউন্ড-ওজনের বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং লব্ধির দিক

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} = \frac{7.\sin 60^\circ}{8+7\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{7.\frac{\sqrt{3}}{2}}{8+7.\frac{1}{2}} = \frac{7\sqrt{3}*2}{2*23} = \frac{7\sqrt{3}}{23}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{7\sqrt{3}}{23}$$

উদাহরণ 6 ঃ 5পাউন্ড ওজন এবং 12পাউন্ড ওজনের দুটি বলের লব্ধি 13পাউন্ড ওজন হলে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করুন, বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

বা, $(13)^2=5^2+12^2+2.5.12.\cos\alpha$

বা, $169 = 25+144+120\cos\alpha = 169 + 120\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{169 - 169}{120} = 0 = \cos 90^\circ$

$\therefore \alpha = 90^\circ$

অতএব বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 90^\circ$

উদাহরণ 7 ঃ দুটি বলের বৃহত্তম লব্ধি ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান যথাক্রমে F ও G। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে দেখান যে, লব্ধির মান $= \sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

সমাধান ঃ মনে করুন, বলদ্বয় P ও Q যেখানে $P>Q$

$\therefore P+Q = F,$ এবং $P - Q=G$

$\therefore$ লব্ধি R হলে–

$$R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\{(P+Q)^2+(P-Q)^2\} + \frac{1}{2}\{(P+Q)^2-(P-Q)^2\}\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{2}[F^2+G^2+F^2\cos\alpha-G^2\cos\alpha]$$

$$= \frac{1}{2}F^2(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}G^2(1-\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}F^2.\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}G^2.2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore R = \sqrt{F^2\cos^2\frac{\alpha}{2}+G^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

উদাহরণ 8 ঃ সমমানের দুটি বল 2β কোনে ক্রিয়াশীল হলে যে লব্ধি হয়; 2α কোণে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধির মান এর দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ করুন $\cos\alpha = 2\cos\beta$

সমাধান ঃ মনে করুন, দুটি বল P এর সমান এবং এদের লব্ধি R_1 ও মধ্যবর্তী মান 2β

$$\therefore R_1^2 = P^2+P^2+2P^2\cos2\beta$$

$$= 2P^2(1+\cos2\beta) = 4P^2\cos^2\beta$$

$$R_1 = 2P\cos\beta$$

আবার P মানের দুটি বলের লব্ধি R_2 হলে মধ্যবর্তী কোন 2α

$$\therefore R_2^2 = P^2+P^2+2P^2\cos2\alpha$$

$$= 2\text{P}^2+2\text{P}^2\cos2\alpha$$

$$= 2\text{P}^2(1+\cos2\alpha)$$

$$= 2\text{P}^2.\ 2\cos^2\alpha$$

$$= 4P^2.\ \cos^2\alpha$$

$$R_2 = 2P\cos\alpha$$

প্রশ্নানুসারে, $R_2 = 2R_1$

$$\therefore 2P\cos\alpha = 2.2P\cos\beta$$

$$\therefore \cos\alpha = 2\cos\beta$$

উদাহরণ 9 ঃ একটি কণায় ক্রিয়াশীল বল P ও Q এর লব্ধি R। একই রেখা বরাবর $2P$ ও $3Q$ বলের লব্ধি $3R$। Q বলটি বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হলে এবং Pকে দ্বিগুণ করা হলে লব্ধি $2R$ হয়। প্রমাণ করুন যে, $P ঃ Q ঃ R = \sqrt{3} ঃ \sqrt{10} ঃ 2\sqrt{2}$ ।

সমাধান ঃ মনে করুন P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α

অতএব, প্রথম ক্ষেত্রে

$R^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$...(i)

২য় ক্ষেত্রে

$(3R)^2 = (2P)^2+(3Q)^2+2.2P.3Q\cos\alpha$

বা, $9R^2 = 4P^2 + 9Q^2+12PQ\cos\alpha$ .... (ii)

তৃতীয় ক্ষেত্রে,

$(2R)^2=4P^2+Q^2+2.2P.Q\cos(\pi-\alpha)$

$4R^2=4P^2+Q^2-4PQ\cos\alpha$... (iii)

(i) কে 2 দ্বারা গুণ করে (iii) এর সাথে যোগ করে পাই

চিত্রঃ ৭.১.১৩

$$6R^2= 6P^2+3Q^2$$

$$\therefore 2P^2+Q^2-2R^2=0 \text{ ...... } (1)$$

আবার (iii) কে 3 দ্বারা গুণ করে (ii) এর সাথে যোগ করে পাই−

$$21R^2 = 16P^2 + 12Q^2$$

$\therefore 16P^2 + 12Q^2-4R^2=0$ ..... (2)

(1) ও (2) হতে বজ্রগুণন পদ্ধতি ব্যবহার করে পাই−

$$\frac{P^2}{-21+24} = \frac{Q^2}{-32+42} = \frac{R^2}{24-16}$$

$$\therefore \frac{P^2}{3} = \frac{Q^2}{10} = \frac{R^2}{8}$$

$$\therefore \left(\frac{P}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{Q}{\sqrt{10}}\right)^2 = \left(\frac{R}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{Q}{\sqrt{10}} = \frac{R}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore P : Q : R = \sqrt{3} : \sqrt{10} : 2\sqrt{2}$$

পাঠ-২
দুটি নির্দিষ্ট দিকে বলের অংশক (অংশক সূত্র)

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- অংশক বলের ধারণা লাভ করতে পারবেন;
- বলের বিভাজন বা বিশ্লেষণ সম্পর্কে ধারণা লাভ করতে পারবেন;
- ত্রিকোণমিতির সাইন সূত্র ব্যবহার করে একটি বলের অংশক নির্ণয় করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন;
- বলের অংশক সূত্র ব্যবহার করে অতি সহজে জটিল সমস্যাবলি সমাধান করতে পারবেন।

বল বিভাজন বা বিশ্লেষণ

আমরা জানি কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বলের একটি এবং কেবলমাত্র একটি লব্ধি থাকতে পারে। কারণ প্রদত্ত বলদ্বয়কে নির্দিষ্ট দিকে ও মানে সূচিত করে দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা একটি মাত্র সামান্তরিক অঙ্কন করা যায়। পক্ষান্তরে একটি নির্দিষ্ট বলকে বিভিন্নভাবে দুটি অংশকে বিভাজিত বা বিশে- ষণ করা যায়। কারণ যে রেখা দ্বারা ঐ বলের মান ও দিক সূচিত করা যায়, তাকে কর্ণ ধরে অসংখ্য সামান্তরিক অঙ্কন করা সম্ভব এবং প্রত্যেকটি সামান্তরিক থেকে দুটি অংশক বলের সৃষ্টি হয়।

সুতরাং যদি একটি বলকে বিভিন্ন দিকে একাধিক বলে এরূপভাবে বিভাজন করা যায় যে, এদের লব্ধি প্রদত্ত বলের সমান হয়, তবে বলগুলোকে প্রদত্ত বলের অংশক বা উপাংশ বলা হয়।

> যদি একটি বলকে বিভিন্ন দিকে একাধিক বলে এরূপভাবে বিভাজন করা যায় যে, এদের লব্ধি প্রদত্ত বলের সমান হয়, তবে বলগুলোকে প্রদত্ত বলের অংশক বা উপাংশ বলা হয়।

দুটি নির্দিষ্ট বলের অংশক নির্ণয়

মনে করুন, OC রেখাটি নির্দিষ্ট R বলের মান ও দিক সূচিত করে।

OX ও OY সরলরেখাদ্বয় OC রেখার সাথে যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করে। OX ও OY বরাবর R বলের অংশক নির্ণয় করতে হবে। OC কে কর্ণ ধরে $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন। সুতরাং সামান্তরিকের সূত্র অনুসারে OA ও OB বাহু দ্বারা নির্দেশিত অংশক বলগুলোর লব্ধি R যা কর্ণ OC দ্বারা সূচিত হয়েছে।

মনে করুন $\overset{\varnothing}{OA} = \overset{\varnothing}{P}$, $\overset{\varnothing}{OB} = \overset{\varnothing}{Q}$

চিত্র: ৭.২.১

সুতরাং $\Delta\, OAC$ হতে সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই–

$$\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC}$$

বা, $\dfrac{P}{\sin\beta} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}$

বা, $\dfrac{P}{\sin\beta} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore\ P = \dfrac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\ ,\ Q = \dfrac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

$\therefore$ R বলকে দুটি নির্দিষ্ট দিক OA ও OB বরাবর P ও Q বলের অংশক হিসেবে প্রকাশ করা হলো।

উদাহরণ 1ঃ 12পাউন্ড ওজনের একটি বলকে তার উভয়পক্ষে $90°$ ও $30°$ কোণে আনত অংশক বলদ্বয়ের মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ

মনে করুন অংশক বলদ্বয় P ও Q, এরা 12 পাউন্ড ওজনের বলটির সাথে যথাক্রমে $90°$ ও $30°$ কোণ উৎপন্ন করে।

অংশক বলের সূত্র প্রয়োগ করে পাই।

$$\frac{P}{\sin 30°} = \frac{Q}{\sin 90°} = \frac{R}{\sin(90°+30°)}$$

$$\therefore \frac{P}{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{1} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore P = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12.\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$ পাউন্ড-ওজন

$$Q = \frac{12.2}{\sqrt{3}} = \frac{12.2.\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$ পাউন্ড-ওজন।

$\therefore$ অংশক বলদ্বয়ের পরিমাণ $4\sqrt{3}$ পাউন্ড-ওজন ও $8\sqrt{3}$ পাউন্ড-ওজন।

চিত্রঃ ৭.২.২

উদাহরণ 2 ঃ $7\sqrt{3}$ পাউন্ড ওজনের একটি বলকে সমান মানের দুটি অংশকে বিভক্ত করুন যেন, অংশকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $60°$ হয়।

সমাধান ঃ মনে করুন, P মানের দুটি সমান বল দিকে ও মানে OA ও OB দ্বারা সূচিত হল যাদের লব্ধি $7\sqrt{3}$ OC বরাবর ক্রিয়াশীল। এখন $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন। যেহেতু $OA=OB=AC$

সুতরাং OC, □AOB কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

অংশক বলের প্রয়োগ হতে পাই।

$$\frac{P}{\sin 30°} = \frac{7\sqrt{3}}{\sin 60°}$$

চিত্রঃ ৭.২.৩

$$\therefore \frac{P}{\frac{1}{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \therefore\ P=7$$ পাউন্ড-ওজন।

উদাহরণ 3 ঃ AB ও AC কোন একটি বৃত্তের দুটি জ্যা। উক্ত জ্যা দুটি দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত দুটি বলের লব্ধি উক্ত বৃত্তের কেন্দ্রগামী হলে প্রমাণ করুন যে, বল দুটি হয়তো সমান অথবা পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

সমাধান ঃ মনে করুন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle BAO = \alpha$ ও $\angle OAC$
$= \beta$

ধরুন AB ও AC বাহুদ্বারা সূচিত বলদ্বয় P ও Q.

বলের অংশক সূত্র প্রয়োগ করে পাই–

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha}$$ বা, $$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\alpha}$$

$\therefore$ **Error!**) = **Error!**= **Error!**

চিত্র: ৭.২.৪

$$\therefore \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin B}{\sin C} \ \ldots\ldots \text{(i)}$$

এখন $OA = OB$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \alpha$$

আবার $\angle AOB = 2C$ [একই চাপ AB এর উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।]

$\therefore \angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = \pi$

$\therefore 2C + \alpha + \alpha = \pi$

বা, $2C + 2\alpha = \pi$

বা, $2\alpha = \pi - 2C$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} - C$$

অনুরূপভাবে $\beta =$ **Error!**) - B

(ii) হতে পাই–

$$\therefore \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}$$

$$\therefore \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\cos C}{\cos B}$$

$\therefore 2\sin B \cos B = 2\sin C.\ \cos C$

$\therefore \sin 2B = \sin 2C$

বা, $\sin 2B - \sin 2C = 0$

$\therefore 2\cos(B+C).\ \sin(B-C) = 0$

$\therefore \cos(B+C) = 0 = \cos 90°$ বা, $\sin(B-C) =$
$0 = \sin 0°$

$\therefore$ □B + □C = 90° □B - □C = 0

অতএব, □A = 90° □B = □C

অতএব, $AC = AB$ অর্থাৎ, $Q = P$

সুতরাং বলদ্বয় সমান অথবা এরা পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করে।

উদাহরণ 4 ঃ P, Q বলদ্বয় যথাক্রমে OA ও OB সরলরেখা বরাবর ক্রিয়াশীল এবং এদের লব্ধি OA রেখার উপর লম্ব। একই রেখা বরাবর P', Q' বলয়ে ক্রিয়াশীল। যদি এদের লব্ধি OB এর উপর লম্ব হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $PP' = QQ'$।

সমাধানঃ মনে করুন □$AOB = \alpha$

চিত্রঃ ৭.২.৫

বলের আংশিক সূত্র প্রয়োগ করে পাই−

$$\frac{P}{\sin(\alpha - 90°)} = \frac{Q}{\sin 90°} \;\ldots\; \text{(i)}$$

এবং ২য় ক্ষেত্রে P'ও Q' বলের লব্ধি OB এর সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং ২য় ক্ষেত্রে বলের অংশক সূত্র প্রয়োগ করে পাই−

$$\frac{Q'}{\sin(\alpha - 90°)} = \frac{P'}{\sin 90°} \;\ldots\ldots\; \text{(ii)}$$

