ইউনিট ▸ ৯

সরলরেখায় বা সমতলে চলমান কণার গতি

ভূমিকা

আমাদের চারিদিকে আমরা যে সমস্ত বস্তু দেখতে পাই তার কোনটা স্থির আবার কোনটা গতিশীল। সময়ের পরিবর্তনের সাথে কোন বস্তু স্থান পরিবর্তন করলে তা গতিশীল, আর স্থান পরিবর্তন না করলে তা স্থির। পূর্ববর্তী ইউনিট সমূহে স্থির বস্তুর ক্রিয়ারেখা, লব্ধি ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান ইউনিটে বেগের বিভিন্ন সূত্র ও চলমান বস্তুকণার ক্ষেত্রে গতিসূত্র, উল্লম্ব গতি সম্পর্কিত সূত্র ও উল্লম্ব তলে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার গতি সম্পর্কিত সূত্র ও এর ব্যবহারিক প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য ঃ এই ইউনিট শেষে আপনি–

- বেগের সামান্তরিক ও ত্রিভুজ সূত্র সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- আপেক্ষিক বেগের ধারণা লাভ করবেন;
- চলমান বস্তুকণার ক্ষেত্রে গতিসূত্রগুলো ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- উল্লম্ব গতির ক্ষেত্রে গতিসূত্রসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- উল্লম্ব তলে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার গতি সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে সূত্রগুলো প্রয়োগ করতে পারবেন।

পাঠ-১
বেগের সামান্তরিক ও ত্রিভুজ সূত্র

উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি–

- বেগের সামান্তরিক সূত্র ও ত্রিভুজ সূত্রটি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- কোন কণার উপর ক্রিয়ারত একাধিক বেগের লব্ধি নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে সূত্রগুলো প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

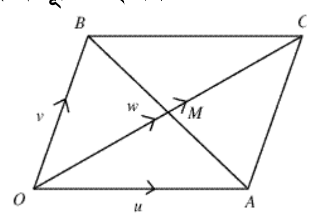
সরলপথে বস্ড়র সরণের হারকে বেগ বলে।

কোন বস্তুর উপর একই সঙ্গে একাধিক বেগ ক্রিয়ারত থাকলে, তাদের প্রভাবে একক বেগ সৃষ্টি হয়। এই সৃষ্ট বেগকে তাদের লব্ধি বেগ বলা হয়। বিপরীতভাবে আদিবেগগুলোকে সৃষ্ট বেগের উপাংশ বা অংশক বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় u ও v বেগদ্বয়ের লব্ধি w হলে, w এর উপাংশক বা অংশক হবে u ও v। বেগদ্বয় পরস্পর সমকোণে ক্রিয়া করলে, তাদেরকে w এর লম্বাংশ বলা হয়।

সরলপথে বস্তুর সরণের হারকে বেগ বলে।

বেগের সামান্তরিক সূত্র
যদি কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বেগ একটি সামান্ড়রিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হয়, তবে তাদের লব্ধিটি উক্ত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হবে।

গামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী চিত্রে O বিন্দুতে ক্রিয়ারত u ও v বেগদ্বয় যথাক্রমে $OACB$ সামান্তরিকের বাহু OA ও OB দ্বারা এবং তাদের লব্ধিবেগ w কর্ণ OC দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত।

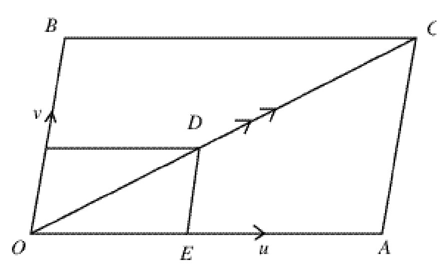


চিত্র: ৯.১.১

যদি কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বেগ একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হয়, তবে তাদের লব্ধিটি উক্ত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হবে।

সামান্তরিক সূত্রের প্রমাণ
মনে করুন, একটি বস্তুকণার উপর ক্রিয়ারত u ও v বেগদ্বয় যথাক্রমে $OACB$ সামান্তরিকের বাহু OA ও OB দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত।

বস্তুকণাটি v বেগের অনুপস্থিতিতে একক সময়ে u বেগের কারণে OA পথ অতিক্রম করত, আর u বেগের অনুপস্থিতিতে v বেগের কারণে OB পথ অতিক্রম করত।



চিত্র : ৯.১.২

বেগদ্বয় একই সময়ে ক্রিয়ারত থাকায় u বেগের কারণে OA এর দিক বরাবর সরণের সাথে v বেগের কারণে OB এর দিক বরাবর বস্তুটির সরণ হবে। তাই একক সময় পর তার অবস্থান হবে C বিন্দু।

মনে করুন, একক সময়ের যে কোন ভগ্নাংশ t সময় পর কণাটি D বিন্দুতে অবস্থান করে। BO এর সমান্তরাল DE টানুন। এক্ষেত্রে

$OE = ut$ ও $DE = vt$

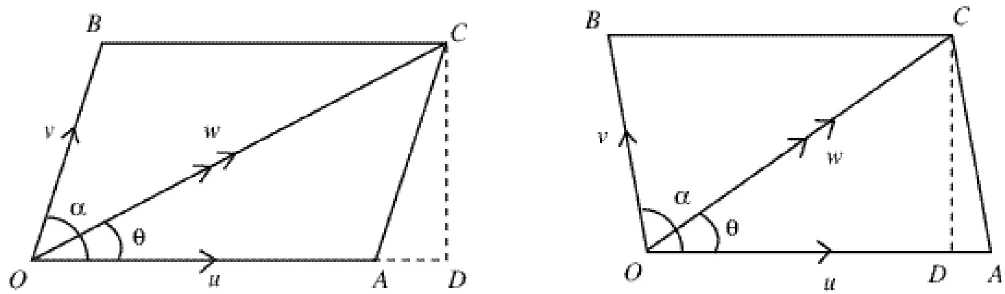
আবার $OA = u$, $OB = v$

এখন, $\frac{OE}{DE} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v} = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{AC}$

অতএব DE সমান্তরাল AC। যেহেতু E বিন্দুটি OA রেখার উপর অবস্থিত, সুতরাং D বিন্দু OC এর উপর অবস্থিত। সুতরাং বস্তুকণাটি যে কোন সময় OC এর উপর থাকবে অর্থাৎ OC হচ্ছে লব্ধির বেগের ক্রিয়ারেখা। অতএব সামান্তরিকের OC কর্ণই লব্ধি বেগের মান ও দিক নির্দেশ করে।

লব্ধি বেগের মান ও দিক নির্ণয়

মনে করুন, $OACB$ সামান্তরিকের বাহু OA ও OB যথাক্রমে u ও v বেগদ্বয়কে এবং কর্ণ OC তাদের লব্ধি w কে দিকে ও মানে সূচিত করে। মনে করুন $\angle AOB = \alpha$। OA এর বর্ধিতাংশ বা OA এর উপর CD লম্ব টানুন।



চিত্র : ৯.১.৩

১ম চিত্রে, $AD = AC.\frac{AD}{AC} = AC.\cos CAD = OB\cos BOA = v\cos\alpha$

এবং $CD = AC.\frac{CD}{AC} = OB\sin CAD = OB\sin BOA = v\sin\alpha$

২য় চিত্রে $AD = AC.\frac{AD}{AC} = AC\cos CAD$

$= OB\cos(180°-BOA) = -OB\cos BOA = -v\cos\alpha$

এবং $CD = AC.\frac{CD}{AC} = AC\sin CAD = OB\sin(180°-BOA) = OB\sin BOA = v\sin\alpha$

১ম চিত্রে $OC^2 = OD^2+CD^2 = (OA+AD)^2+CD^2$

২য় চিত্রে $OC^2 = OD^2 + CD^2 = (OA-AD)^2+CD^2$

$\therefore w^2 = (u+v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha)^2$

$= u^2+2uv\cos\alpha + v^2\cos^2\alpha+v^2\sin^2\alpha$

$= u^2+2uv\cos\alpha+v^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$= u^2+v^2+2uv\cos\alpha$

বা, $w = \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\alpha}$

এখন $\angle AOC = \theta$ হলে, $\tan\theta = \frac{CD}{OD}$

$$= \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}\right)$$

এক্ষত্রে w লব্ধির মান এবং θ লব্ধির দিক নির্দেশ করে।

$$u=v \text{ হলে, } \tan\theta = \frac{u\sin\alpha}{u+u\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{\alpha}{2}$$

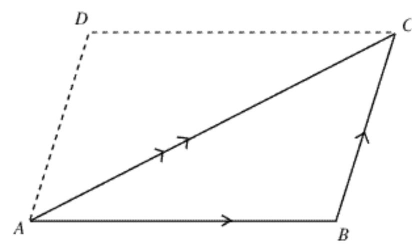
অর্থাৎ বেগদ্বয় সামন হলে লব্ধি বেগদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