(i) কে (ii) দ্বারা ভাগ করে−

$$\frac{P}{Q'} = \frac{Q}{P'}$$

$$\therefore PP' = QQ'$$

পাঠ-৩

বলের লম্বাংশক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- অংশক ও লম্বাংশক সম্বন্ধে জানতে পারবেন;
- লম্বাংশক নির্ণয় করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন;
- লম্বাংশকের উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন;
- লম্বাংশকের সাহায্যে সমস্যা সমাধান করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

অংশক ও লম্বাংশক

একটি বলকে দুটি দিকে বিভাজন করলে বিভাজিত অংশদ্বয়কে বলটির অংশক বলে। এই অংশক বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ এক সমকোণ অর্থাৎ বিভাজিত অংশক বলদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, ঐ অংশক দ্বয়কে বলটির লম্বাংশক বলে।

দুইটি লম্বাংশে বল-বিভাজন

চিত্র: ৭.৩.১

মনে করুন, OX ও OY সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব এবং O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল R বল OC সরলরেখা বরাবর কার্যরত।

এখন OX ও OY বরাবর R বলের লম্বাংশক বের করতে হবে। $OACB$ সামান্তরিকটি পূর্ণ করুন, যেখানে □$AOC = \alpha$।

(i) নং চিত্রে $\dfrac{OA}{OC} = \cos\alpha$

$\therefore OA = OC\cos\alpha = R\cos\alpha$

OX বরাবর R বলের লম্বাংশক $OA = R\cos\alpha$

আবার $\dfrac{CA}{OC} = \sin\alpha$

$\therefore$ $CA = OC \sin\alpha$

বা, $CA = R \sin\alpha$

$\therefore$ $OB = R\sin\alpha$ [$\therefore$ $CA = OB$]

OX এর উপর লম্ব অর্থাৎ OY বরাবর লম্বাংশক $OB = R\sin\alpha$

(ii) নং চিত্রে α স্থুলকোণ, এক্ষেত্রে OX বরাবর R বলের লম্বাংশক- $OA = OC \cos(\pi - \alpha) = -R\cos\alpha$

$\therefore$ OX' বরাবর R বলের লম্বাংশক $OA = -R\cos\alpha$

এবং OY বরাবর R বলের লম্বাংশক $OB = OC \sin(\pi - \alpha) = R \sin\alpha$

সুতরাং OY বরাবর R বলের লম্বাংশক $OB = R\sin\alpha$

বলের লম্বাংশক সম্বন্ধে একটি উপপাদ্য

কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বলের নির্দিষ্ট দিকের লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল উক্ত দিকে তাদের লব্ধির লম্বাংশকের সমান।

মনে করুন, OA ও OB রেখাদ্বয় যথাক্রমে O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বল P ও Q দ্বারা সূচিত হয়েছে। $OACB$ সামান্তরিকটি পূর্ণ করুন। তাহলে OC কর্ণ P ও Q বলের লব্ধি R এর মান ও দিক সূচিত করবে।

মনে করুন, OX রেখাটি নির্দিষ্ট দিক নির্দেশ করে।

চিত্রঃ ৭.৩.২

OX রেখার উপর AL, BM ও CN লম্ব টানুন। সুতরাং OX বরাবর P, Q, R বলের লম্বাংশক যথাক্রমে OL, OM ও ON হবে।

CN এর উপর AT লম্ব অঙ্কন করুন।

OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল

$= OL \pm OM$ [*(i)* নং চিত্রে +চিহ্ন এবং *(ii)* নং চিত্রে − চিহ্ন হবে]

$= OL \pm AT$ [$\because$ $\Delta OBM \cong \Delta ACT$ $\therefore$ $OM = AT$]

$= OL \pm LN$

$= ON$

$= OX$ বরাবর R বলের লম্বাংশক।

সুতরাং OX বরাবর P ও Q বলের লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল $=$ OX বরাবর লব্ধি R এর বলের

লম্বাংশক।

দ্রষ্টব্য : একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত যে কোন সংখ্যক একতলীয় বলের ক্ষেত্রেও উপরোক্ত উপপাদ্যটি সত্য হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : P, Q, R বলগুলো OX এর সাথে যথাক্রমে α, β ও θ কোণ উৎপন্ন করলে উপরোক্ত সূত্রটি হবে $P\cos\alpha + Q\cos\beta = R\cos\theta$

উদাহরণ 1ঃ P ও Q বলের লব্ধির মান Q এর সমান। দেখান যে, একই ক্রিয়ারেখা বরাবর কার্যরত $2Q$ ও P বলের লব্ধি P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব।

সমাধান ঃ মনে করুন, P ও Q বলের মধ্যবর্তী কোণ α এদের লব্ধি Q।

চিত্রঃ ৭.৩.৩

১ম ক্ষেত্রে ঃ

$Q^2 = P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

$0 = P(P+2Q\cos\alpha)$

$\because P\neq 0,\ P+2Q\cos\alpha = 0$.... (i)

২য় ক্ষেত্রে ঃ

মনে করুন $2Q$ ও P বলের লব্ধি R, P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

P, $2Q$ ও R বলকে P বলের ক্রিয়ারেখার দিকে লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$R\cos\theta = P\cos 0 + 2Q\cos\alpha$

$= P+2Q\cos\alpha$

$\therefore R\cos\theta = 0$ [(i) হতে মান বসিয়ে পাই]

$\because R\neq 0,\ \therefore \cos\theta = 0 = \cos 90^\circ\ \therefore \theta = 90^\circ$

উদাহরণ 2 ঃ পরস্পর α কোণে আনত P ও Q বলের লব্ধি R, P এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। দেখান যে, P এর কার্যরেখা বরাবর $(P+R)$ পরিমাণ বল কার্যরত থাকলে নূতন লব্ধি $(P+R)$ এর সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করবে।

সমাধান ঃ P,Q,R বলকে P বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$R\cos\theta = P\cos 0 + Q\cos\alpha$

$= P+Q\cos\alpha$ ...... (i)

আবার প্রদত্ত বলগুলোকে P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$R\sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin\alpha$

$= Q\sin\alpha$ .... (ii)

চিত্রঃ ৭.৩.৪

২য় ক্ষেত্রে নূতন লব্ধি R_1, $P+R$ এর সাথে β কোণ উৎপন্ন করলে

$$\tan\beta = \frac{Q\sin\alpha}{(P+R)+Q\cos\alpha}$$

$$= \frac{R\sin\theta}{P+Q\cos\alpha+R} = \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta+R}$$ [(i) ও (ii) হতে পাই]

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{Q}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$\therefore \qquad \beta = \frac{\theta}{2}$

সুতরাং নতুন লব্ধি R_1, $P+R$ এর সাথে $\frac{\theta}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে।

উদাহরণ 3 ঃ A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $4P$ ও $2P$ বলের লব্ধি $3P$। একটি সরলরেখা এদের ক্রিয়ারেখাগুলোকে যথাক্রমে B,C,D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, $\frac{4}{AB} + \frac{2}{AC} = \frac{3}{AD}$

সমাধান : মনে করুন, AB, AC ও AD বরাবর $4P$, $2P$ ও $3P$ বলগুলো ক্রিয়াশীল। এখন BCD ছেদকের উপর AO লম্ব অঙ্কন করুন। AO বরাবর বলগুলোর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$4P\cos BAO + 2P\cos CAO = 3P\cos DAO$

$\therefore 4P.\frac{OA}{AB} + 2P.\frac{OA}{AC} = 3P.\frac{OA}{AD}$

চিত্রঃ ৭.৩.৫

বা, $\frac{4}{AB} + \frac{2}{AC} = \frac{3}{AD}$

$\therefore \frac{4}{AB} + \frac{2}{AC} = \frac{3}{AD}$

উদাহরণ 4 ঃ $\Delta\, ABC$ এর CA ও CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দুটি বলের মান যথাক্রমে $\cos A$ ও $\cos B$ এর সমানুপাতিক। প্রমাণ করুন যে, এদের লব্ধির মান $\sin C$ এর সমানুপাতিক এবং লব্ধির ক্রিয়ারেখা C কোণকে $\frac{1}{2}(C+A-B)$ ও $\frac{1}{2}(B+C-A)$ অংশে বিভক্ত করে।

সমাধান ঃ ΔABC এর CA ও CB বাহু বরাবর $P=K\cos A$, $Q=K\cos B$ বলগুলো ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি R, P বলের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। C বিন্দুতে CA বরাবর বলগুলোর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos C$

$= K\cos A + K\cos B\cos C$

চিত্রঃ ৭.৩.৬

$= K\left[\cos\{\pi-(B+C)\}+\cos B.\cos C\right]$

$= K\,[-\cos(B+C) + \cos B\cos C]$

$= K\,(-\cos B\cos C + \sin B\sin C + \cos B\cos C)$

$= K\sin B\sin C$........ (i)

আবার CA এর উপর লম্ব বরাবর বলগুলোর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$R\sin\theta = P\sin 0 + Q\sin C$

$$= K\cos B \sin C \text{ ....(ii)}$$

(ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই–

$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{K\cos B \sin C}{K\sin B.\ \sin C}$$

$$\tan\theta = \cot B = \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} - B$$

(ii) হতে পাই–

$$R\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = K\cos B.\ \sin C$$

$$\therefore R\cos B = K\cos B.\ \sin C$$

$$\therefore R = K\sin C$$

বলগুলোর লব্ধি $\sin C$ এর সমানুপাতিক।

এখন, $\theta = 90° - A$

$$= \frac{A+B+C}{2} - A$$

$$= \frac{B+C-A}{2}$$

অপর কোণটি $C - \theta = C - \frac{B+C-A}{2} = \frac{2C-B-C+A}{2}$

অতএব, $C - \theta = \frac{C+A-B}{2}$

পাঠ-৪
লম্বাংশকের সাহায্যে লব্ধি নির্ণয়

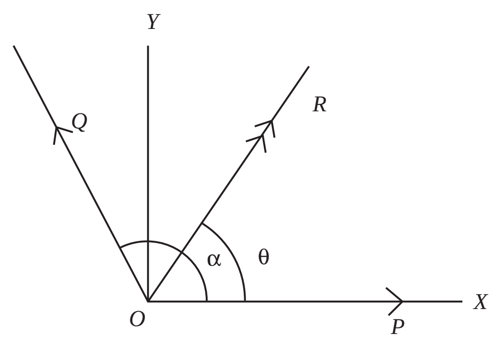
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- লম্বাংশকের সাহায্যে দুটি বলের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করতে পারবেন;
- কোন কণাতে ক্রিয়াশীল যে কোন সংখ্যক একতলীয় বলের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

লম্বাংশকের সাহায্যে দুটি বলের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয়

মনে করুন P ও Q বলের মধ্যবর্তী কোণ α এবং এদের লব্ধি R, P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। O বিন্দু দিয়ে একটি নির্দিষ্ট রেখা OX টানুন যা P বলের ক্রিয়ারেখা নির্দেশ করে। OX এর উপর OY লম্ব অঙ্কন করুন।



চিত্র: ৭.৪.১

আমরা জানি, একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বলের কোন নির্দিষ্ট দিকের লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল তাদের লব্ধির উক্ত দিকের লম্বাংশকের সমান।

সুতরাং P, Q, R বলকে OX রেখা বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos\alpha$

$= P + Q\cos\alpha$ .... (i)

আবার, P, Q ও R বলকে OX এর উপর লম্ব অর্থাৎ OY বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$R\sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin\alpha$

$= Q\sin\alpha$ .... (ii)

(i) কে (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই–

$R^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = (P+Q\cos\alpha)^2+Q\sin^2\alpha$

$\therefore R^2 = P^2+Q^2\cos^2\alpha + 2PQ\cos\alpha + Q^2\sin^2\alpha$

$= P^2+Q^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) + 2PQ\cos\alpha$

$= P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

$\therefore R = \sqrt{(P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha)}$ যা লব্ধি বলের মান নির্দেশ করে।

(ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই–

$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} =- \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

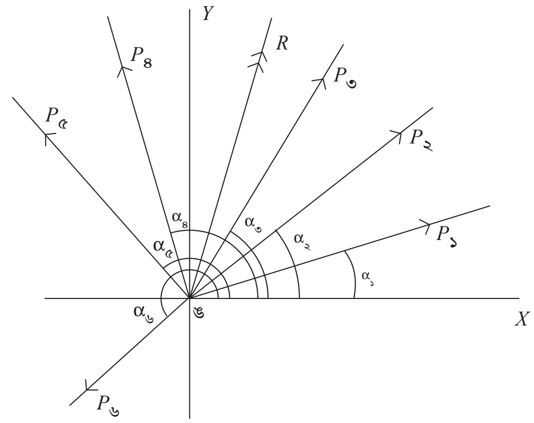
সুতরাং $\theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ যা লব্ধি বলের দিক নির্দেশ করে।

লম্বাংশকের সাহায্যে সমবিন্দু যে কোন সংখ্যক একতলীয় বলের লব্ধি নির্ণয়

মনে করুন, $P_1, P_2, P_3 .....P_n$ কতকগুলো n সংখ্যক বল O বিন্দু হতে ক্রিয়াশীল। O বিন্দু হতে একই সমতলে OX ও OY দুটি আয়তাকার অক্ষ টানুন।

মনে করুন, $P_1, P_2, P_3 ...... P_n$ বলগুলো OX এর সাথে যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 .... \alpha n$ কোণ উৎপন্ন করে।

OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল, এদের উক্ত রেখা বরাবর লব্ধির লম্বাংশকের সমান।



চিত্রঃ ৭.৪.২

$\therefore R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + ... + P_n\cos\alpha_n = X$ ধরে............... (i)

অনুরূপভাবে বলগুলোর OY রেখা বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই−

$R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + ... + P_n\sin\alpha_n = Y$ ধরে ....(ii)

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই−

$R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = X^2 + Y^2$

$$\therefore R = \sqrt{X^2+Y^2}$$ যা লব্ধির মান নির্দেশ করে।

আবার (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই−

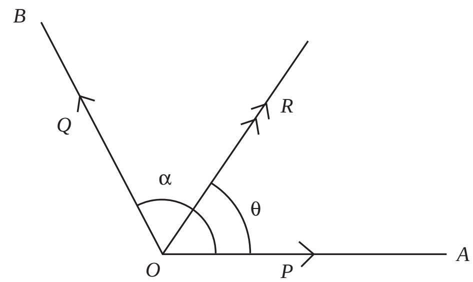
$$\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{Y}{X}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{Y}{X}$$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{Y}{X}$ যা লব্ধি বলের দিক নির্দেশ করে।

উদাহরণ 1ঃ পরস্পর α কোণে আনত P ও Q বলের লব্ধি R। P ক্রিয়ারেখা বরাবর R বলের লম্বাংশকের পরিমাণ Q হলে প্রমাণ করুন যে, বলদুটির মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$ এবং লব্ধি $R = \sqrt{Q^2-P^2+2PQ}$

সমাধান ঃ মনে করুন P ও Q বলের লব্ধি R, P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



চিত্রঃ ৭.৪.৩

P, Q ও R বলগুলোকে P বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর বিভাজন করে পাই।

$R\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos\alpha$

$\therefore R\cos\theta = P+Q\cos\alpha$ ...... (i)

যেহেতু P বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর R বলের লম্বাংশক Q।

সুতরাং (i) হতে পাই $R\cos\theta = Q$

$$\therefore Q = P+Q\cos\alpha$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{Q-P}{Q} \text{ .... (ii)}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{Q-P}{Q}$$

আবার বলগুলোকে P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$$R\sin\theta = Q\sin\alpha \text{ .... (iii)}$$

(i) ও (iii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই–

$$R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (P+Q\cos\alpha)^2 + Q^2\sin^2\alpha$$

$$= P^2+Q^2\cos^2\alpha+2PQ\cos\alpha+Q^2\sin^2\alpha$$

R^2

$$= P^2+Q^2+2PQ\left(\frac{Q-P}{Q}\right)$$ [(i) হতে পাই]

$$=P^2+Q^2+2PQ-2P^2$$

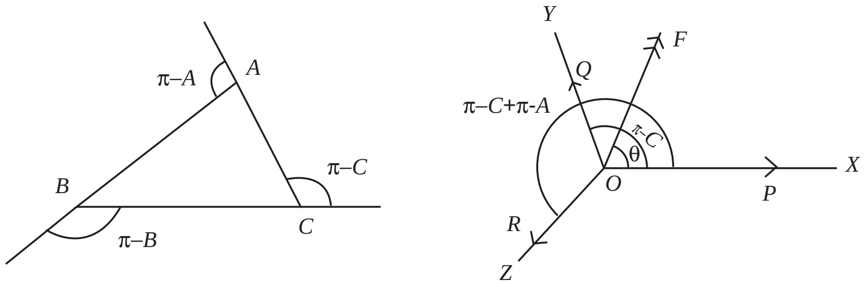
$$= Q^2-P^2+2PQ$$

লব্ধি $R = \sqrt{(Q^2-P^2+2PQ)}$

উদাহরণ 2 ঃ কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q, R বলগুলো যথাক্রমে ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুগুলোর সমান্তরাল রেখা বরাবর কার্যরত। এদের লব্ধি মান F হলে প্রমাণ করুন

$F = \sqrt{(P^2+Q^2+R^2-2QR\cos A-2RP\cos B-2PQ\cos C)}$

সমাধান ঃ মনে করুন P, Q, R বল তিনটি BC, CA ও AB বাহুর সমান্তরাল OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়াশীল। ধরুন বলগুলোর লব্ধি F, P বলের ক্রিয়ারেখার সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



KY©: 7.4.4

বলগুলোকে P বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$$F\cos\theta = P\cos 0^0 + Q\cos(\pi-C) + R\cos(\pi-C+\pi-A)$$
$$= P - Q\cos C + R\cos(\pi+B) [C+A = \pi-B]$$
$$= P - Q\cos C - R\cos B .... \text{(i)}$$

আবার বলগুলোকে P বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

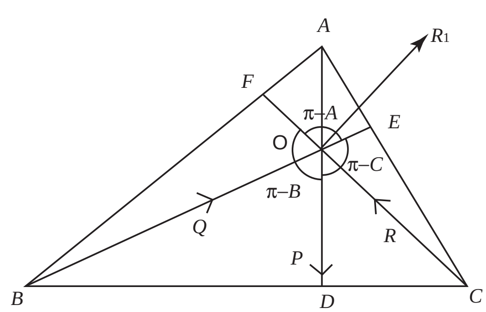
$$F\sin\theta = P\sin 0^\circ + Q\sin(\pi-C) + R\sin(\pi+B)$$
$$= Q\sin C - R\sin B .... \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই–

$$F^2 = (P - Q\cos C - R\cos B)^2 + (Q\sin C - R\sin B)^2$$
$$= P^2 + Q^2\cos^2 C + R^2\cos^2 B - 2PQ\cos C - 2RP\cos B$$
$$+ 2QR\cos B.\cos C + Q^2\sin^2 C + R^2\sin^2 B - 2QR\sin B.\sin C$$
$$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ\cos C - 2RP\cos B + 2QR\cos(B+C)$$
$$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ\cos C - 2RP\cos B + 2QR\cos(\pi-A) \quad [\because B+C = \pi-A]$$
$$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR\cos A - 2RP\cos B - 2PQ\cos C$$
$$\therefore F = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR\cos A - 2RP\cos B - 2PQ\cos C)}$$

উদাহরণ 3 ঃ ΔABC এর A, B, C হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল বলগুলোর মান অনুসঙ্গী কোণের কোসাইনের সমানুপাতিক। দেখান যে, এদের লব্ধির মান $\sqrt{(1-8\cos A.\cos B.\cos C)}$ এর সমানুপাতিক।

সমাধান ঃ মনে করুন P, Q, R বলত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল। যেখানে $P = K\cos A$, $Q = K\cos B$, $R = K\cos C$। মনে করুন তিনটি বল O বিন্দুতে ছেদ করে যাদের লব্ধি R, P বলের ক্রিয়ারেখা অর্থাৎ OD এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



KY©: 7.4.5

OD বরাবর বলগুলোর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$$R_1\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos(\pi-C) + R\cos(\pi-A+\pi-C)$$
$$= P - Q\cos C + R\cos(\pi+B)$$
$$= P - Q\cos C - R\cos B$$

$EAFO$ চতুর্ভুজে, $\square OEA = \square OFA = \dfrac{\pi}{2}$

$\because \square EOF = \pi - A$

অনুরূপভাবে, $\square EOD = \pi - C$, $\square FOD = \pi - B$

আবার OD এর উপর লম্ব বরাবর বলগুলোর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$$R_1\sin\theta = P\sin 0^0 + Q\sin(\pi - C) + R\sin(\pi + B)$$
$$= Q\sin C - R\sin B \; .... \; \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই–

$$R_1^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (P - Q\cos C - R\cos B)^2 + (Q\sin C - R\sin B)^2$$

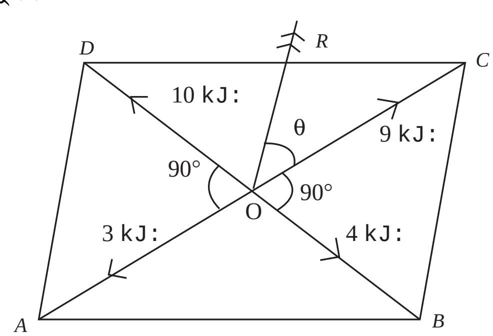
$$R_1^2 = (P^2 + Q^2\cos^2 C + R^2\cos^2 B - 2PQ\cos C - 2RP\cos B + 2QR\cos B\cos C$$
$$+ Q^2\sin^2 C + R^2\sin^2 B - 2QR\sin B\sin C$$
$$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ\cos C - 2RP\cos B + 2QR\cos(B + C)$$
$$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ\cos C - 2RP\cos B - 2QR\cos A \qquad [\because B + C = \pi - A]$$

$$R_1^2 = K^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C$$
$$-2\cos A\cos B\cos C - 2\cos A\cos B\cos C) \qquad [\because P = K\cos A,$$
$Q = K\cos B$, $R = K\cos C$]
$$= K^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 6\cos A\cos B\cos C)$$
$$= K^2(1 - 2\cos A\cos B\cos C - 6\cos A\cos B\cos C) \qquad [A + B + C = \pi \text{ হলে}$$
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C]$$
$$= K^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$
$$\therefore R_1 = K\sqrt{(1 - 8\cos A\cos B\cos C)}$$
$$\therefore R_1 \; □ \; \sqrt{(1 - 8\cos A\cos B\cos C)}.$$

অর্থাৎ লব্ধি $\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$ এর সমানুপাতিক।

উদাহরণ 4 ঃ $ABCD$ রম্বসের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O; OA, OB, OC, OD বরাবর যথাক্রমে 3, 4, 9, 10 মানের বলগুলো ক্রিয়ারত থাকলে, এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।



চিত্র: ৭.৪.৬

সমাধান ঃ মনে করুন, বলগুলোর লব্ধি R, OC এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। আমরা জানি রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে।

এখন OC বরাবর বলগুলোর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$$R\cos\theta = 9\cos 0° + 10\cos 90° + 3\cos 180° + 4\cos 270°$$
$$= 9 - 3 = 6 \; .... \; \text{(i)}$$

আবার OC এর উপর লম্ব বরাবর বলগুলোর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$$R\sin\theta = 9\sin 0° + 10\sin 90° + 3\sin 180° + 4\sin 270°$$
$$= 10 - 4 = 6 \; .... \; \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই–

$R^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 36+36$

বা, $R^2=72$

$\therefore R = 6\sqrt{2}$ যা লব্ধির মান

লব্ধির দিক $\frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{6}{6} = 1$

$\tan\theta = 1 = \tan 45°$

$\therefore \theta = 45°$

পাঠ-৫

বলজোটের সাম্যাবস্থা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

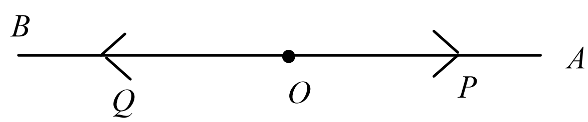
- কোন কণাতে ক্রিয়াশীল বলজোটের সাম্যাবস্থা কি তা বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- কোন কণাতে ক্রিয়াশীল সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার প্রয়োজনীয় শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে এর ব্যবহার ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

বলজোটের সাম্যাবস্থা

একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত কোন কণার উপর কতগুলো বল ক্রিয়াশীল থাকলে যদি বস্তুকণাটিতে কোন প্রকার গতির সৃষ্টি না হয় অর্থাৎ বস্তুকণাটি স্থির থাকে তবে বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে। এক্ষেত্রে ক্রিয়ারত বলগুলোর লব্ধি শূন্য হবে। সমবিন্দু বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, এদের যে কোন একটি বলের মান অপর বলগুলোর লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী হবে। সাম্যাবস্থায় থাকলে বলগুলোর লব্ধি শূন্য হওয়ায় যে কোন রেখা বরাবর লব্ধির লম্বাংশক শূন্য হবে। সুতরাং প্রদত্ত বলগুলোর লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফলও শূন্য হবে।

দুটি বলের ক্ষেত্রে সাম্যাবস্থা

মনে করুন O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Pও Q বলদ্বয় একই রেখা AOB এর OA ও OB বরাবর কার্যরত। বলদ্বয়ের লব্ধি R হলে, $R= P-Q$ $(P>Q)$



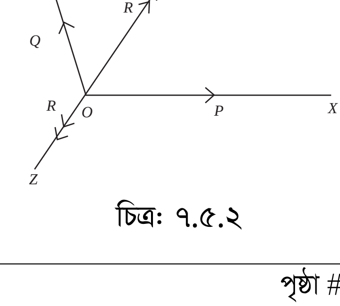
KY©: 7.5.1

সাম্যাবস্থায় লব্ধিবল $R = 0$, এক্ষেত্রে $P=Q$

অর্থাৎ একই বিন্দুতে দুটি সমান বল পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল হলে এরা সাম্যাবস্থায় থাকবে। সুতরাং কোন বিন্দুতে কোন বস্তুকণার উপর দুটি সমান ও বিপরীতমুখী বল ক্রিয়াশীল থাকলে বস্তুকণাটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

তিনটি সমতলীয় বলের সাম্যাবস্থা

মনে করুন O বিন্দুতে OX ও OY বরাবর P ও Q বলদ্বয় ক্রিয়াশীল। সামান্তরিকের সূত্রানুসারে P ও Q বলের লব্ধি R, OC বরাবর ক্রিয়াশীল হবে। আমরা জানি একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে এদের যে কোন দুটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান ও বিপরীতমুখী হবে। অর্থাৎ P ও Q বলের লব্ধি R এর সমান ও একই রেখা COZ বরাবর ক্রিয়াশীল।



চিত্র: ৭.৫.২

অতএব, তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় থাকতে হলে এরা OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।

কোন কণাতে ক্রিয়াশীল সমতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার শর্ত