- $\alpha=0$ হলে, অর্থাৎ বেগদ্বয় একই দিকে ক্রিয়া করলে, $\cos\alpha=\cos 0=1$, যা বৃহত্তম মান। তাই লব্ধি বৃহত্তম হবে। এক্ষেত্রে $w^2=u^2+v^2+2uv=(u+v)^2$ বা, $w=u+v$
- $\alpha = 180°$ হলে, অর্থাৎ বেগদ্বয় বিপরীতমুখী ক্রিয়া করলে, $\cos\alpha= \cos 180°=-1$, যা ক্ষুদ্রতম মান। তাই লব্ধি ক্ষুদ্রতম হবে। এক্ষেত্রে $w^2=u^2+v^2-2uv= (u-v)^2$ বা, $w=u\sim v$
- $\alpha = 90°$ হলে, অর্থাৎ বেগদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ক্রিয়া করলে, $\cos\alpha = \cos 90° = 0$, এক্ষেত্রে $w^2=u^2+v^2$ বা, $w = \sqrt{u^2+v^2}$

বেগের ত্রিভুজ সূত্র

যদি কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি বেগ একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুদ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রমে সূচিত হয়, তবে তাদের লব্ধিটি তৃতীয় বাহু দ্বারা দিকে, মানে ও বিপরীতক্রমে সূচিত হবে।

মনে করুন কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি বেগ যথাক্রমে AB ও BC রেখাদ্বয় দ্বারা দিকে, মানে ও একই ক্রমে সূচিত হয়। $ABCD$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন যার কর্ণ AC। AD ও BC সমান ও সমান্তরাল বলে AD ও BC রেখাদ্বয় দ্বারা একই বেগের মান ও দিক একই ক্রমে নির্দেশ করে। অতএব চলন্ত কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুইটি বেগের মান ও দিক AB ও AD বাহু দ্বারা সূচিত হল। অতএব বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে তাদের লব্ধির মান ও দিক AC বাহু দ্বারা সূচিত হবে।



চিত্র ৯.১.৪

সুতরাং কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুইটি বেগের মান, দিক ও ক্রম ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহু দ্বারা সূচিত হলে তাদের লব্ধি ত্রিভূজটির তৃতীয় বাহু AC দ্বারা দিকে, মানে ও বিপরীত ক্রমে সূচিত হবে।

ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করলে

$$AB + BC = AC$$

বা, $AB + BC = -CA$

বা. $AB + BC + CA = 0$

অর্থাৎ কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বেগ দিকে, মানে ও একই ক্রমে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা সূচিত হলে তাদের লব্ধির মান শূন্য হবে অর্থাৎ কণাটি স্থির থাকবে।

উপাংশের সূত্র

মনে করুন, $OACB$ সামান্তরিকের বাহু OA ও OB যথাক্রমে u ও v বেগকে দিকে ও মানে সূচিত করে। তাহলে তাদের লব্ধি w কে কর্ণ OC দিকে ও মানে সূচিত করবে।

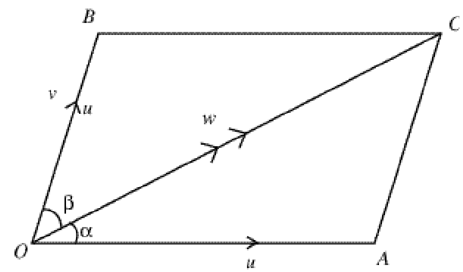
ধরুন, $\angle AOC = \alpha$ ও $\angle BOC = \beta$

ত্রিভুজের ধর্ম অনুযায়ী–

$$\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC}$$

বা, $$\frac{OA}{\sin BOC} = \frac{OB}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin(180°-AOB)} = \frac{OC}{\sin AOB}$$

[$\angle OCA = \angle BOC$ একান্তর বলে এবং $\angle AOB + \angle OAC = 180°$; সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের ছেদকের একই পার্শ্বস্থ কোণ বলে।]



চিত্র ৯.১.৫

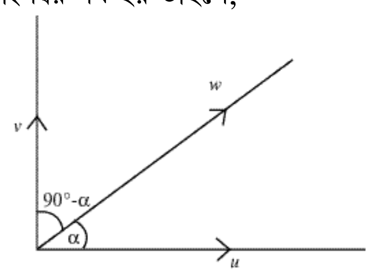
$$\therefore \frac{u}{\sin\beta} = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{w}{\sin(\alpha+\beta)}$$ ইহাই উপাংশের সূত্র।

এখন যদি $\alpha+\beta = \angle AOB = 90°$ বা, $\beta = 90° - \alpha$ হয়, অর্থাৎ উপাংশদ্বয় লম্ব হয় তাহলে,

$$\frac{u}{\sin(90°-\alpha)} = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{w}{\sin 90°}$$

বা, $$\frac{u}{\cos\alpha} = \frac{v}{\sin\alpha} = w$$

$\therefore u = w\cos\alpha$ এবং $v = w\sin\alpha$

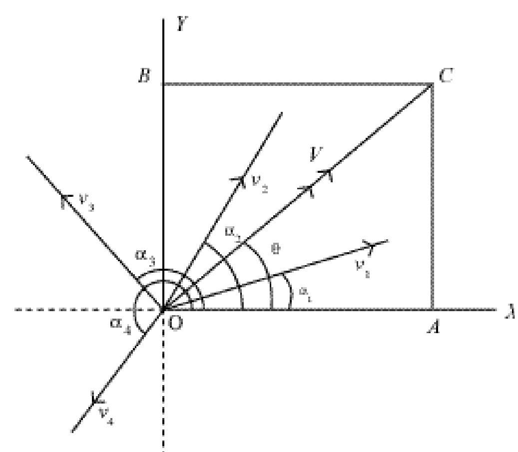


চিত্র ৯.১.৬

কোন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত কতগুলো একতলীয় বেগের লব্ধি

মনে করুন, কতগুলো একতলীয় বেগ $v_1, v_2, v_3, v_4,$ ----- ইত্যাদি O বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়া করে O বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখা OX এর সাথে যথাক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4,$ ----- কোন উৎপন্ন করে। OY রেখাটি OX এর উপর লম্ব। v_1 রেখাটির লম্বাংশদ্বয় OX ও OY বরাবর যথাক্রমে $v_1\cos\alpha_1$ ও $v_1\sin\alpha_1$। অনুরূপভাবে OX বরাবর অন্যান্য বেগগুলোর লম্বাংশ $v_2\cos\alpha_2, v_3\cos\alpha_3, v_4\cos\alpha_4,$ .... এবং OY বরাবর $v_2\sin\alpha_2, v_3\sin\alpha_3, v_4\sin\alpha_4,$ ....।

অতএব প্রদত্ত বেগগুলো OX বরাবর $v_1\cos\alpha_1 + v_2\cos\alpha_2 + v_3\cos\alpha_3 + v_4\cos\alpha_4,$ .... এবং OY বরাবর $v_1\sin\alpha_1 + v_2\sin\alpha_2 + v_3\sin\alpha_3 + v_4\sin\alpha_4,$................... লম্বাংশদ্বয়ের সমতূল্য। OX ও OY বরাবর অংশকদ্বয় যথাক্রমে OA ও OB দ্বারা সূচিত হলে, তাদের লব্ধি OC দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হবে। মনে করুন লব্ধি V, যা OX এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



চিত্র ৯.১.৭

$V\cos\theta = v_1\cos\alpha_1 + v_2\cos\alpha_2 + v_3\cos\alpha_3 + v_4\cos\alpha_4 +$ ....$= \Re v_1\cos\alpha_1 = X$ (ধরুন)

এবং $V\sin\theta = v_1\sin\alpha_1 + v_2\sin\alpha_2 + v_3\sin\alpha_3 + v_4\sin\alpha_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \Re v_1\sin\alpha_1 = Y$ (ধরুন)

$\therefore V^2 = X^2 + Y^2$ বা $V = \sqrt{X^2 + Y^2}$

এবং $\theta = \tan^{-1}\dfrac{Y}{X}$

দ্রষ্টব্য : একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত যে কোন সংখ্যক বেগের লব্ধি নির্ণয় করতে হলে তাদের যে কোন একটির দিককে OX ধরে উক্ত দিকে এবং তার সাথে লম্বিক দিকে বেগগুলোকে পৃথক পৃথকভাবে বিভাজিত করতে হবে।

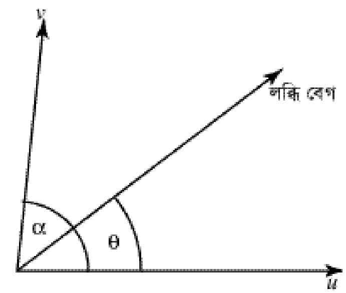
উদাহরণ 1 : একটি বস্তুকণাতে পরস্পর α কোণে u ও v মানের দুটি বেগ কার্যরত আছে। এদের লব্ধি u এর সাথে θ কোণ সৃষ্টি করলে, প্রমাণ করুন যে, $\cot\theta = \cot\alpha + \dfrac{u}{v}\operatorname{cosec}\alpha$

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে $\tan\theta = \dfrac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{u + v\cos\alpha}{v\sin\alpha}$

বা, $\cot\theta = \dfrac{v\cos\alpha}{v\sin\alpha} + \dfrac{u}{v\sin\alpha}$

বা, $\cot\theta = \cot\alpha + \dfrac{u}{v}\operatorname{cosec}\alpha$



চিত্র ৯.১.৮

উদাহরণ 2 : স্রোতের বেগের $\sqrt{2}$ গুণ বেগে সাঁতরিয়ে একজন সাঁতারু নদীর অপর পাড়ে যাত্রাবিন্দুর বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছে। তীরের সাথে সাতারুর গতিবেগের নতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরুন, স্রোতের বেগ u ও বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α।