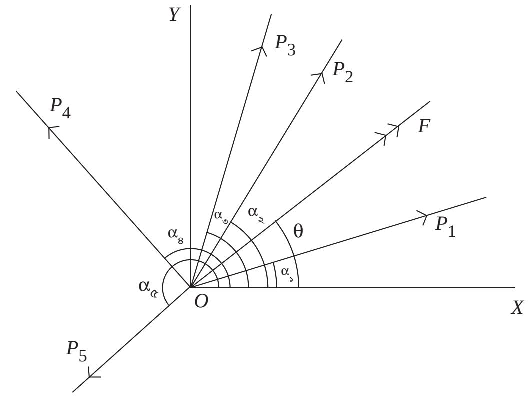
একই বিন্দুতে কোন কণার উপর ক্রিয়ারত যে কোন সংখ্যক একতলীয় বলের সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত এই যে, যে কোন দিকে ক্রিয়ারত বলগুলোর লম্বাংশকের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হবে।

মনে করুন $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_n$ বলগুলো O বিন্দুতে ক্রিয়ারত।

O বিন্দু দিয়ে পরস্পর লম্বিক OX ও OY রেখা অঙ্কন করুন।

মনে করুন প্রদত্ত বলগুলো OX এর সাথে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_n$ কোণ উৎপন্ন করে এবং বলগুলোর লব্ধি F, OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

বলগুলোকে OX বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই−



চিত্রঃ ৭.৫.৩

$R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots + P_n\cos\alpha_n = X$ (ধরে)................(i)

আবার বলগুলোকে OX এর উপর লম্ব অর্থাৎ OY বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই−

$R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \ldots + P_n\sin\alpha_n = Y$ (ধরে)................(ii)

(i) ও (ii) কে বর্গ করে যোগ করে পাই−

$R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = X^2 + Y^2$

$\therefore R^2 = X^2 + Y^2$

বলগুলোর সাম্যাবস্থার জন্য $R = 0$

$$\therefore X^2 + Y^2 = 0$$

যেহেতু প্রত্যেকে শূন্য না হলে দুটি বাস্তব রাশির বর্গের যোগফল শূন্য হতে পারে না।

$\therefore X = 0, Y = 0$

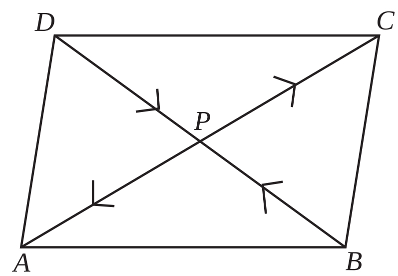
সুতরাং বলগুলোর সাম্যাবস্থার জন্য $X = 0, Y = 0$ যা প্রয়োজনীয়।

আবার $X = 0, Y = 0$ হলে $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0$ হবে, অর্থাৎ লব্ধি শূন্য ছাড়া অন্য কিছু হতে পারে না। অতএব, শর্তদ্বয় পর্যাপ্ত।

সুতরাং একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল একতলীয় বলজোটের সাম্যাবস্থার জন্য প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল $X = 0$, $Y = 0$

উদাহরণ 1 ঃ $ABCD$ সামান্তরিকের তলে P একটি বিন্দু। $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{DP}$ বলগুলোর লব্ধি নির্ণয় করুন এবং দেখান যে, বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।

সমাধান ঃ ভেক্টর প্রতীকের সাহায্যে বলগুলোর



KY©: 7.5.4

লব্ধি $= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP}$

$$= \left(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PA}\right) + \left(\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC}\right)$$

$$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \qquad [DA =$$

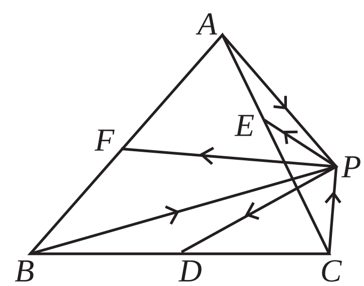
CB এবং $BA||CB$]

$$= 0$$

যেহেতু বলগুলোর লব্ধি শূন্য। কাজেই এরা সাম্যাবস্থায় থাকবে।

উদাহরণ 2 ঃ ΔABC এর সমতলে P একটি বিন্দু। D,E,F যথাক্রমে $BC,\ CA,\ AB$ এর মধ্যবিন্দু। দেখান যে, $\overrightarrow{AP}$' $\overrightarrow{BP}$' $\overrightarrow{CP}$' $\overrightarrow{PD}$' $\overrightarrow{PE}$' $\overrightarrow{PF}$ বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।

সমাধান ঃ D, BC এর মধ্যবিন্দু



চিত্র: ৭.৫.৫

$$\therefore \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{DP}$$ [(m, n) সূত্র হতে]

অনুরূপভাবে,

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{EP}$$

এবং $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{2FP}$

$\therefore$ যোগ করে পাই–

$$2\left(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}\right) = 2\left(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FP}\right)$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{FP}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{FP} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = 0$$

যেহেতু বলগুলোর লব্ধি শূন্য, কাজেই প্রদত্ত বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে।

উদাহরণ 3 ঃ কোন উলম্বতলে 10 পাউন্ড ওজনের একটি বস্তুকে 5 পাউন্ড ওজনের একটি অনুভূমিক বল, অনুভূমিকের সাথে $60°$ কোণে ক্রিয়ারত F বল এবং F বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্বভাবে R বল স্থিতি অবস্থায় আছে। প্রমাণ করুন যে, $F - \sqrt{3}\ R + 10 = 0,\ \sqrt{3}\ F + R - 20 = 0$

সমাধান ঃ একই বিন্দু O-তে ক্রিয়াশীল বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।

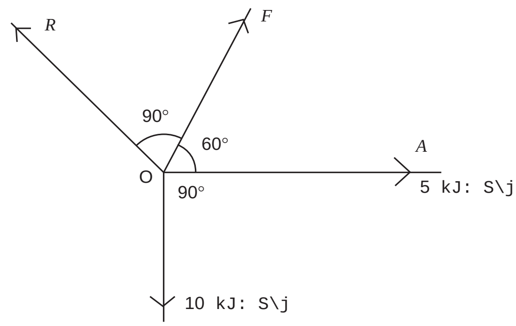
সুতরাং বলগুলোকে 5 পাউন্ড ওজনের অনুভূমিক দিকে লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$5\cos0°+F\cos60°+R\cos(90°+60°)$
$+10\cos(360°-90°)=0$ [$\because$ বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে]

বা, $5 + F.\frac{1}{2} - R.\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

বা, $10 + F - \sqrt{3}\ R = 0$

বা, $F - \sqrt{3}\ R + 10 = 0$



চিত্রঃ ৭.৫.৬

আবার বলগুলোকে 5 পাউন্ড ওজনের অনুভূমিকের উপর লম্ব বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$5 \sin0° + F \sin60° + R\sin (90°+60°) + 10\sin (360°-90°) = 0$

$\therefore\ F\frac{\sqrt{3}}{2} + R.\frac{1}{2} - 10 = 0$

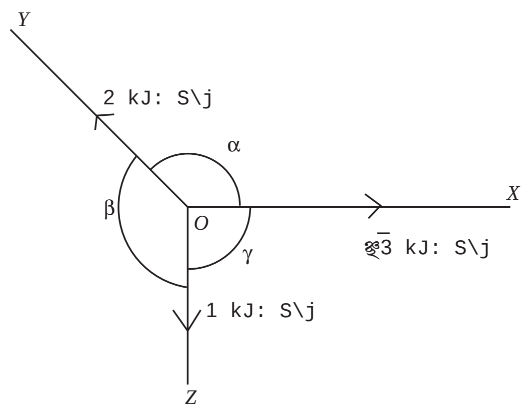
$\sqrt{3}\, F + R - 20 = 0$

উদাহরণ 4 ঃ কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\sqrt{3}$, 2 ও 1 পাউন্ড-ওজনের তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। বলগুলোর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন O বিন্দুতে কার্যরত $\sqrt{3}$, 2 ও 1 পাউন্ড-ওজনের তিনটি বল যথাক্রমে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়াশীল।

আমরা জানি, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে যে কোন দুটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান ও বিপরীতমুখী হবে।

ধরুন, $\sqrt{3}$ পাউন্ড ওজন ও 2 পাউন্ড ওজনের মধ্যবর্তী কোণ α. যাদের লব্ধি 1 পাউন্ড ওজন।



চিত্রঃ ৭.৫.৭

$\therefore\ 1^2 = (\sqrt{3})^2 + (2)^2 + 2.\sqrt{3}\ .\ 2.\ \cos\alpha$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{-6}{2.2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos150°$

$\therefore\ \alpha = 150°$

আবার 2 পাউন্ড ওজন ও 1 পাউন্ড ওজনের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ β হলে এদের লব্ধি $\sqrt{3}$ পাউন্ড ওজন।

$(\sqrt{3})^2 = (2)^2 + 1^2 + 2.2.1.\cos\beta$

$\therefore \cos\beta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} = \cos120°$

$\therefore\ \beta = 120°$

আবার $\sqrt{3}$ ও 1 পাউন্ড ওজনের বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ γ হলে–

$$\alpha+\beta+\gamma = 360°$$
$$\therefore\ \gamma = 360° - (\alpha+\beta) = 360°-270° = 90°$$

$$\therefore \alpha = 150°, \beta = 120°, \gamma = 90°$$

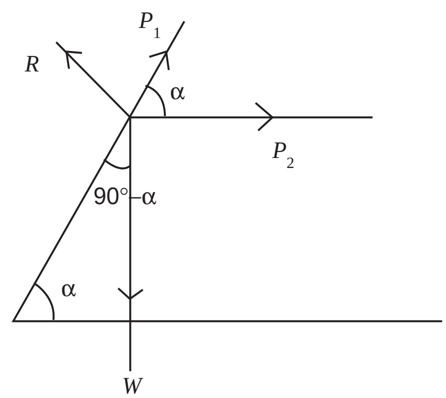
উদাহরণ 5 ঃ দেখান যে, কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল 2ঃ 3ঃ 6 অনুপাতের বলগুলো কখনও সাম্যাবস্থায় থাকতে পারে না।

সমাধান ঃ যেহেতু বলগুলোর অনুপাত 2ঃ 3 ঃ 6 কাজেই বলগুলো $2k$, $3k$ ও $6k$ হবে যারা কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

আমরা জানি, একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকতে হলে যে কোন দুইটি বলের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান ও বিপরীতমুখী হবে। এক্ষেত্রে $2k+3k=5k<6k$। কাজেই বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে না।

উদাহরণ 6 ঃ ভূমির সাথে α কোণে আনত একটি মসৃণ তল বরাবর ক্রিয়াশীল বল P_1 এবং অনুভূমিক বল P_2 এর সাহায্যে একটি বস্তুকে তলের উপর সুস্থিত রাখা হয়েছে। P_1, P_2 ও α এর প্রত্যেকটির মান অর্ধেক হলেও বস্তুটি তলের উপর সুস্থিত থাকবে। দেখান যে, $P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$

সমাধান ঃ ধরুন বস্তুটির ওজন W এবং প্রথম ক্ষেত্রে তলের প্রতিক্রিয়া RW তলের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল।



চিত্রঃ ৭.৫.৮

প্রথম ক্ষেত্রে তল বরাবর লম্বাংশক নিয়ে পাই–

$P_1\cos 0°+P_2\cos(360°-\alpha)+R\cos 90°+$

$W\cos(180°+90°-\alpha) = 0$ [যেহেতু বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে]

$\therefore P_1+P_2\cos\alpha - W\sin\alpha=0$

$\therefore P_1+P_2\cos\alpha = W\sin\alpha$ .....(i)

অনুরূপভাবে ২য় ক্ষেত্রে $\frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = W\sin\frac{\alpha}{2}$

$$\therefore P_1\cos\frac{\alpha}{2} + P_2\cos^2\frac{\alpha}{2} = W\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\text{ ÆJrJ èe TPr}\right]$$

$$\therefore P_1\cos\frac{\alpha}{2} + P_2\cos^2\frac{\alpha}{2} = W\sin\alpha \text{ ..... (ii)}$$

(i) হতে (ii) কে বিয়োগ করে পাই–

$P_1\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) + P_2\left(\cos\alpha - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 0$

$\therefore P_1\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = P_2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)$

$= P_2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+1\right)$ $\left[\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right]$

$= P_2\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{1\text{-}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1\text{-}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{1} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4}$$

$$\therefore P_1 : P_2 = 2\cos^2\frac{\alpha}{4} : 1$$

পাঠ-৬
বলের ত্রিভুজ সূত্র ও তার বিপরীত সূত্র

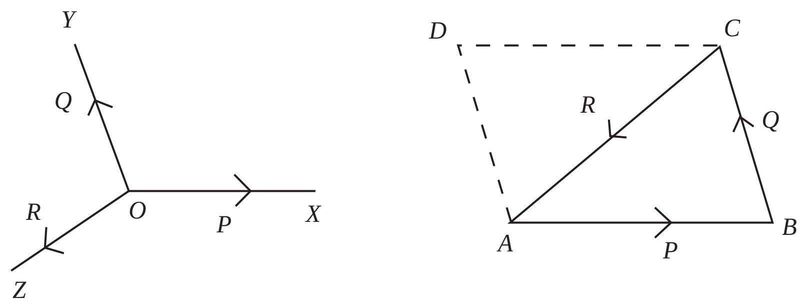
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বলের ত্রিভুজ সূত্রের বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন;
- বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্রের বর্ণনা ও তা প্রমাণ করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে সূত্রগুলো প্রয়োগ করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

বলের ত্রিভুজ সূত্র (Triangle of Forces)

একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল যদি একটি ত্রিভুজের পর্যায়ক্রমিক তিনটি বাহু দ্বারা ক্রমে, মানে ও দিকে সূচিত করা যায়, তবে বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে।



চিত্রঃ ৭.৬.১

মনে করুন, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর কার্যরত P, Q ও R বলগুলোকে যথাক্রমে ΔABC এর AB, BC ও CA বরাবর একই ক্রমে, মানে ও দিকে সূচিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

প্রমাণ ঃ $ABCD$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন। BC ও AD বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। সুতরাং BC বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত Q বলকে AD বাহু দ্বারা দিকে ও মানে নির্দেশ করা যায়। সুতরাং O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P, Q, R বল তিনটিকে $\overset{\varnothing}{AB}, \overset{\varnothing}{AD}$ ও $\overset{\varnothing}{CA}$ দ্বারা নির্দেশ করা যায়।

ভেক্টর পদ্ধতিতে বলের সামান্তরিক সূত্র প্রয়োগ করে পাই–

$$\overset{\varnothing}{AB} + \overset{\varnothing}{AD} = \overset{\varnothing}{AC}$$

$$\therefore \overset{\varnothing}{AB} + \overset{\varnothing}{BC} = \overset{\varnothing}{AC}$$

$$\therefore \overset{\varnothing}{AB} + \overset{\varnothing}{BC} + \overset{\varnothing}{CA} = \overset{\varnothing}{AC} + \overset{\varnothing}{CA}$$

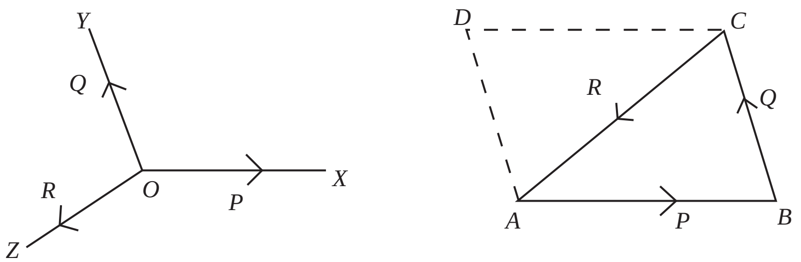
অতএব, $\overset{\varnothing}{AB} + \overset{\varnothing}{BC} + \overset{\varnothing}{CA} = 0$

অর্থাৎ $P+Q+R = 0$

অতএব, বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্র (Converse of the Triangle of forces)

একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে বল তিনটিকে যথাক্রমে একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুদ্বারা দিকে, মানে ও ক্রমে সূচিত করা যায়।



চিত্র: ৭.৬.২

মনে করুন, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর কার্যরত P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করতে হবে যে, তাদের মান ও দিক একই ক্রমে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুদ্বারা সূচিত করা যাবে।

প্রমাণ ঃ OX ও OY এর সমান্তরাল করে AB ও BC রেখাংশ অঙ্কন করুন যেন, $\overset{\varnothing}{AB} = \overset{\varnothing}{P}$ এবং $\overset{\varnothing}{BC} = \overset{\varnothing}{Q}$ হয়। এখন $ABCD$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন। A ও C যোগ করুন।

ভেক্টর পদ্ধতিতে বলের সামান্তরিক সূত্র প্রয়োগ করে পাই−

$$\overset{\varnothing}{\mathrm{AB}} + \overset{\varnothing}{\mathrm{AD}} = \overset{\varnothing}{\mathrm{AC}}$$

বা, $\overset{\varnothing}{\mathrm{AB}} + \overset{\varnothing}{\mathrm{BC}} = \overset{\varnothing}{\mathrm{AC}}$ $[\because \mathrm{AD} \| \mathrm{BC}, \therefore \overset{\varnothing}{\mathrm{AD}} = \overset{\varnothing}{\mathrm{BC}}]$

সুতরাং $\overset{\varnothing}{\mathrm{P}} + \overset{\varnothing}{\mathrm{Q}} = \overset{\varnothing}{\mathrm{AC}}$ .... (i)

যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই

$$\overset{\varnothing}{P} + \overset{\varnothing}{Q} + \overset{\varnothing}{R} = 0$$

$\therefore \overset{\varnothing}{AC} + \overset{\varnothing}{R} = 0$ [(i) হতে পাই]

উভয় পক্ষে $\overset{\varnothing}{CA}$ যোগ করে পাই−

$$\overset{\varnothing}{CA} + \overset{\varnothing}{AC} + \overset{\varnothing}{R} = \overset{\varnothing}{CA}$$

$$\therefore \overset{\varnothing}{R} = \overset{\varnothing}{CA}$$

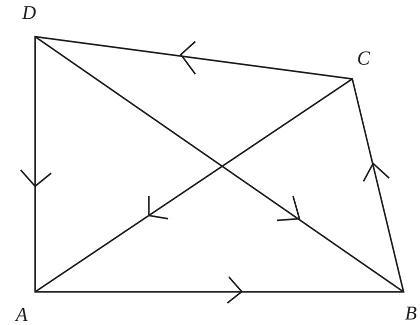
সুতরাং $\overset{\varnothing}{P}, \overset{\varnothing}{Q}, \overset{\varnothing}{R}$ বল তিনটিকে ΔABC এর AB, BC ও CA দ্বারা দিকে, মানে ও ক্রমে সূচিত করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 1 ঃ একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে বলগুলো এদের ক্রিয়ারেখার সমান্তরাল বাহুবিশিষ্ট যে কোন ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক হবে। এটি বল ত্রিভুজের বিপরীত সূত্র

হিসেবেও প্রকাশ করা যাবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2 ঃ একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল যে কোন সংখ্যক বলকে যদি একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো দ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রম নির্দেশ করা যায় তবে বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে। এটি বলের বহুভুজ সূত্র হিসেবে পরিচিত।

উদাহরণ 1 ঃ *ABCD* একটি চতুর্ভুজ। একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল কয়েকটি বল মানে ও দিকে $2AB$, $3BC$, $2CD$, DA, CA ও DB দ্বারা প্রকাশ করলে দেখান যে, বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।



চিত্র: ৭.৬.৩

সমাধান : ΔABC হতে পাই

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0\text{.........(i)}$$

[বলত্রিভুজ সূত্র হতে]

ΔBCD হতে পাই $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=0$ .... (ii)

আবার চতুর্ভুজ *ABCD* হতে পাই

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=0\text{ .... (iii)}$$

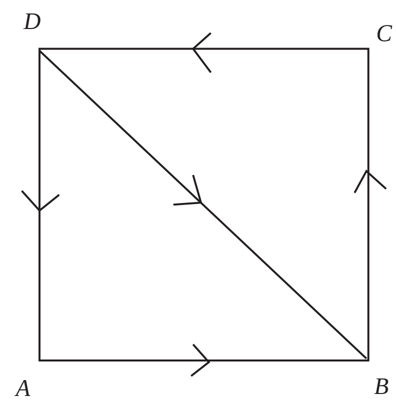
[অনুসিদ্ধান্ত-২ অর্থাৎ বলের বহুভুজ সূত্র হতে]

(i)+ (ii) + (iii) হতে পাওয়া যায় –

$$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}=0$$

অর্থাৎ বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।

উদাহরণ 2 ঃ *ABCD* একটি বর্গক্ষেত্র। $2\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ বলগুলো একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল থাকলে দেখান যে, এরা ভারসাম্য সৃষ্টি করে।



KY©: 7.6.4

সমাধান : বলগুলোর লব্ধি

$$=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$$

$$=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$$

$$=0+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\quad\text{[অনুসিদ্ধান্ত (ii) হতে পাই]}$$

$$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\quad[\because AD||BC \text{ এবং } AD=BC]$$

$= 0$ [বলত্রিভুজের সূত্র অনুসারে]

উদাহরণ 3 ঃ কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হতে মধ্যমাত্রা বরাবর কার্যরত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। দেখান যে, বলগুলো অনুষঙ্গী মধ্যমার দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।

সমাধান ঃ P,Q,R বল তিনটি ΔABC এর মধ্যমা AD, BE ও CF বরাবর ক্রিয়াশীল। বলগুলো এদের ছেদবিন্দুতে ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থায় আছে।

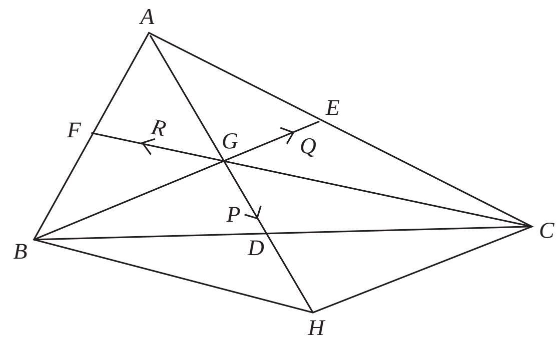
GD কে H বরাবর বর্ধিত করুন যেন, $GD=DH$ হয়। এখন $BHCG$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন।

$GH = 2GD = \frac{2}{3}\ AD$ [আমরা জানি $GD=\frac{1}{3}\ AD$]

$HC \parallel BG$

$HC=BG=\frac{2}{3}\ BE$

$\therefore\ P,Q,R$ বল তিনটিকে ΔGHC এর $PH,\ HC$ ও CG এর সামান্তরিক বরাবর কার্যরত থেকে সাম্যাবস্থায় থাকবে।



চিত্রঃ ৭.৬.৫

সুতরাং বল ত্রিভুজের বিপরীত সূত্র অর্থাৎ অনুসিদ্ধান্ত 1 হতে পাই–

$$\frac{P}{GH} = \frac{Q}{HC} = \frac{R}{CG}$$

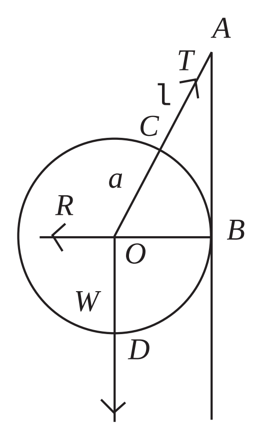
অর্থাৎ
$$\frac{P}{\frac{2}{3}AD} = \frac{Q}{\frac{2}{3}BE} = \frac{R}{\frac{2}{3}CF}$$

$$\therefore \frac{P}{AD} = \frac{Q}{BE} = \frac{R}{CF}$$

$$\therefore P ঃ Q ঃ R = AD ঃ BE ঃ CF$$

উদাহরণ 4 ঃ W ওজন ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলক উল্লম্ব মসৃণ দেয়ালের কোন একটি বিন্দুতে l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সূতার সাহায্যে এবং অপর প্রান্ত মসৃণ গোলকটির উপরিস্থিত কোন বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। গোলকটি দেয়ালের সংস্পর্শে সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ করুন যে, সূতার টান $= \frac{W(a+l)}{\sqrt{2al+l^2}}$

সমাধানঃ মনে করুন গোলকটির কেন্দ্র O এবং গোলকটি B বিন্দুতে দেয়ালের সংস্পর্শে আছে। রশিটির দৈর্ঘ্য l যার এক প্রান্ত দেয়ালের সাথে A বিন্দুতে এবং আপর প্রান্ত গোলকের উপর C বিন্দুতে সংযুক্ত। গোলকের ওজন W এর কার্যরেখা লম্বরেখা OD বরাবর, B বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া বল R দেয়ালের সাথে লম্ব BO বরাবর ক্রিয়াশীল।



চিত্রঃ ৭.৬.৬

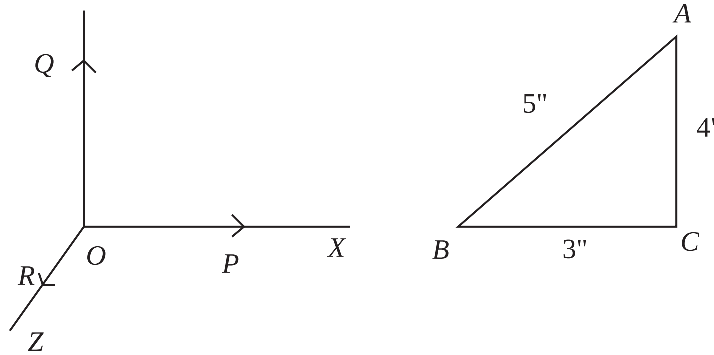
যেহেতু গোলকটি দেয়ালের সাথে সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই তৃতীয় বল সুতার টান T অবশ্যই OCA বরাবর ক্রিয়াশীল থাকবে। কাজেই ΔAOB এর বাহু তিনটির সমান্তরাল বরাবর বল তিনটিকে প্রকাশ করা যাবে।

$$\therefore \frac{T}{OA} = \frac{W}{AB} \quad \therefore T = \frac{W.OA}{AB} \frac{(a+l)W}{\sqrt{(a+l)^2-a^2}}$$

$$\therefore T = \frac{(a+l)W}{\sqrt{2al+l^2}}$$

উদাহরণ 5 ঃ সুস্থিত তিনটি বলের ক্রিয়া রেখা ΔABC এর $BC,\ CA$ ও AB বাহুর সমান্তরাল। বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3,4,5 ইঞ্চি। BC ও CA বাহুর সমান্তরাল বরাবর ক্রিয়ারত বলদ্বয়ের সমষ্টি 42 পাউন্ড ওজন হলে

বলগুলোর মান নির্ণয় করুন।



KY©: 7.6.7

সমাধান ঃ মনে করুন, তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে OX, OY ও OZ বরাবর ক্রিয়াশীল এরা যথাক্রমে ΔABC এর BC, CA ও AB বাহু তিনটির সমান্তরাল বরাবর কার্যরত।

যেহেতু $5^2=3^2+4^2$, কাজেই $\square ACB = 90°$

যেহেতু বল তিনটি সুস্থিত আছে, কাজেই বলত্রিভুজের বিপরীত সূত্র ব্যবহার করে পাই–

$$\frac{P}{3} = \frac{Q}{4} = \frac{R}{5} = \frac{P+Q}{3+4} = \frac{42}{7} = 6$$

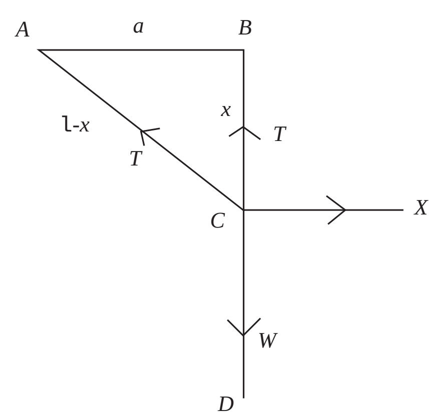
$\therefore$ $P = 18$ পাউন্ড ওজন

$Q = 24$ পাউন্ড ওজন

$\therefore$ $R = 30$ পাউন্ড ওজন।

উদাহরণ 6 ঃ পরস্পর a দূরত্বে কোন অনুভূমিক রেখার A ও B বিন্দুতে সংযুক্ত l দৈর্ঘ্যের একটি রশির উপর দিয়ে W ওজনের মসৃণ আংটিটি অবাধে চলাচল করতে পারে। P মানের একটি অনুভূমিক বল আংটিটিকে টেনে B বিন্দুর ঠিক নিচে একে সাম্যাবস্থায় রাখে। প্রমাণ করুন যে, $P=\frac{aW}{l}$, রাশির টান $T = \frac{W(a^2+l^2)}{2l^2}$ যেখানে $l>a$.