অতএব, সাতারুর বেগ $\sqrt{2}\ u$ হবে।

এক্ষেত্রে লব্ধিবেগের গতিপথ নদীর পাড়ের সাথে $90°$ কোণ সৃষ্টি করে।

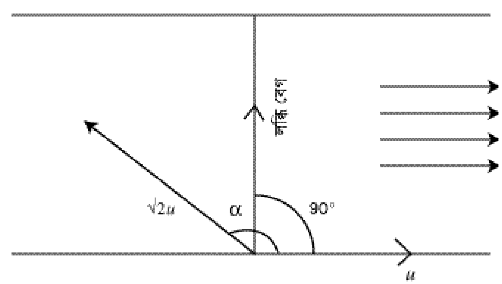
$\therefore \dfrac{\sqrt{2}u\sin\alpha}{u + \sqrt{2}u\cos\alpha} = \tan 90° = \square$

$\therefore u + \sqrt{2}\ u\cos\alpha = 0$

বা, $1 + \sqrt{2}\ \cos\alpha = 0$

$\therefore \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\cos 45° = \cos(180° - 45°) = \cos 135°$

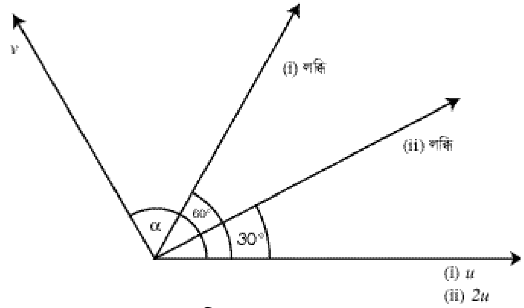
$\therefore \alpha = 135°$



চিত্র ৯.১.৯

উদাহরণ 3 : একটি বস্তুকণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি বেগের লব্ধি বৃহত্তম বেগের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃহত্তর বেগটিকে দ্বিগুণ করলে, উক্ত কোণ $30°$ হয়। বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল u ও v $(u>v)$ বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α এবং এদের লব্ধি u এর সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে।



চিত্র ৯.১.১০

$\therefore \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha} = \tan60° = \sqrt{3}$

বা, $v\sin\alpha = \sqrt{3}\,u + \sqrt{3}\,v\cos\alpha$

বা, $v(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha) = \sqrt{3}\,u$ --------- (i)

পরবর্তী পর্যায়ে বেগ u এর পরিবর্তে $2u$ হলে, লব্ধি $2u$ এর সাথে $30°$ কোণ সৃষ্টি করবে।

$\therefore \frac{v\sin\alpha}{2u+v\cos\alpha} = \tan30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ বা, $\sqrt{3}\,v\sin\alpha = 2u + v\cos\alpha$

বা, $v\left(\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha\right) = 2u$ ---------- (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই–

$\frac{\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha}{\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $2\sin\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha = 3\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$

বা, $\sin\alpha = -\sqrt{3}\cos\alpha$

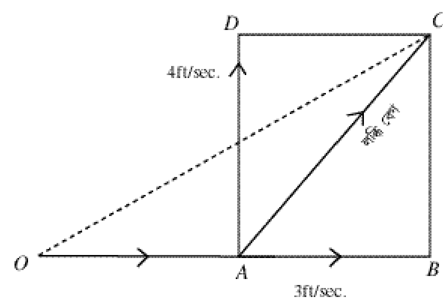
বা, $\tan\alpha = -\sqrt{3} = -\tan60° = \tan(180° - 60°) = \tan120°$

$\therefore \alpha = 120°$

উদাহরণ 4 : 3 ফুট/সেকেন্ড বেগে একটি বস্তুকণা একটি সরলরেখা বরাবর 3 সেকেন্ড চলার পর তার লম্ব বরাবর 4 ফুট/সেকেন্ড মানের আকেরটি বেগ কার্যকর হয়। আরও 2 সেকেন্ড পর যাত্রা বিন্দু হতে তার দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, বস্তুকণাটি O বিন্দু হতে যাত্রা করে 3 সেকেন্ড সময়ে $OA = 3*3$ ফুট $= 9$ ফুট আসার পর তার লম্ব AD বরাবর আরেকটি বেগ প্রয়োগ করা হল এবং বেগদ্বয়ের লব্ধিবেগে পরবর্তী 2 সেকেন্ড সময় অন্তে C বিন্দুতে কণাটি পৌঁছলো।

এক্ষেত্রে বেগদ্বয় লম্ব হওয়ায় বেগদ্বয়ের একটি অপরটির দিকে কোন প্রভাব ফেলতে পারবে না। সুতরাং সরণ অনুষঙ্গিক বেগের কারণে হয়েছে।



চিত্র ৯.১.১১

$\therefore AD = BC = 4$ ফুট/সেকেন্ড * 2 সেকেন্ড = 8 ফুট এবং $AB = 3$ ফুট/সেকেন্ড *2সেকেন্ড = 6 ফুট.

$\therefore OC = \sqrt{OB^2+BC^2} = \sqrt{(OA+AB)^2+BC^2} = \sqrt{(9+6)^2+8^2} = \sqrt{(15)^2+\sqrt{8}^2}$

$= \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$ ফুট

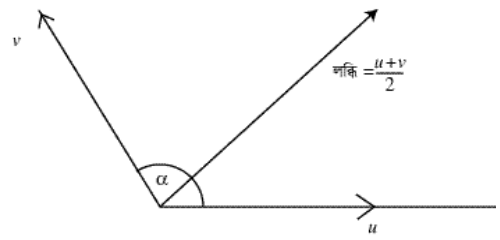
উদাহরণ 5 : দুটি বেগের বৃহত্তম লব্ধি ক্ষুদ্রতম লব্ধির n গুণ। বেগ দুটির গতিপথের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধি বেগের মান তাদের সমষ্টির অর্ধেক হয়। প্রমাণ করুন যে, $\cos\alpha = \frac{n^2+2}{2(1-n^2)}$

সমাধান : ধরুন, বড় বেগটি u এবং ছোট বেগটি v।
অতএব, বেগদ্বয়ের বৃহত্তম লব্ধি $= u+v$ এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $= u-v$

শর্তানুযায়ী, $u+v=n(u-v)$

বা, $(n+1)v=(n-1)u$

বা, $\frac{v}{u} = \frac{n-1}{n+1}$ -------- (i)



চিত্র ৯.১.১২

বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধি $= \frac{u+v}{2}$

$$\therefore \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = u^2+v^2+2uv\cos\alpha$$

বা, $(u+v)^2=4u^2+4v^2+8uv\cos\alpha$

বা, $\left(1+\frac{v}{u}\right)^2 = 4+4\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 8\frac{v}{u}\cos\alpha$

$\therefore \left(1+\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = 4+4\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + 8\frac{n-1}{n+1}\cos\alpha,$ [(i) এর সাহায্যে]

বা, $\frac{4n^2}{(n+1)^2} = 4\left[1+\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}+2\frac{n-1}{n+1}\cos\alpha\right]$

বা, $n^2=(n+1)^2+(n-1)^2+(n-1)(n+1)\cos\alpha=2(n^2+1)+2(n^2-1)\cos\alpha$

বা, $2(1-n^2)\cos\alpha = n^2+2$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{n^2+2}{2(1-n^2)}$$

উদাহরণ 6 : স্রোতহীন অবস্থায় s গজ প্রশস্ত একটি নদী একজন সাতারু t মিনিটে পার হয়। স্রোত থাকা অবস্থায় সে একই পথে t_1 মিনিটে নদী পার হতে পারে। দেখান যে, স্রোতের বেগ $= s\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t_1^2}}$ গজ/মিনিট।

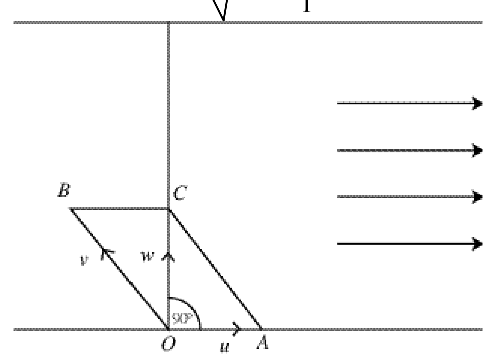
সমাধান : সাতারুর বেগ $v=\frac{s}{t}$ গজ/মিনিট

মনে করুন, স্রোতের বেগ u।

এক্ষেত্রে লব্ধি বেগ, $w=\frac{s}{t_1}$ গজ/মিনিট

বেগ নির্দেশক $OACB$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন। এখানে−

$u=\overline{OA}$, $v=\overline{OB}=\overline{AC}$ ও $w=\overline{OC}$



চিত্র ৯.১.১৩

এখন $OA^2+OC^2=AC^2$ বা, $OA=\sqrt{AC^2-OC^2}$

$$\therefore u=\sqrt{v^2-w^2} = \sqrt{\left(\frac{s}{t^2}\right)^2-\left(\frac{s}{t^2}\right)^2}$$