সমাধান ঃ l দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি রশির দুই প্রান্ড় A ও B বিন্দুতে সংযুক্ত আছে যেখানে $AB = a$, $AC+BC=l$। $BC = x$ হলে $AC=l-x$ হবে।



KY©: 7.6.8

W ওজনের একটি আংটিকে P মানের অনুভূমিক বল প্রয়োগে B বিন্দুর খাড়া নিচে C বিন্দুতে সাম্যাবস্থায় রাখা হয়েছে।

যেহেতু আংটিটি অবাধে চলাচল করে, তাই রশির টান T সর্বত্র একই হবে।

যেহেতু BCD একই রেখা, কাজেই CB বরাবর রশির টান T এবং CD বরাবর আংটির ওজন W ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি BC বরাবর $(W-T)$ হবে।

ΔACB এর CA বরাবর T, AB এর সমান্ড়রাল বরাবর P বল ও BC বরাবর $W-T$ কার্যশীল থেকে আংটিটি সাম্যাবস্থায় আছে।

সুতরাং বল ত্রিভুজের বিপরীত সূত্র হতে পাই–

$$\frac{T}{AC} = \frac{P}{AB} = \frac{W-T}{BC} = \frac{T+W-T}{AC+BC} = \frac{W}{1}$$

$$\therefore P = \frac{W}{1} . AB = \frac{Wa}{1}$$

আবার, $T = \frac{W}{1} . AC = \frac{W}{l} .(1 - x)$

এখন $AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $(1 - x)^2 = a^2 + x^2$

বা, $- 21x + 1^2 = a^2$

বা, $x = \frac{1^2 - a^2}{21}$

$$\therefore 1 - x = 1 - \frac{1^2 - a^2}{21} = \frac{21^2 - 1^2 + a^2}{21} = \frac{1^2 + a^2}{21}$$

$$\therefore T = \frac{W}{1} . \frac{1^2 + a^2}{21} = \frac{W (1^2 + a^2)}{21^2}$$

পাঠ-৭
লামির সূত্র ও তার বিপরীত সূত্র

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি−

- লামির সূত্রের বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন;
- লামির সূত্রের বিপরীত সূত্রের বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন;
- সূত্রগুলো ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

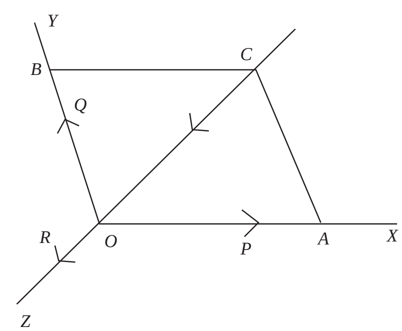
লামির সূত্র (Lami's Theorem)

একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তাদের প্রত্যেকটির মান অপর দুইটির অন্তর্গত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হবে।

মনে করুন, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর কার্যরত P, Q ও R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\frac{P}{\sin YOZ}=\frac{Q}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}$$

অর্থাৎ $$\frac{P}{\sin(Q\square R)}=\frac{Q}{\sin(R\square P)}=\frac{R}{\sin(P\square Q)}$$



KY©: 7.7.1

প্রমাণ ঃ OX ও XY রেখা বরাবর Aও B বিন্দুকে এমনভাবে নিন যেন, OA ও OB রেখাংশ দ্বারা P ও Q বলকে দিকে, মানে ও ক্রমে সূচিত করা যায়। এখন $OACB$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন। সুতরাং বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে কর্ণ OC দিকে ও মানে P ও Q বলের লব্ধি নির্দেশ করবে।

যেহেতু বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই লব্ধি বলটি প্রদত্ত তৃতীয় বল R এর সমান এবং বিপরীত দিকে ক্রিয়া করবে অর্থাৎ R বলটি অবশ্যই CO দ্বারা প্রকাশিত হবে।

$\therefore\ \Delta OAC$ হতে সাইন সূত্র প্রয়োগ করে পাই−

$$\frac{OA}{\sin OCA}=\frac{AC}{\sin AOC}=\frac{CO}{\sin CAO}\ \dots\dots\dots\dots\dots\ \text{(i)}$$

যেহেতু $AC||OB,\ \therefore\ OCA=BOC=\pi-YOZ$

অনুরূপভাবে, $AOC=\pi-ZOX$ এবং $CAO=\pi-CAX$

সুতরাং (i) হতে পাই−

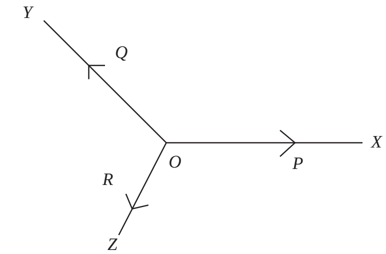
$$\frac{P}{\sin(\pi\text{-}YOZ)}=\frac{Q}{\sin(\pi-ZOX)}=\frac{R}{\sin(\pi-CAX)}$$

$$\therefore\quad \frac{P}{\sin YOZ}=\frac{Q}{\sin ZOX}=\frac{R}{\sin XOY}\qquad [\square CAX=\square XOY]$$

অর্থাৎ $$\frac{P}{\sin(Q \wedge R)} = \frac{Q}{\sin(R \wedge P)} = \frac{R}{\sin(P \wedge Q)}$$

ভেক্টর পদ্ধতি

মনে করুন, OX, OY ও OZ বরাবর $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ক্রিয়াশীল আছে।



KY©: 7.7.2

যেহেতু একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ থেকে তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$$

$\vec{R}$ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভেক্টর গুণন করে পাই–

$$\vec{R} \times \vec{P} + \vec{R} \times \vec{Q} + \vec{R} \times \vec{R} = 0$$

$$\therefore \left|\vec{R}\right| \left|\vec{P}\right| \sin(R \wedge P)\vec{n} - \left|\vec{R}\right| \left|\vec{Q}\right| \sin(R \wedge Q)\vec{n} = 0 \qquad \left[\vec{R} \times \vec{R} = 0\right]$$

যেখানে $\vec{n}$, P, Q, R ক্রিয়ারেখার উপর একক লম্ব ভেক্টর

$$RP\sin(R \wedge P) = QR\sin(Q \wedge R)$$

$$\therefore \frac{P}{\sin(Q \wedge R)} = \frac{Q}{\sin(R \wedge P)} \;......(i)$$

অনুরূপভাবে, $$\frac{Q}{\sin(R \wedge P)} = \frac{R}{\sin(P \wedge Q)} \;....... (ii)$$

(i) ও (ii) হতে পাই–

$$\frac{P}{\sin(Q \wedge R)} = \frac{Q}{\sin(R \wedge P)} = \frac{R}{\sin(P \wedge Q)}$$

লামির সূত্রের বিপরীত সূত্র (Converse of Lami's theorem)

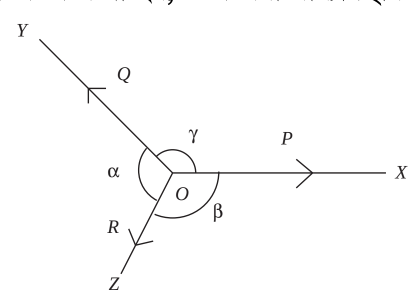
কোন বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বলের প্রত্যেকটি যদি অপর দুটি বলের ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণের সমানুপাতিক হয় এবং এদের কোনটির ক্রিয়ারেখা অপর দুটির অন্তঃস্থ কোণের অন্তর্বর্তী না হয়, তবে এরা সাম্যাবস্থায় থাকবে।

মনে করুন, O বিন্দুতে OX, OY ও OZ বরাবর যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি কার্যরত এবং

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma} = K \text{ (ধরুন)}$$

যেখানে, $\angle XOY = \gamma$, $\angle YOZ = \alpha$ এবং $\angle ZOX = \beta$

প্রমাণ করতে হবে বলত্রয় সাম্যাবস্থায় থাকবে।



KY©: 7.7.3

প্রমাণ : মনে করুন, $P = K\sin\alpha$, $Q = K\sin\beta$ এবং $R = K\sin\gamma$

ধরুন, বলগুলোর লব্ধি F, OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

বলগুলোকে OX বরাবর বিভাজন করে পাই–

$$F\cos\theta = P\cos 0^\circ + Q\cos\gamma + R\cos(\gamma+\alpha)$$
$$= P + Q\cos\gamma + R\cos(2\pi-\beta) \quad [\gamma+\alpha = 2\pi-\beta]$$
$$F\cos\theta = K\sin\alpha + K\sin\beta\cos\gamma + K\sin\gamma\cos\beta$$
$$= K[\sin\alpha + \sin(\beta+\gamma]$$
$$= K[\sin\alpha + \sin(2\pi-\alpha)] \quad [\beta+\gamma = 2\pi-\alpha]$$
$$= K[\sin\alpha - \sin\alpha] = 0 \text{ .... (i)}$$

আবার বলগুলোকে OX এর উপর লম্ব বরাবর বিভাজন করে পাই–

$$F\sin\theta = P\sin 0 + Q\sin\gamma + R\sin(\gamma+\alpha)$$
$$= Q\sin\gamma + \text{R}\sin(2\pi-\beta)$$
$$= Q\sin\gamma - R\sin\beta$$
$$= K\sin\beta\sin\gamma - K\sin\gamma\sin\beta$$
$$= 0 \text{ .... (ii)}$$

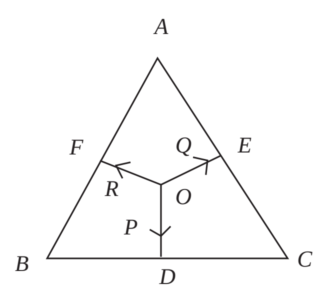
এখন (i) ও (ii) বর্গ করে যোগ করে পাই–

$$F^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0$$
$$\therefore F^2 = 0$$
$$\therefore F = 0$$

যেহেতু বলগুলোর লব্ধি বলের মান শূন্য, কাজেই বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকবে।

উদাহরণ 1ঃ ΔABC এর অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু হতে এর বাহুগুলোর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে, প্রমাণ করুন যে, $P:Q:R = \sin A : \sin B : \sin C$

সমাধান ঃ মনে করুন, O, ΔABC এর অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু। O বিন্দু হতে BC, CA ও AB এর উপর OD, OE ও OF লম্ব টানুন। P, Q, R বলত্রয় OD, OE ও OF বরাবর ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই লামির সূত্র হতে পাই–



KY©: 7.7.4

$$\frac{P}{\sin\angle FOE} = \frac{Q}{\sin\angle DOF} = \frac{R}{\sin\angle DOE}$$

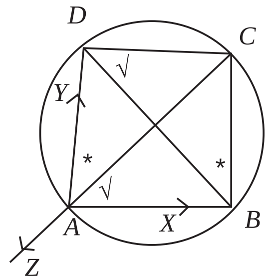
বা, $\dfrac{P}{\sin(\pi-A)} = \dfrac{Q}{\sin(\pi-B)} = \dfrac{R}{\sin(\pi-C)}$ $[\angle EOF + A = \pi \therefore \angle EOF = \pi - A$ অনুরূপভাবে $\angle DOF = \pi - B, \angle DOE = \pi - C]$

বা, $\dfrac{P}{\sin A} = \dfrac{Q}{\sin B} = \dfrac{R}{\sin C}$

$\therefore P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$

উদাহরণ 2 ঃ X, Y বল দুটি যথাক্রমে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ $ABCD$ এর বাহু AB এবং AD বরাবর কার্যরত। যদি এরা CA কর্ণ বরাবর ক্রিয়াশীল Z পরিমানের বল দ্বারা নিষ্ক্রিয় হয় তবে দেখান যে, $X : Y : Z = CD : CB : BD$

সমাধান ঃ যেহেতু A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই লামির সূত্র ব্যবহার করে পাই–