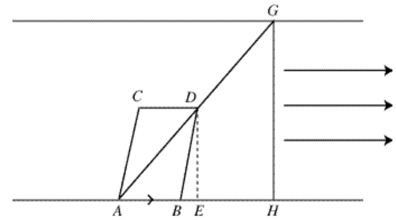
$$= s\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_1^2}}$$

$\therefore$ স্রোতের বেগ, $u = s\sqrt{\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1^2}}$ গজ/মিনিট।

উদাহরণ 7 : একজন সাঁতারু 3 মা/ঘ. বেগে সাতরিয়ে 5 মা/ঘ. বেগে প্রবাহিত 176 গজ প্রশস্ত একটি নদী ন্যূনতম সময়ে পার হতে চায়। সাতারুর গতিপথ ও সময়কাল নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, সাঁতারু ও স্রোতের গতিপথের মধ্যেবর্তী কোণ α।

বেগ নির্দেশক $ABCD$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন। AD কে বর্ধিত করায় তা নদীর অপর পাড়ে G বিন্দুতে মিলিত হয়; DE ও GH লম্ব টানুন।



চিত্র ৯.১.১৪

একক সময়ে সাতারু D বিন্দুতে পৌঁছবে।

সুতরাং একক সময়ে নদীর বিস্তার বরাবর সরণ হবে ED।

নদীর বিস্তার, $GH = 176$ গজ $= \frac{1}{10}$ মাইল।

নদী পারের সময়, $t = \frac{GH}{DE} = \frac{GH}{DB\frac{DE}{DB}} = \frac{GH}{AC.\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{10}}{3.\sin\alpha} = \frac{1}{30\sin\alpha}$

$$\therefore t \propto \frac{1}{\sin\alpha}$$

অর্থাৎ t এর ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $\sin\alpha$ এর মান বৃহত্তম হতে হবে।

বা, $\sin\alpha = 1 = \sin 90^\circ \therefore \alpha = 90^\circ$

অতএব, সাতারুকে নদীর বিস্তার বরাবর সাঁতার কাটতে হবে এবং পারের জন্য ক্ষুদ্রতর সময় $= \frac{1}{30}$ ঘন্টা $= 2$ মিনিট।

উদাহরণ 8 : 880 গজ প্রশস্ত ও 3 মা/ঘ. বেগে প্রবাহিত নদীকে 5 মা/ঘ. বেগে চলমান দুটি নৌকার একটি ক্ষুদ্রতর পথে, অপরটি ক্ষুদ্রতম সময়ে পার হয়। তারা যে সময়ের ব্যবধানে নদীটি পার হয় তা নির্ণয় কর।

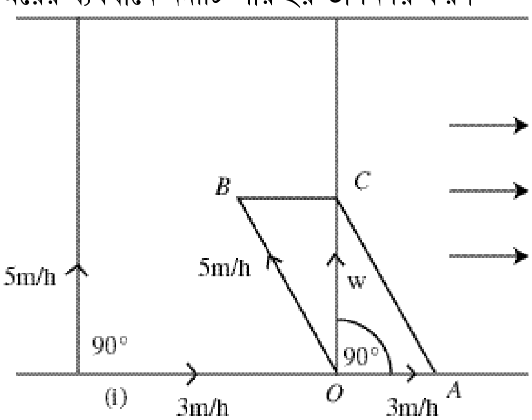
সমাধান : নদীটির বিস্তার $= 880$ গজ

$= \frac{880}{1760}$ মাইল $= \frac{1}{2}$ মাইল

(i) ক্ষুদ্রতম সময়ে নদী পারের জন্য নৌকাকে বিস্তার বরাবর চালাতে হবে। কারণ স্রোতের লক্ষ্য দিকে অর্থাৎ নদীর বিস্তার বরাবর স্রোতের উপাংশ $= 0$।

এক্ষেত্রে নদী পারের সময় $t_1 = \frac{s}{v}$

$= \frac{\frac{1}{2}\text{ মাইল}}{5\text{ মা/ঘ.}} = \frac{1}{10}$ ঘন্টা



চিত্র ৯.১.১৫

(ii) ক্ষুদ্রতম পথে যাওয়ার জন্য বেগদ্বয়ের লব্ধি, w এর গতিপথ ক্ষুদ্রতম পথ অর্থাৎ নদীর বিস্তার বরাবর হতে হবে।

বেগ নির্দেশক $OACB$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন।

$\therefore OC^2+OA^2 = AC^2$ বা, $OC = \sqrt{AC^2-OA^2} = \sqrt{OB^2-OA^2}$

$= \sqrt{5^2-3^2}$

$\therefore w = \sqrt{16} = 4$ মাইল /ঘন্টা।

এক্ষেত্রে নদী পারের সময় $t_2 = \dfrac{s}{w} = \dfrac{\frac{1}{2}\text{মাইল}}{4\text{মা/ঘ.}} = \dfrac{1}{8}$ ঘন্টা

অতএব সময়ের ব্যবধান $t_2 - t_1 = \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{10}\right)$ ঘন্টা $= \dfrac{1}{40}$ ঘন্টা

$= \dfrac{60}{40}$ মিনিট $= \dfrac{3}{2}$ মিনিট

$= 90$ সেকেন্ড।

উদাহরণ 9 : এক বিন্দুতে u, v, w মানের তিনটি বেগ কার্যরত আছে। পর্যায়ক্রমে তাদের মধ্যবর্তী কোণ α, β, γ হলে লব্ধি নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল u, v, w বেগের গতিপথ যথাক্রমে OA, OB, OC এবং □AOB $= \alpha$, □$BOC = \beta$ ও □$COA = \gamma$

ধরুন, বেগত্রয়ের লব্ধি V, OA-এর সাথে θ কোণ সৃষ্টি করে।

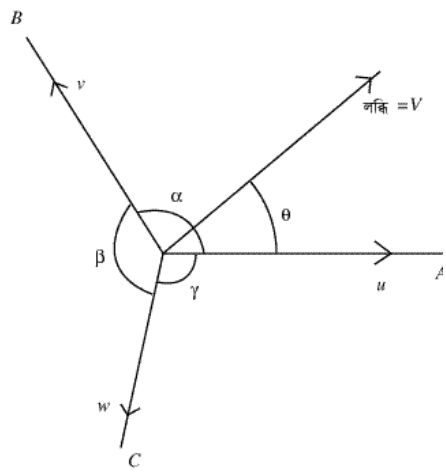
OA বরাবর এবং OA এর লম্ব বরাবর বেগসমূহকে বিভাজন করে যথাক্রমে পাই−

$V\cos\theta = u\cos 0^\circ + v\cos\alpha + w\cos(-\gamma)$

$= u + v\cos\alpha + w\cos\gamma$ ---------------(i)

এবং $V\sin\theta = u\sin 0^\circ + v\sin\alpha + w\sin(-\gamma)$

$= v\sin\alpha - w\sin\gamma$ ------------------ (ii)



চিত্র : ৯.১.১৬

(i) ও (ii) হতে, $V^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = (u+v\cos\alpha+w\cos\gamma)^2 + (v\sin\alpha - w\sin\gamma)^2$

বা, $V^2=u^2+v^2\cos^2\alpha + w^2\cos^2\gamma + 2vw\cos\alpha\cos\gamma + 2wu\cos\gamma + 2uv\cos\alpha + v^2\sin^2\alpha + w^2\sin^2\gamma - 2vw\sin\alpha\sin\gamma$

$= u^2+v^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+w^2(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma)+2uv\cos\alpha+2wu\cos\gamma+2vw\cos(\alpha+\gamma)$

বা, $V^2 = u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2wu\cos\gamma+2wv\cos\beta$

$[\because \alpha+\beta+\gamma=360^\circ, \therefore \cos(\alpha+\gamma) = \cos(360^\circ-\beta) = \cos\beta]$

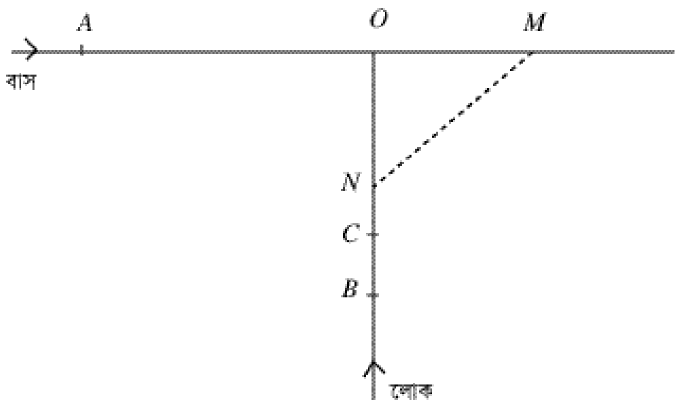
$\therefore V = \sqrt{u^2+v^2+w^2+2uv\cos\alpha+2vw\cos\beta+2wu\cos\gamma}$

এবং $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{V\sin\theta}{V\cos\theta} = \dfrac{v\sin\alpha - w\sin\gamma}{u+v\cos\alpha+w\cos\gamma}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{v\sin\alpha - w\sin\gamma}{u+v\cos\alpha+w\cos\gamma}\right)$

উদাহরণ 10 : একটি বাস সোজা পথে 12 মা/ঘ. বেগে চলছে। একজন লোক বাস পথের লম্ব বরাবর 5 মা/ঘ. বেগে দৌড়িয়ে বাসটি ধরার চেষ্টা করছে। বাসটি যখন চৌমাথা হতে 140 গজ পিছনে লোকটি তখন চৌমাথা হতে 80 গজ দূরে থাকে। দেখান যে, লোকটি কখনোই বাস হতে 20 গজের বেশি নিকটে আসতে পরবে না।

সমাধান :



চিত্র ৯.১.১৭

বাসের বেগ = 12 মা/ঘ $= \frac{12*1760*3}{60*60}$ ফু/সে. $= \frac{88}{5}$ ফু/সে.

এবং লোকটির বেগ = 5 মা/ঘ. $= \frac{5*1760*3}{60*60}$ ফুট/সে. $= \frac{22}{3}$ ফুট/সে.

ধরুন, O চৌমাথা, OA=140 গজ = 420 ফুট এবং OB=80 গজ = 240 ফুট।
শর্ত অনুযায়ী বাস যখন A বিন্দুতে ছিল, লোকটি তখন B বিন্দুতে ছিল।

AO পথে বাসটির সময় লাগে $= \frac{AO}{v} = \frac{420 \text{ ফুট}}{\frac{88}{5} \text{ ফুট/সে.}} = \frac{525}{22}$ সেকেন্ড

উক্ত সময়ে লোকটির অতিক্রান্ত পথ $BC = \frac{22}{5} * \frac{525}{2} = 175$ ফুট.

মনে করুন, পরবর্তী t সময়ে বাস $OM = \frac{88}{5}t$ ফুট এবং লোকটি $CN= \frac{22}{3}\ t$ ফুট অতিক্রম করলো।

সুতরাং $ON = OB - (BC+CN) = 240 - \left(175 + \frac{22}{3}t\right) = 65 - \frac{22}{3}\ t$

এখন $MN^2 = OM^2 + ON^2$

$= \left(\frac{88}{5}t\right)^2 + \left(65-\frac{22}{3}t\right)^2$

$= \frac{7744}{25}\ t^2 + \frac{484}{9}\ t^2 -2.\frac{22}{3}\ .\ 65t + 4225$

$=\left(\frac{7744}{25}+\frac{484}{9}\right) t^2-2.\frac{22}{3}.65t+4225$

$=\left(\frac{69696+12100}{225}\right) t^2-2.\frac{22}{3}.65t+4225$

$=\left(\frac{81796}{225}\right) t^2-2.\frac{22}{3}.65t+4225$

$=\left(\frac{286}{15}t\right)^2 -2.\frac{286t}{15}.25+(25)^2+(60)^2$

$$= \left(\frac{286}{15}t - 25\right)^2 + 60^2$$

MN এর ক্ষুদ্রতম মানের জন্য $\frac{286}{15}\ t - 25 = 0\ \ or,\ t = \frac{25*15}{286}$ সেকেন্ড হতে হবে।

এ অবস্থায় $MN = 60$ ফুট = 20 গজ

অনুশীলনী - ৯.১

1. একটি গাড়ী 8 মা/ঘ. বেগে চলছে। গাড়ীটি হতে 16 মা/ঘ. বেগে একটি বস্তুকে কোন্ দিকে নিক্ষেপ করলে, বস্তুটি গাড়ি হতে সমকোণে নির্গত হবে?
2. বিস্তার বরাবর একটি নদী পার হতে একজন সাতারুর t_1 সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে তীর বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তার t_2 সময় লাগে। সাতারুর বেগ u ও স্রোতের বেগ v হলে, দেখান যে, t_1 ঃ $t_2 = \sqrt{u+v}$ ঃ $\sqrt{u-v}$
3. একটি স্টীমার সমবেগে স্রোতের অনুকূলে t_1 সময়ে তীর বরাবর s পথ অতিক্রম করে এবং স্রোতের প্রতিকূলে চলে একই পথ t_2 সময়ে যাত্রাস্থানে ফিরে আসে। দেখান যে, স্টিমারের বেগ $= \frac{1}{2}\, s\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$ ও স্রোতের বেগ $= \frac{1}{2}\, s\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$
4. একটি বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু হতে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত দুটি বেগের লব্ধিকে উক্ত বৃত্তের সেই বিন্দুগামী ব্যাস দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত করা যায়– তা প্রমাণ করুন।
5. কোন সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমান্তরাল গতিপথে কোন এক বিন্দুতে কার্যরত 1, 2, 3 একক মানের গতিসমূহের লব্ধি নির্ণয় করুন।
6. বিভিন্ন গতিপথে 3, 7, 8 ফুট প্রতি সেকেন্ড গতিবেগ বিশিষ্ট একটি বস্তুকণা স্থির আছে। বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বেগের গতিপথের অন্তর্ভুক্ত কোণের মান নির্ণয় করুন।
7. দুটি লম্বালম্বি রেলপথের একটি রেলপথে 30 মা/ঘ. বেগে চলমান একটি গাড়ি সকাল 10 টায় জংশন অতিক্রম করে। অপর একটি গাড়ি দ্বিতীয় রেলপথে 40 মা/ঘ. বেগে চলে বিকাল 3 টায় জংশনে পৌঁছে। কখন তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব ক্ষুদ্রতম ছিল?
8. স্রোতহীন অবস্থায় 100 গজ প্রশস্ত একটি নদী একজন সাঁতারু 4 মিনিটে সোজাসুজি অতিক্রম করতে পারে। স্রোত থাকা অবস্থায় সে একই পথে 5 মিনিটে নদীটি অতিক্রম করতে পারে। স্রোতের বেগ নির্ণয় করুন।

পাঠ-২
আপেক্ষিক বেগ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- আপেক্ষিক বেগ বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করার দক্ষতা অর্জন করবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

স্থির বস্তু ও চলমান বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে বেগ, আর দুটি চলমান বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে একটির সাপেক্ষে আরেকটির আপেক্ষিক বেগ বলা হয়। বাস্তবে প্রকৃত বেগের কোন অস্তিত্ব নেই,কারণ সকল বস্তুই চলমান। আমরা সূর্যের চারদিকে আবর্তনশীল পৃথিবীকে সাধারণত: স্থির কল্পনা করে অন্যান্য বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে থাকি, যা প্রকৃতপক্ষে গতিশীল পৃথিবী সাপেক্ষে বস্তুর আপেক্ষিক বেগ। চলমান A গাড়িতে অবস্থান করে B গাড়ির যে বেগ পরিলক্ষিত হবে তাই হচ্ছে A গাড়ি সাপেক্ষে B গাড়ির আপেক্ষিক বেগ।

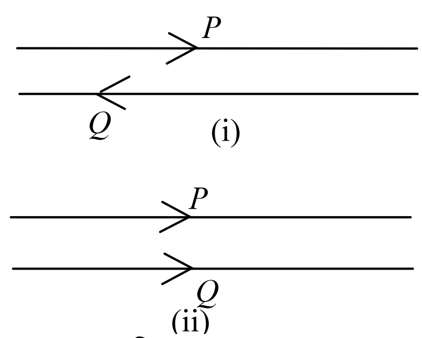
স্থির বস্তু ও চলমান বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে বেগ, আর দুটি চলমান বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে একটির সাপেক্ষে আরেকটির আপেক্ষিক বেগ বলা হয়। বাস্তবে প্রকৃত বেগের কোন অস্তিত্ব নেই,কারণ সকল বস্তুই চলমান।

মনে করুন, পৃথিবীকে স্থির কল্পনা পূর্বক দুটি সমান্তরাল পথে চলমান P ও Q বস্তুদ্বয়ের বেগ যথাক্রমে 50ফুট/সেকেন্ড ও 30 ফুট/সেকেন্ড

(i) P ও Q বিপরীত দিকে চললে প্রতি সেকেন্ডে মধ্যবর্তী ব্যবধান বৃদ্ধির পরিমাণ হবে 50 ফুট/সেকেন্ড $+30$ ফুট/সেকেন্ড $= 80$ ফুট/সেকেন্ড

(ii) P ও Q একই দিকে চললে প্রতি সেকেন্ডে মধ্যবর্তী ব্যবধান বৃদ্ধির পরিমাণ হবে 50 ফুট/সেকেন্ড - 30 ফুট/সেকেন্ড $= 20$ ফুট/সেকেন্ড

এই ব্যবধান বৃদ্ধির হারই হচ্ছে Q সাপেক্ষে P এর আপেক্ষিক বেগ। লক্ষণীয় যে, Q সাপেক্ষে P এর আপেক্ষিক বেগ হল, P এর প্রকৃতবেগ এবং Q এর প্রকৃত বেগের সমান ও বিপরীত মানের রাশির যোগফল।