KY©: 7.7.5

$$\frac{X}{\sin\angle DAZ} = \frac{Y}{\sin\angle BAZ} = \frac{Z}{\sin BAD}$$

বা, $$\frac{X}{\sin(\pi-\angle CAD)} = \frac{Y}{\sin(\pi-\angle CAB)} = \frac{Z}{\sin(\pi-\angle BCD)}$$

বা, $$\frac{X}{\sin\angle CAD} = \frac{Y}{\sin\angle CAB} = \frac{Z}{\sin\angle BCD}$$

$$\therefore \frac{X}{\sin\angle CBD} = \frac{Y}{\sin\angle BDC} = \frac{Z}{\sin\angle BCD} \text{..........(i)}$$

[একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ বলে $\angle CAD = \angle CBD,$ $\angle CAB = \angle BDC$]

আবার ΔBCD হতে সাইন সূত্র ব্যবহার করে পাই–

$$\frac{CD}{\sin\angle CBD} = \frac{CB}{\sin\angle BDC} = \frac{BD}{\sin\angle BCD} \text{ .... (ii)}$$

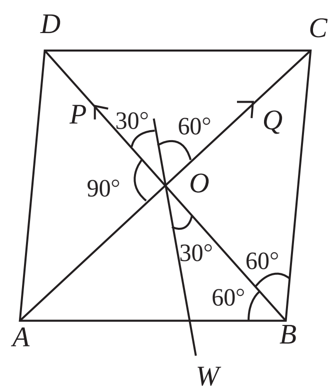
(i) ও (ii) হতে পাই–

$$\frac{X}{CD} = \frac{Y}{CB} = \frac{Z}{BD}$$

$$\therefore X : Y : Z = CD : CB : BD$$

উদাহরণ 3 ঃ একটি $120°$ কোণ বিশিষ্ট সমরূপ পাতের রম্বস-এর কর্ণ বরাবর P ও Q $(P>Q)$ বলদ্বয় সাম্যাবস্থায় আছে। রম্বসের একটি বাহু অনুভূমিক। দেখান যে, $P^2=3Q^2$

সমাধান ঃ মনে করুন, $ABCD$ একটি রম্বসের $\angle ABC = 120°$, AB বাহু অনুভূমিক অবস্থায় আছে। সমরূপ পাতের রম্বসের ওজন W, এর কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O এর নিচের দিকে খাড়াভাবে ক্রিয়াশীল। যেহেতু রম্বসটি সাম্যাবস্থায় আছে, P ও Q বলের লব্ধি W এর সমান ও বিপরীতমুখী হবে। যেহেতু রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখন্ডিত করে এবং $P>Q$ কাজেই P বলটি OD বরাবর এবং Q বলটি OC বরাবর ক্রিয়াশীল হবে।



চিত্র: ৭.৭.৬

অতএব, লামির সূত্রানুসারে পাই–

$$\frac{P}{\sin(96+30°)} = \frac{Q}{\sin(90°+60°)} = \frac{W}{\sin 90°}$$

$$\therefore \frac{P}{\cos 30°} = \frac{Q}{\cos 60°}$$

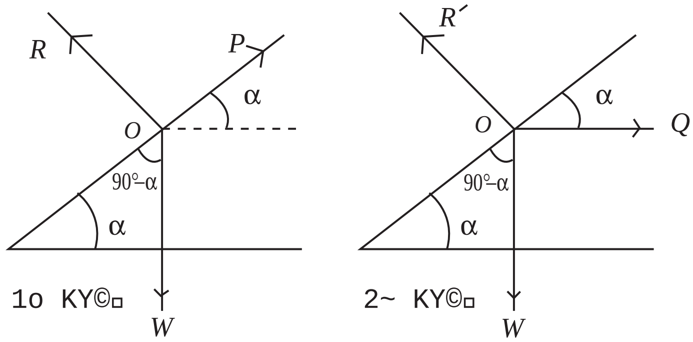
বা, $\dfrac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{Q}{\frac{1}{2}}$

$\therefore P = \sqrt{3}\ Q$

অর্থাৎ $P^2 = 3Q^2$

উদাহরণ 4 ঃ কোন মসৃণ আনত তলের দৈর্ঘ্য বরাবর P বল এবং ইহার ভূমির সমান্তরাল রেখা বরাবর Q বল দুটি পৃথক পৃথকভাবে W ওজনের কোন বস্তুকে উক্ত তলের উপর সূচিত রাখে। প্রমাণ করুন যে, $\dfrac{1}{P^2} - \dfrac{1}{Q^2} = \dfrac{1}{W^2}$

সমাধান ঃ মনে করুন তলটি অনুভূমিকের সাথে α কোণে আনত এবং বস্তুটি O বিন্দুতে সুস্থিত আছে।



KY©: 7.7.7

১ম চিত্রে প্রতিক্রিয়া বল R, তলের সাথে লম্ব বরাবর, P বলটি তল বরাবর এবং বস্তুর ওজন O বিন্দু হতে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়াগামী থেকে বস্তুটিকে সাম্যাবস্থায় রাখে। সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই–

$$\frac{P}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{W}{\sin 90°} = \frac{R}{\sin(90°+\alpha)}$$

$\therefore \dfrac{P}{\sin\alpha} = W \quad \therefore \dfrac{W}{P} = \operatorname{cosec}\alpha$ .... (i)

২য় চিত্রে Q বলটি অনুভূমিকের দিকে, W ওজন খাড়া নিচের দিকে এবং R' বলটি তলের সাথে লম্বভাবে O বিন্দুতে ক্রিয়া থেকে বস্তুটিকে সাম্যাবস্থায় রাখে।

$\therefore$ লামির সূত্র হতে পাই–

$$\frac{R}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{W}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{R'}{\sin 90°}$$

$\therefore \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{W}{\cos\alpha} \quad \therefore \dfrac{W}{Q} = \cot\alpha$ ...... (ii)

(i) হতে পাই–

$\dfrac{W^2}{P^2} = \operatorname{cosec}^2\alpha = 1+\cot^2\alpha = 1 + \dfrac{W^2}{Q^2}$ [(ii) হতে পাই]

$$\frac{W^2}{P^2} - \frac{W^2}{Q^2} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$$

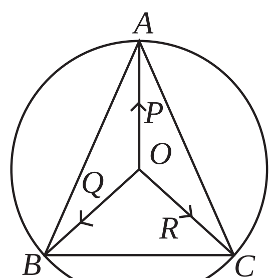
উদাহরণ 5 ঃ $\Delta\, ABC$ এর পরিকেন্দ্র O। $OA,\ OB,\ OC$ বরাবর যথাক্রমে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করুন।

(i) $\dfrac{P}{\sin 2A} = \dfrac{Q}{\sin 2B} = \dfrac{R}{\sin 2C}$

(ii) $\dfrac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \dfrac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \dfrac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

(iii) $\dfrac{P}{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{a^2}{b^2c^2}} = \dfrac{Q}{\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{b^2}{c^2a^2}} = \dfrac{R}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{c^2}{a^2b^2}}$

সমাধান ঃ যেহেতু বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই লামির সূত্রানুসারে পাই−



KY©: 7.7.8

$$\frac{P}{\sin\angle BOC} = \frac{Q}{\sin\angle COA} = \frac{R}{\sin\angle AOB}$$

$$\therefore \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

[যেহেতু কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।]

বা, $\dfrac{P}{2\sin A\cos A} = \dfrac{Q}{2\sin B\cos B} = \dfrac{R}{2\sin C\cos C}$

বা, $\dfrac{P}{\dfrac{a}{R'}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \dfrac{Q}{\dfrac{b}{R'}\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)} = \dfrac{R}{\dfrac{c}{R'}\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}$

[ত্রিভুজের ধর্ম হতে পাই− $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = R'$ এবং, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$]

বা, $\dfrac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \dfrac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)} = \dfrac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$

বা, $\dfrac{P}{\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{a^2}{b^2c^2}} = \dfrac{Q}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{b^2}{a^2c^2}} = \dfrac{R}{\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{c^2}{a^2b^2}}$ [হরকে $a^2b^2c^2$ দ্বারা ভাগ করে]

উদাহরণ 6 ঃ ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র I। $IA,\ IB,\ IC$ বরাবর ক্রিয়ারত $P,\ Q,\ R$ বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করুন যে,

(i) $\dfrac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{R}{\cos\frac{C}{2}}$

(ii) $\dfrac{P^2}{a(b+c-a)} = \dfrac{Q^2}{b(c+a-b)} = \dfrac{R^2}{c(a+b-c)}$

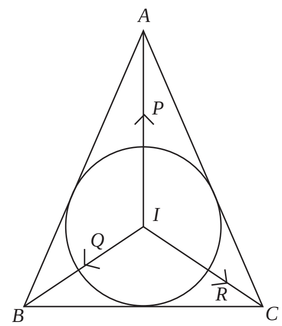
সমাধান ঃ

ΔABC এর অন্ত:কেন্দ্র I। IA, IB, IC বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে।

যেহেতু IA, IB, IC দ্বারা $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ কে সমদ্বিখন্ডিত করা হয়েছে।

সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই–

$$\frac{P}{\sin\angle BIC} = \frac{Q}{\sin\angle CIA} = \frac{R}{\sin\angle AIB}$$



KY©: 7.7.9

বা, $\dfrac{P}{\sin\left\{\pi-\left(\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}\right)\right\}} = \dfrac{Q}{\sin\left\{\pi-\left(\dfrac{C}{2}+\dfrac{A}{2}\right)\right\}} = \dfrac{R}{\sin\left\{\pi-\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)\right\}}$

বা, $\dfrac{P}{\sin\left(\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}\right)} = \dfrac{Q}{\sin\left(\dfrac{C}{2}+\dfrac{A}{2}\right)} = \dfrac{R}{\sin\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)}$

বা, $\dfrac{P}{\sin\left(\pi-\dfrac{A}{2}\right)} = \dfrac{P}{\sin\left(\pi-\dfrac{B}{2}\right)} = \dfrac{P}{\sin\left(\pi-\dfrac{C}{2}\right)}$

বা, $\dfrac{P}{\cos\dfrac{A}{2}} = \dfrac{Q}{\cos\dfrac{B}{2}} = \dfrac{R}{\cos\dfrac{C}{2}}$

বা, $\dfrac{P^2}{\cos^2\dfrac{A}{2}} = \dfrac{Q^2}{\cos^2\dfrac{B}{2}} = \dfrac{R^2}{\cos^2\dfrac{C}{2}}$

বা, $\dfrac{P^2}{\dfrac{1}{2}(1+\cos A)} = \dfrac{Q^2}{\dfrac{1}{2}(1+\cos B)} = \dfrac{R^2}{\dfrac{1}{2}(1+\cos C)}$

বা, $\dfrac{P^2}{1+\cos A} = \dfrac{Q^2}{1+\cos B} = \dfrac{R^2}{1+\cos C}$

বা, $\dfrac{P^2}{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \dfrac{Q^2}{1+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \dfrac{R^2}{1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$

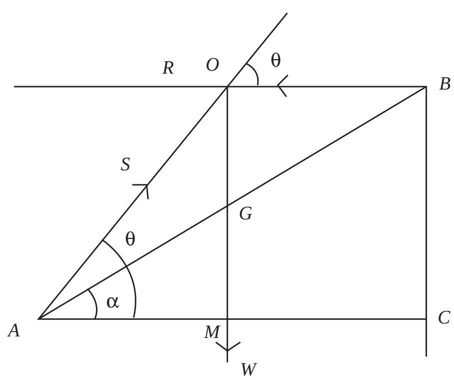
বা, $\dfrac{P^2}{\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \dfrac{Q^2}{\dfrac{2ca+c^2+a^2-b^2}{2ca}} = \dfrac{R^2}{\dfrac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}}$

$$\text{বা, } \frac{P^2}{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}} = \frac{Q^2}{\frac{(c+a)^2-b^2}{2ca}} = \frac{R^2}{\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}}$$

$$\text{বা, } \frac{P^2}{(a+b+c)\frac{(b+c-a)}{2bc}} = \frac{Q^2}{(a+b+c)\frac{(c+a-b)}{2ca}} = \frac{R^2}{(a+b+c)\frac{(a+b-c)}{2ab}}$$

$$\text{বা, } \frac{P^2}{a(b+c-a)} = \frac{Q^2}{b(c+a-b)} = \frac{R^2}{c(a+b-c)}$$

উদাহরণ 7 : W ওজনের সুষম দন্ড AB কে A বিন্দুতে অবস্থিত কব্জার সাহায্যে আটকানো আছে যা ঘুরানো যায়। অনুভূমিকের সাথে α কোণে দন্ডটি মসৃন উল্লম্ব তলে ঠেস দিয়া সাম্যাবস্থায় আছে। দেখান যে, কব্জাটির প্রতিক্রিয়া $= W\sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\alpha+1}$ এবং প্রতিক্রিয়ার দিক নির্ণয় করুন।



চিত্র: ৭.৭.১০

সমাধান : মনে করুন, দেয়াল BC, AB দন্ড এবং AC ভূ-সমতল। দেয়ালের প্রতিক্রিয়া R এর লম্ব দিকে OB বরাবর, কব্জার প্রতিক্রিয়া S, AO বরাবর ক্রিয়াশীল।

যেহেতু দন্ডটি সাম্যাবস্থায় আছে, কাজেই দন্ডের ওজন W, O এর মধ্যদিয়ে OGM বরাবর ক্রিয়াশীল। ধরুন, কব্জার প্রতিক্রিয়া বল S, AC এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং লামির সূত্র হতে পাই–

$$\frac{S}{\sin 90^\circ} = \frac{W}{\sin(180^\circ-\theta)} = \frac{R}{\sin(90^\circ+\theta)}$$

$$\therefore\ S = \frac{W}{\sin\theta} = W\operatorname{cosec}\theta$$

এখন $\operatorname{cosec}\theta = \frac{AO}{OM}$

$$= \sqrt{\frac{OM^2+AM^2}{OM^2}}$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{AM}{OM}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+\left(2\frac{AC}{BC}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{4}\cot^2\alpha}$$

$$\therefore\ S = W\sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\alpha+1}$$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{OM}{AM} = \dfrac{BC}{\frac{1}{2}AC}$ [$GM \parallel BC, \therefore AM = \frac{1}{2}AC$ যেখানে G, AB এর মধ্যবিন্দু।]

$$= 2\frac{BC}{AC} = 2\tan\alpha$$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(2\tan\alpha)$

অনুশীলনী–৭.১

1. ΔABC এর সমতলে O একটি বিন্দু। P,E,F যথাক্রমে BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু। দেখান যে, $\overset{\varnothing}{DO}$’ $\overset{\varnothing}{OF}$’ $\overset{\varnothing}{OE}$ বল তিনটির লব্ধি $\overset{\varnothing}{OA}$

2. ΔABC এর BC এর উপর যে কোন একটি বিন্দু P। ΔABC এর বাইরে Q অপর একটি বিন্দু। $\overset{\varnothing}{AP} + \overset{\varnothing}{PB} + \overset{\varnothing}{PC} = \overset{\varnothing}{PQ}$ হলে দেখান যে, $\overset{\varnothing}{AB} = \overset{\varnothing}{CQ}$ ।

3. $\overset{\varnothing}{OA}$’ $\overset{\varnothing}{OB}$’ $\overset{\varnothing}{OC}$ বলগুলো O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। ΔABC এর ভরকেন্দ্র G হলে দেখান যে, বলগুলোর লব্ধি $3\overset{\varnothing}{OG}$ ।

4. $ABCD$ সামান্তরিকের DC এর মধ্যবিন্দু E। দেখান যে, $\overset{\varnothing}{AB}$’ $\overset{\varnothing}{AC}$ এবং $2\overset{\varnothing}{AE}$ এর লব্ধি $3\overset{\varnothing}{AC}$.

5. $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র। P মানের চারিটি বল AB, CB, AD, DC বরাবর ক্রিয়ারত থাকলে এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।

6. $ABCD$ চতুর্ভুজের BC ও AD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। $\overset{\varnothing}{AB}$ ও $\overset{\varnothing}{DC}$ বলদ্বয় কোন এক বিন্দুতে কার্যরত হলে দেখান যে, লব্ধি $\overset{\varnothing}{2FE}$ হবে।

7. $ABCDE$ একটি সুষম পঞ্চভুজ। দেখান যে, $\overset{\varnothing}{AB}$’ $\overset{\varnothing}{AC}$’ $\overset{\varnothing}{AE}$’ $\overset{\varnothing}{BC}$’ $\overset{\varnothing}{DC}$ ও $\overset{\varnothing}{ED}$ এর লব্ধি $\overset{\varnothing}{3AC}$ হবে।

8. O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পর লম্বভাবে P বিন্দুতে ছেদ করে। দেখান যে, $\overset{\varnothing}{PA}$’ $\overset{\varnothing}{PB}$’ $\overset{\varnothing}{PC}$ ও $\overset{\varnothing}{PD}$ বলের লব্ধি $\overset{\varnothing}{2PO}$.

9. AB ও CD কোন বৃত্তের দুটি জ্যা সমান ও সমান্তরাল। P বিন্দু A ও B হতে সমদূরবর্তী পরিধিস্থ বিন্দু। প্রমাণ করুন যে, P বিন্দুতে ক্রিয়াশীল PA, PB, PC, PD দ্বারা দিকে ও মানে নির্দেশিত বলগুলোর লব্ধি ধ্রুবক।

10. দুটি বলের মান 24 পাউন্ড-ওজন ও 7 পাউন্ড-ওজন পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি নির্ণয় করুন।

11. দুটি বলের মান 24 পাউন্ড-ওজন ও 16 পাউন্ড-ওজন; এদের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি নির্ণয় করুন।

12. নির্দিষ্ট রেখা বরাবর কার্যরত $3P$ ও $2P$ বল দুটির লব্ধি R। যদি প্রথম বলের মান দ্বিগুণ করা হয়; তবে লব্ধিটিও দ্বিগুণ হয়। বলদুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

13. $2P$ ও P মানের দুটি বল একই বিন্দুতে পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত আছে। যদি $4P$ ও $(P+12)$ পরিমাণ বল যথাক্রমে **১ম** ও ২য় বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর কার্যরত হয়, তবুও এদের লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে। P বলের মান নির্ণয় করুন।

14. পরস্পর $60°$ কোণে আনত ক্রিয়ারেখা বরাবর কার্যরত P ও Q বলের লব্ধি R। প্রমাণ করুন যে, $2Q+P = \sqrt{4R^2-3P^2}$

15. দুটি অসমান বলের মধ্যবর্তী কোণ $135°$, যদি লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের সমান হয় তবে দেখান যে, বল দুটির

অনুপাত $\sqrt{2}$ ঃ 1.

16. কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে দুটি নির্দিষ্ট রেখা বরাবর ক্রিয়ারত P এবং Q বলের লব্ধি R। একই রেখা বরাবর ক্রিয়ারত $2P$এবং Q বলের লব্ধি $2R$। একই বিন্দুতে সম্পূরক কোণে ক্রিয়ারত P ও $2Q$ বলের লব্ধি $2R$ হলে দেখান যে, $5P^2=15Q^2=6R^2$.
17. কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি বলের লব্ধির মান এদের একটি বলের এক তৃতীয়াংশ এবং অপর বলের উপর লম্ব। প্রমাণ করুন প্রদত্ত বল দুটির অনুপাত 3ঃ$2\sqrt{2}$
18. P,Q বলদ্বয় ও এদের লব্ধি R, O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি কোন একটি ভেদক P,Q,R এর ক্রিয়ারেখাকে আড়াআড়িভাবে যথাক্রমে L,M,N বিন্দুতে ছেদ করে তবে দেখান যে, $\frac{P}{OL}+\frac{Q}{OM}=\frac{R}{ON}$
19. ΔABC এর BC, CA, AB বাহু তিনটির সমান্তরাল রেখা বরাবর P মানের তিনটি সমান বল কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। প্রমাণ করুন যে, এদের লব্ধি $R = P\sqrt{3 - 2cosA - 2\cos B-2\cos C}$
20. R-S, R, $R+S$ বলত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমান্তরাল বরাবর একই ক্রম অনুযায়ী কোন বিন্দুতে ক্রিয়াশীল, এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।
21. 2 পাউন্ড-ওজন, 4 পাউন্ড-ওজন ও 6 পাউন্ড-ওজন তিনটি বল নির্দিষ্ট রেখা বরাবর কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। বলগুলোর ক্রিয়ারেখা পরস্পর 120° কোণে আনত হলে, এদের লব্ধির মান ও লব্ধিটি প্রথম বলের ক্রিয়ারেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।
22. একটি সুষম ষড়ভুজের কোন কৌণিক বিন্দুতে বিপরীত কোণগুলোর দিকে যথাক্রমে $2, \sqrt{3}, 5, \sqrt{3}$ এবং 2 পাউন্ড-ওজন পরিমাণের বল ক্রিয়া করে। এদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় করুন।
23. ΔABC এর অভ্যন্তরে O একটি বিন্দু। $\overset{\varnothing}{OA}, \overset{\varnothing}{OB}, \overset{\varnothing}{OC}$ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রমাণ করুন যে, O বিন্দুটি ΔABC এর মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু।
24. ΔABC চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা G তে সমদ্বিখন্ডিত হয়। দেখানব যে, $\overset{\varnothing}{GA}, \overset{\varnothing}{GB}, \overset{\varnothing}{GC}, \overset{\varnothing}{GD}$ বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।
25. ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F। প্রমাণ করুন যে, $\overset{\varnothing}{AD}, \overset{\varnothing}{BE}$ ও $\overset{\varnothing}{CF}$ বলত্রয় একটি বস্তুকণার উপর কার্যরত থাকলে তা সাম্যাবস্থায় থাকবে।
26. একটি বৃত্তের পরিধির উপর P যে কোন বিন্দু। AB ও DC দুটি সমান ও সমান্তরাল জ্যা। দেখান যে, $\overset{\varnothing}{PA}, \overset{\varnothing}{BP}, \overset{\varnothing}{PC}, \overset{\varnothing}{DP}$ বলগুলো সাম্যাবস্থায় থাকবে।
27. 1ঃ 2ঃ 3 অনুপাতের তিনটি বল কোন অবস্থানে একটি বস্তুকে সাম্যাবস্থায় রাখতে পারে তা নির্ণয় করুন।
28. কোন ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ দিকে কোন বিন্দু হতে তার বাহুগুলোর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে, প্রমাণ করুন যে, প্রদত্ত বলসমূহ অনুষঙ্গী বাহুর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক।
29. 31 ইঞ্চি লম্বা একটি তারের দুই প্রান্ত 25 ইঞ্চি দূরে একতলীয় দুটি বিন্দুতে যুক্ত। তারটির একপ্রান্ত হতে 7 ইঞ্চি দূরে 5 পাউন্ড-ওজন বল ঝুলানো হলে তারের দুটি অংশের টানের পরিমাণ নির্ণয় করুন।
30. W ওজন বিশিষ্ট একটি মসৃণ আংটি একটি রশির উপর দিয়ে অবাধে চলাচল করতে পারে। রাশিটির প্রান্তদ্বয় একই অনুভূমিক রেখায় A ও B বিন্দুতে বাঁধা আছে। যদি $AB=2d$, রশির দৈর্ঘ্য $2l$ হয় তাহলে দেখান যে,

সাম্যাবস্থায় রশিতে টানের পরিমাণ $= \frac{Wl}{2l^2-d^2}$

31. একই অনুভূমিক রেখায় A ও B বিন্দুতে ACB সূতার প্রান্তদ্বয় বাঁধা আছে। এর C বিন্দুতে একটি ওজন W বাঁধা আছে। প্রমাণ করুন যে, CA অংশের টান $T=\frac{Wb}{4CA}(c^2+a^2-b^2)$ যেখানে BC, CA ও AB এর দৈর্ঘ্য a, b, c ও ΔABC এর ক্ষেত্রফল Δ.

32. OA, OB ও OC কোন সমতলে সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট তিনটি সরলরেখা এবং এরা O বিন্দুগামী কোন সরলরেখার একই পার্শ্বে নয়, P, Q, R বল তিনটি যথাক্রমে প্রদত্ত সরলরেখা বরাবর এমনভাবে ক্রিয়াশীল যেন, $\frac{P}{\Delta OBC} = \frac{Q}{\Delta OCA} = \frac{R}{\Delta OAB}$ । প্রমাণ করুন যে, P,Q,R বলগুলো সাম্যাবস্থায় আছে।

33. একটি হেলানো তলের উপর W ওজনের একটি বস্তু সুস্থিত আছে। একটি অনুভূমিক বল এবং তল বরাবর একটি বল পৃথকভাবে তলের উপর বস্তুটিকে সুস্থিত রাখে। যদি তলের প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R ও R' হয় তবে দেখান যে, $RR'=W^2$

34. 3 পাউন্ড-ওজনের একটি বস্তু একটি মসৃণ গোলকের উপর A বিন্দুতে সুস্থিত আছে। গোলকটির কেন্দ্র O এর খাড়া উপরে অবস্থিত কোন বিন্দু C হতে এর ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি রশি দ্বারা বস্তুটি সংযুক্ত। গোলকের ব্যাসার্ধ$=r$ এবং $CO= r\sqrt{3}$ হলে রশির টান নির্ণয় করুন।

35. ভূসমতলের সাথে α,β কোণে আনত দুটি মসৃণ সমতল ভূতলের একটি রেখার পরস্পর ছেদ করে এবং এরা এদের সাধারণ ছেদক রেখাগামী উল□ম্ব তলের দুই পার্শ্বে আছে। W ওজনের একটি গোলক তল দুটির মধ্যে স্থাপিত হলে, সাম্যাবস্থায় তলদ্বয়ের উপর চাপের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

36. ভূমির সাথে α কোণে আনত একটি মসৃণ তলের উপর একটি বস্তু উল- ম্বের সাথে γ কোণে আনত একটি রশির সাহায্যে সুস্থিত আছে। তলের নতি β হলে এবং $(\beta>\alpha)$ এবং উল- ম্বের সাথে রশির আনতি অপরিবর্তিত থাকলে বস্তুকে স্থিতিশীল রাখতে রশির টান দ্বিগুণ করতে হয়। দেখান যে, $\cot\alpha - \cot\gamma = 2\cot\beta$

উত্তরমালা

অনুশীলনী-৭.১

10. 25 পাউন্ড-ওজন　　11. 40 পাউন্ড-ওজন, 4 পাউন্ড-ওজন।　　12. 120°

13. 12 পাউন্ড-ওজন　　20. লব্ধি $\sqrt{3}$ S, R-S এর সাথে 210 ° কোন উৎপন্ন করে।

21. লব্ধি $2\sqrt{3}$, 210 °　　22. 10 পাউন্ড-ওজন , বিপরীত শীর্ষের দিকে।

27. প্রথম দ্বিতীয় বল একই রেখায় তৃতীয় বলের বিপরীত দিকে।

29. $4\frac{4}{5}$ পাউন্ড ও $1\frac{3}{5}$ পাউন্ড　　34. $\sqrt{3}$ পাউন্ড-ওজন

35. **Error!**, **Error!**