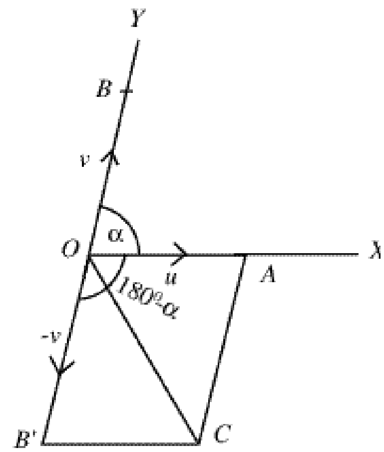
চিত্র : ৯.২.১

অসমান্তরাল পথে চলমান দুটি বস্তুর আপেক্ষিক বেগ নির্ণয়

মনে করুন, α কোণে আনত OX ও OY বরাবর P ও Q বস্তুদ্বয় যথাক্রমে u ও v বেগে চলছে এবং OA ও OB যথাক্রমে u ও v বেগদ্বয়কে মানে ও দিকে প্রকাশ করছে।

BO এর বর্ধিতাংশের উপর B' নিন যেন, $OB=OB'$ হয়। তাহলে OB' রেখা $-v$ বেগের মান ও দিক প্রকাশ করবে।

এবার $OACB'$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন। বেগ সংযোজনের সামান্তরিক সূত্র অনুযায়ী OC কর্ণ u ও $-v$ এর লব্ধির মান ও দিক প্রকাশ করবে। সুতরাং OC কর্ণই Q সাপেক্ষে P এর আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক প্রকাশ করবে।



চিত্র ৯.২.২

আপেক্ষিক বেগ R ও u এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$R=\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos(180°-\alpha)}=\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\alpha}$$

এবং $\tan\theta=\dfrac{v\sin(180°-\alpha)}{u+v\cos(180°-\alpha)}=\dfrac{v\sin\alpha}{u-v\cos\alpha}$

বা, $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{v\sin\alpha}{u-v\cos\alpha}\right)$

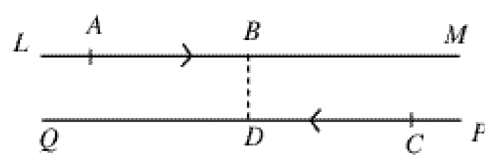
অনুসিদ্ধান্ত: u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha=90°$ হলে, $\cos\alpha=\cos 90°=0$ ও $\sin\alpha=\sin 90°=1$

তাই $R=\sqrt{u^2+v^2}$

ও $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{v}{u}\right)$

উদাহরণ 1 : 110 ফুট ও 130 ফুট দীর্ঘ দুটি গাড়ি সমান্তরাল পথে বিপরীত দিকে চলছে। প্রথম গাড়িটির গতিবেগ দ্বিতীয় গাড়িটির গতিবেগের দ্বিগুণ। 4 সেকেন্ড সময়ে তার পরস্পরকে সম্পূর্ণ অতিক্রম করলে, গাড়ি দুটির গতিবেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, গাড়ি দুটির LM ও PQ সমান্তরাল রেখা বরাবর বিপরীত দিকে চলছে। $CD=$ 130 ফুট দীর্ঘ গাড়ির গতিবেগ u ধরুন। তাহলে $AB=110$ ফুট দীর্ঘ গাড়ির গতিবেগ $2u$ হবে। এক্ষেত্রে প্রথম গাড়ি সাপেক্ষে দ্বিতীয় গাড়ির আপেক্ষিক বেগ হবে $2u+u=3u$।



চিত্র : ৯.২.৩

আপেক্ষিক বেগ $=\dfrac{\text{অতিক্রান্ত পথ}}{\text{সময়}}$

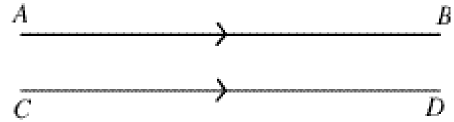
বা, $3u=\dfrac{(110+130)\text{ফুট}}{4\text{ সেকেন্ড}}=\dfrac{240}{4}$ ফুট/সেকেন্ড = 60 ফুট/সেকেন্ড।

বা, $u=20$ ফুট/সেকেন্ড।

অতএব প্রথম গাড়ির বেগ = $2u=40$ ফুট/সেকেন্ড এবং দ্বিতীয় গাড়ির বেগ $u=20$ ফুট/সেকেন্ড।

উদাহরণ 2 : দুটি বস্তুকণা 50 সেমি/সেকেন্ড ও 70 সেমি/সেকেন্ড গতিবেগে একই দিকে চলছে। প্রথমটি সাপেক্ষে দ্বিতীয়টির আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, বস্তুকণা দুটি AB ও CD সমান্তরাল রেখা বরাবর একই দিকে চলছে। এক্ষেত্রে প্রথম বস্তুকণা সাপেক্ষে দ্বিতীয় বস্তুকণার আাপেক্ষিক বেগ হবে
70 সেমি/সেকেন্ড-50 সেমি/সেকেন্ড = 20 সেমি/সেকেন্ড.



চিত্র ৯.২.৪

উদাহরণ 3 : একটি বাস 40 কিমি/ঘ. বেগে পূর্বদিকে এবং আরেকটি বাস 30 কিমি/ঘ. বেগে উত্তর দিকে চলছে। প্রথম বাসের যাত্রী দ্বিতীয় বাসটি কত বেগে ও কোন দিকে চলছে মনে করবেন?

সমাধান : প্রথম বাস সাপেক্ষে দ্বিতীয় বাসের আপেক্ষিক বেগ অর্থাৎ দ্বিতীয় বাসের যে বেগ প্রথমবাসের যাত্রীর কাছে পরিমাপিত হবে না হচ্ছে $\sqrt{40^2+30^2}$ কিমি/ঘ.

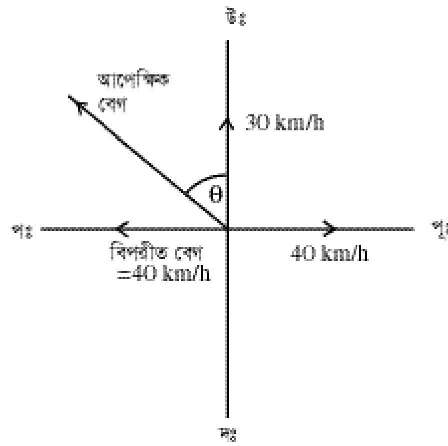
$= 10\sqrt{4^2+3^2}$ কিমি/ঘ.

$= 10.5$ কিমি/ঘ.

$= 50$ কিমি/ঘ.

আপেক্ষিক বেগ উত্তর দিকের সাথে θ কোণ সৃষ্টি করলে,

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{40}{30}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$



চিত্র ৯.২.৫

উদাহরণ 4 : একই স্থান হতে দুই খানা গাড়ি 10কিমি/ঘ. ও 15কিমি/ঘ. বেগে যাত্রা করল। তাদের গতিপথের মধ্যবর্তী কোণ 60° হলে, তিন ঘন্টা পরে তাদের দূরত্ব কত হবে?

সমাধান : মনে করুন, OX ও OY বরাবর গাড়ি দুটি যথাক্রমে 10কিমি/ঘ. ও 15 কিমি/ঘ. বেগে চলে এবং □$XOY = 60^\circ$।

$\therefore$ আপেক্ষিক বেগ

$R = \sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\alpha}$

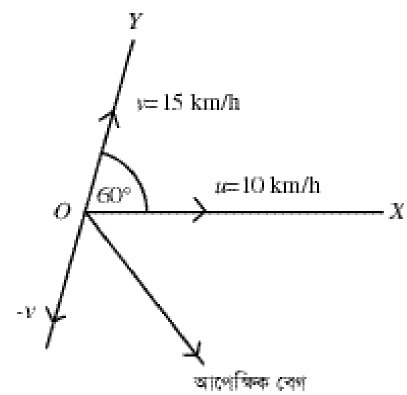
$= \sqrt{10^2+15^2-2.10.15.\cos 60^\circ}$

$= \sqrt{100+225-2.10.15.\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{325 - 150}$

$= \sqrt{175}$

$= 5\sqrt{7}$ কিমি/ঘ..



চিত্র ৯.২.৬

অতএব 3 ঘন্টা পর গাড়ি দুটির পারস্পরিক দূরত্ব = $R.t$

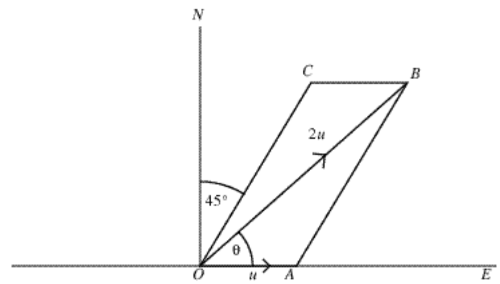
$= 5\sqrt{7}$ * 3 কিলোমিটার

$= 15\sqrt{7}$ কিলোমিটার

উদাহরণ 5 : u বেগে একটি জাহাজ পূর্বদিকে চলছে। অপর একটি জাহাজ পূর্বদিকের সাথে উত্তর দিকে θ কোণে আনত রেখায় $2u$ বেগে চলছে। প্রথম জাহাজের একজন আরোহীর মনে হচ্ছে যে, দ্বিতীয় জাহাজটি উত্তরপূর্ব দিকে চলছে। প্রমাণ করুন যে, $\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

সমাধান : মনে করুন, প্রথম জাহাজ OA বরাবর u বেগে এবং দ্বিতীয় জাহাজ OB বরাবর $2u$ বেগে চলছে। তাহলে $\angle AOB = \theta$।

প্রথম জাহাজের বেগকে বিপরীত দিকে বিবেচনাপূর্বক বেগ নির্দেশক রেখাকে বাহু দিয়ে $OACB$ সামান্তরিক অঙ্কন করুন। তাহলে, প্রথম জাহাজ সাপেক্ষে দ্বিতীয় জাহাজের আপেক্ষিক বেগ OC কর্ণ দ্বারা দিকে ও মানে সূচিত হবে।



চিত্র ৯.২.৭

প্রশ্নানুসারে, $\angle AOC = 45°$। তাহলে $\angle BOC = 45° - \theta$ ও $\angle OAB = 180°-45°$

তাহলে ত্রিভুজের ধর্ম অনুযায়ীঃ

$$\frac{OA}{\sin\angle OBA} = \frac{OB}{\sin\angle OAB}$$

বা, $\dfrac{OA}{\sin\angle BOC} = \dfrac{OB}{\sin\angle OAB}$

বা, $\dfrac{OA}{\sin(45°-\theta)} = \dfrac{OB}{\sin(180°-45°)}$

$\therefore \dfrac{u}{\sin(45°-\theta)} = \dfrac{2u}{\sin 45°}$

বা, $\dfrac{1}{\sin(45°-\theta)} = \dfrac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$

বা, $\sin(45°-\theta) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\sin 45° \cos\theta - \cos 45° \sin\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{2}$

বা, $(\cos\theta - \sin\theta)^2 = \dfrac{1}{4}$

বা, $\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

বা, $1 - \sin 2\theta = \dfrac{1}{4}$

বা, $\sin 2\theta = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$

$\therefore \theta = \dfrac{1}{2} \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$

অনুশীলনী–৯.২

1. একটি বস্তু 15 কিমি/ঘ. বেগে পূর্বদিকে যাচ্ছে; অন্য একটি বস্তুত 25 কিমি/ঘ. বেগে পূর্বদিকে যাচ্ছে। প্রথমটি সাপেক্ষে দ্বিতীয় বস্তুটির আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করুন।

2. একটি জাহাজ 100 কিমি/ঘ. বেগে পূর্বদিকে এবং আরেকটি জাহাজ 62 কিমি/ঘ. বেগে পশ্চিম দিকে চলছে। দ্বিতীয় জাহাজ সাপেক্ষে প্রথম জাহাজের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করুন।
3. একটি জাহাজ $30\sqrt{2}$ মাইল/ঘন্টা বেগে দক্ষিণ দিকে চলছে এবং অপর একটি জাহাজ 30 মাইল/ঘন্টা বেগে দক্ষিণ-পূর্ব দিকে চলছে। প্রথম জাহাজ সাপেক্ষে দ্বিতীয় জাহাজের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করুন।
4. একটি বস্তু 12 ফুট/সেকেন্ড বেগে পূর্বদিকে এবং আরেকটি বস্তু 16 ফুট/সেকেন্ড বেগে উত্তর দিকে চলছে। প্রথম বস্তু সাপেক্ষে দ্বিতীয় বস্তুর আপেক্ষিক গতিবেগের মান ও দিক নির্ণয় করুন।
5. পরস্পর লম্বালম্বি দুটি রেলপথের একটি রেলপথ বরাবর 30 মা/ঘ. গতিবেগে চলমান একটি গাড়ি সন্ধ্যা 7 টায় জংশন অতিক্রম করে। অপর রেলপথ বরাবর 40মা/ঘ. গতিবেগে চলমান গাড়িটি রাত 12 টায় জংশনে পৌঁছে। তারা কখন সবচেয়ে নিকটবর্তী ছিল?
6. একজন লোক যখন 4 মা/ঘ. বেগে চলে তখন বৃষ্টির ধারা তাকে খাড়াভাবে আঘাত করে। যখন সে তার গতিবেগ একই দিকে 8 মাইলে বৃদ্ধি করে তখন বৃষ্টির ধারা তাকে 45° কোণে আঘাত করে। বৃষ্টির প্রকৃত গতিবেগের মান ও দিক নির্ণয় করুন।

পাঠ-৩
ত্বরণ

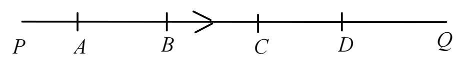
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সরলরেখার সমতলে চলমান বস্তুকণার জন্য গতিসূত্রগুলো নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে সূত্রগুলি প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

বেগ বৃদ্ধির হারকে ত্বরণ, আর বেগ হ্রাসের হারকে মন্দন বলা হয়। তাই বিয়োগবোধক ত্বরণই মন্দন। বেগ বৃদ্ধির হার একই থাকলে তাকে সুষম ত্বরণ বা সমত্বরণ বলে, অন্যথায় অসমত্বরণ বলা হয়।

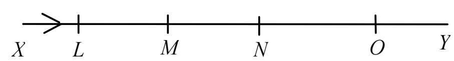
মনে করুন, PQ পথে চলমান একটি বস্তুকণা কোন এক সেকেন্ডে $AB=8$ ফুট, দ্বিতীয় সেকেন্ডে $BC=11$ ফুট, তৃতীয় সেকেন্ড $CD=14$ ফুট এভাবে পথ অতিক্রম করছে।



চিত্র ৯.৩.১

দেখা যাচ্ছে যে, কণাটি প্রতি সেকেন্ডে অতিরিক্ত 3 ফুট পথ অতিক্রম করছে। এক্ষেত্রে বস্তুকণাটি সমত্বরণে চলছে বলা হবে।

মনে করুন, XY পথে চলমান একটি বস্তুকণা কোন এক সেকেন্ডে $LM=6$ ফুট, দ্বিতীয় সেকেন্ডে $MN=10$ ফুট, তৃতীয় সেকেন্ডে $NO=13$ ফুট এভাবে পথ অতিক্রম করছে।



চিত্র ৯.৩.২

দেখা যাচ্ছে যে, কণাটি দ্বিতীয় সেকেন্ডে অতিরিক্ত 4 ফুট, তৃতীয় সেকেন্ডে অতিরিক্ত 3 ফুট অতিক্রম করছে। তাই বেগ বৃদ্ধির হার এক নয়। এক্ষেত্রে বস্তুকণাটি অসমত্বরণে চলছে বলা হবে। বর্তমান ইউনিটে সুষম ত্বরণই আলোচ্য বিষয়।

বেগের ন্যায় ত্বরণের নির্দিষ্ট মান ও দিক আছে। তাই বেগের সংযোজন ও বিভাজনের বিভিন্ন উপপাদ্যগুলো একইভাবে ত্বরণের সংযোজন ও বিভাজনের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হবে।

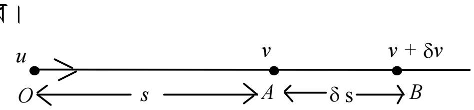
বেগ বৃদ্ধির হারকে ত্বরণ, আর বেগ হ্রাসের হারকে মন্দন বলা হয়। তাই বিয়োগবোধক ত্বরণই মন্দন। বেগ বৃদ্ধির হার একই থাকলে তাকে সুষম ত্বরণ বা সমত্বরণ বলে, অন্যথায় অসমত্বরণ বলা হয়।

ক্যালকুলাসের মাধ্যমে বেগ ও ত্বরণের প্রকাশ

মনে করুন, একটি বস্তুকণা O বিন্দু হতে u বেগে যাত্রা করে সরলপথে চলে t সময়ে $OA=s$ পথ অতিক্রমের পর বেগ বৃদ্ধি পেয়ে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং $t+\delta t$ সময়ে $OB=s+\delta s$ পথ অতিক্রম করে $v+\delta v$ বেগ প্রাপ্ত হয়। δt, δv, δs যথাক্রমে t, v, s এর অতি সামান্য বৃদ্ধি নির্দেশ করে।

অতএব, t সময়ে কণার বেগ $v=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{s+\delta s-s}{\delta t}$

$$=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta s}{\delta t}=\frac{ds}{dt}$$



চিত্র ৯.৩.৩

এবং কণার ত্বরণ $f=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{v+\delta v-v}{\delta t}=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\delta v}{\delta t}=\dfrac{dv}{dt}$

এখন $f = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$

আবার $f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$

অতএব বেগ $v = \frac{ds}{\mathrm{dt}}$ এবং ত্বরণ $f = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{d^2s}{dt^2}$

সমত্বরণে চলন্ত কণার গতির সমীকরণ

মনে করুন, কোন সরলরেখা বরাবর চলন্ত কোন কণা f সমত্বরণে চলে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে। কণাটির আদিবেগ u এবং শেষবেগ v হলে, কণার গতির সমীকরনসমূহ নিম্নরূপ হবে-

(i) $v = u+ft$

(ii) $s = ut+\frac{1}{2}ft^2$

(iii) $v^2=u^2+2fs$

গতির সমীকরণসমূহের প্রমাণ ঃ

(i) প্রমাণ করুন যে, $v = u+ft$

মনে করুন, একটি বস্তুকণা O বিন্দু হতে u বেগে সরলপথে যাত্রা করে t সময় পরে বেগ বৃদ্ধি পেয়ে A বিন্দুতে v বেগ এবং পরবর্তী δt সময় পর B বিন্দুতে $v+\delta v$ বেগ প্রাপ্ত হয় (চিত্র ৯.৩.৩)। δt ও δv যথাক্রমে t ও v এর অতি ক্ষুদ্র বৃদ্ধি নির্দেশ করে।

অতএব, AB পথে বেগের গড় বৃদ্ধির হার $= \frac{\delta v}{\delta t}$

$\therefore$ বেগ বৃদ্ধির হার অর্থাৎ ত্বরণ, $f = \lim_{\delta t \varnothing 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}$

বা, $fdt=dv$

বা, $\int fdt = \int dv$

বা, $v = ft + C$ (ধ্রুবক) ------------- (i)

যেহেতু t এর যে কোন মানের জন্য সমীকরণটি প্রযোজ্য, সেহেতু O বিন্দুতে $t=0$ ও $v=u$ হবে।

$\therefore u=f.0 + C$ বা, $C= u$

অতএব, (i) নং সমীকরণটি দাঁড়ায়, $v=u+ft$

(ii) প্রমাণ করুন যে, $s = ut+\frac{1}{2}ft^2$

মনে করুন, একটি বস্তুকণা O বিন্দু হতে u বেগে সরলপথে যাত্রা করে সমত্বরণে চলে t সময়ে $OA= s$ দূরত্ব অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং পরবর্তী δt সময়ে $AB=\delta s$ দূরত্ব অতিক্রম করে $v+\delta v$ বেগ প্রাপ্ত হয় (চিত্র ৯.৩.৩)। $\delta t, \delta v, \delta s$ যথাক্রমে t, v, s এর অতি সামান্য বৃদ্ধি নির্দেশ করে।

AB পথে গড়বেগ $= \frac{\delta s}{\delta t}$ এবং গড় ত্বরণ $= \frac{\delta v}{\delta t}$

এখন ত্বরণ $f= \lim_{\delta t \varnothing 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}$

বা, $dv = fdt$

$\therefore \int dv = \int fdt$ বা, $v=ft+C$ (ধ্রুবক), যা t এর যে কোন মানের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। O বিন্দুতে $t=0$ ও $v=u.$

$\therefore f.0+C=u$ বা, $C=u$

$\therefore v=u+ft$ ----------- (i)

আবার বেগ, $v = \lim_{\delta t \varnothing 0} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$

বা, $ds=vdt=(u+ft)\ dt;$ [(i) এর সাহায্যে]

$\therefore \int ds = \int (u+ft)dt$

বা, $\int ds = \int udt + f\int tdt$

বা, $s = ut + f.\frac{t^2}{2} + C_1$ (ধ্রুবক),

যা t এর যে কোন মানের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

O বিন্দুতে অর্থাৎ যাত্রা মুহূর্তে $t=0,\ s=0$

$\therefore\ 0= u.0 + \frac{1}{2}\ f.0 + C_1$ বা, $C_1=0$

$\therefore\ s= ut+\frac{1}{2}\ ft^2$

(iii) প্রমাণ করুন যে, $v^2=u^2+2fs$

মনে করুন, সরলপথে চলমান একটি বস্তুকণা O বিন্দু হতে u বেগে যাত্রা করে t সময়ে $OA=s$ এবং $t+\delta t$ সময়ে $OB=s+\delta s$ পথ অতিক্রম করে যথাক্রমে v ও $v+\delta v$ বেগ প্রাপ্ত হয় (চিত্র ৯.৩.৩)। এখানে $\delta t,\ \delta v,\ \delta s$ দ্বারা যথাক্রমে $t,\ v,\ s$ এর অতি সামান্য বৃদ্ধি নির্দেশ করে।

AB পথে গড় বেগ $= \frac{\delta s}{\delta t}$ এবং গড় ত্বরণ $= \frac{\delta v}{\delta t}$

$\therefore$ বেগ, $v = \lim_{\delta t \varnothing 0} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$ এবং ত্বরণ $f = \lim_{\delta t \varnothing 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}$

$\therefore f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$

বা, $fds = vdv$

$\therefore \int fds = \int vdv$

বা, $fs=\frac{v^2}{2} + C$ (ধ্রুবক), যা বস্তুর সকল অবস্থানে প্রযোজ্য।

O বিন্দুতে অর্থাৎ যাত্রা মুহূর্তে $s=0$ ও $v=u$

$\therefore \frac{u^2}{2} + C = f.0$ বা, $C = -$ **Error!**)

$\therefore fs = \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2}$

বা, $2fs = v^2-u^2$

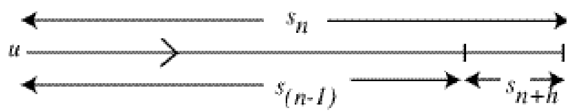
বা, $v^2=u^2+2fs$

দ্রষ্টব্য ঃ যদি কণাটি f সমমন্দনে চলে তাহলে উপরোক্ত সমীকরণসমূহ হবে

(i) $v = u-ft$, (ii) $s = ut-\frac{1}{2}ft^2$, (iii) $v^2=u^2-2fs$

সরলপথে চলমান বস্তুকণার n তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয়

মনে করুন, সরলপথে চলমান বস্তুকণা টির আদিবেগ u ও সমত্বরণ f । অতএব, $s_n = n$ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= un+\frac{1}{2}fn^2$



চিত্র: ৯.৩.৪

এবং $s_{(n-1)} = (n-1)$ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব$= u\,(n-1) + \frac{1}{2}\,f(n-1)^2$

$=un-u+\frac{1}{2}f(n^2-2n+1)$

$=un-u+\frac{1}{2}fn^2-fn+\frac{1}{2}f$

$\therefore\ s_{n+h} = n$তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

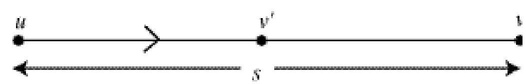
$= s_n - s_{n-1} = un+\frac{1}{2}fn^2 - un+u-\frac{1}{2}fn^2+fn-\frac{1}{2}f$

$= u + \frac{1}{2}\,f(2n-1)$

সমস্যা ঃ দেখান যে, (i) গড়বেগ = অর্ধ সময় অন্তে প্রাপ্ত বেগ

(ii) গড়বেগ = আদিবেগ ও শেষ বেগের সমষ্টির অর্ধেক।

সমাধান ঃ মনে করুন, সরলপথে চলমান একটি বস্তুকণা u আদিবেগে ও f সমত্বরণে চলে t সময়ে s পথ অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয়।



চিত্র: ৯.৩.৫

এখন গড়বেগ $= \dfrac{\text{অতিক্রান্ত পথ}}{\text{সময়}} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{ut+\frac{1}{2}ft^2}{t}$

$= u + \frac{1}{2}\,ft = u + f\left(\frac{t}{2}\right) = v' = \frac{t}{2}$ সময় অন্তে প্রাপ্ত বেগ

$= \dfrac{2u+ft}{2} = \dfrac{u+u+ft}{2}$

$= \dfrac{u+v}{2}$ = আদিবেগ ও শেষ বেগের সমষ্টির অর্ধেক

উদাহরণ 1 : একটি বস্তুকণা নির্দিষ্ট আদিবেগে যাত্রা করে 3 সেকেন্ডে 81 ফুট অতিক্রম করে। এরপর ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হয় এবং পরবর্তী 3 সেকেন্ডে বস্তুকণাটি 72 ফুট অতিক্রম করে। তার আদিবেগ ও ত্বরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, আদিবেগ u ও ত্বরণ f। প্রথম 3 সেকেন্ড পর ত্বরণ নিষ্ক্রিয় হওয়ায় বস্তুকণাটি সমবেগে চলবে। উক্ত বেগ, $v = \dfrac{72\text{ফুট}}{3\text{ সেকেন্ড}} = 24$ ফুট /সেকেন্ড.

এখন, $v = u+ft$ বা, $24 = u+f.3$ ---------- (i)

এবং $s = ut+\frac{1}{2}\,ft^2$ বা, $81 = u\cdot 3 + \frac{1}{2}\,f.3^2$

বা, $27 = u + \frac{3}{2}\,f$ ------- (ii)

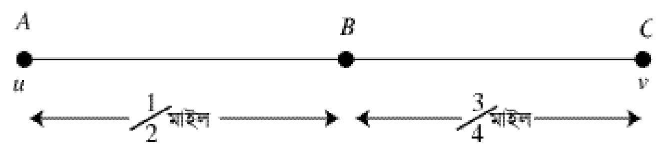
(i) হতে (ii) বিয়োগ করে $-3 = \frac{3}{2}\,f \quad \therefore f = -2$

এখন (i) হতে $u+(-2).\,3 = 24$ বা, $u=24+6=30$

অতএব, আদিবেগ, u= 30 ফুট/সেকেন্ড এবং ত্বরণ f=-2 ফুট/সেকেন্ড^2 অর্থাৎ মন্দন = 2 ফুট/সেকেন্ড ^{2}

উদাহরণ 2 : সমত্বরণে চলমান একটি গাড়ি $AB=\frac{1}{2}$ মাইল পথ 50 সেকেন্ডে এবং পরবর্তী $BC = \frac{3}{4}$ মাইল পথ 50 সেকেন্ড অতিক্রম করে। A ও C বিন্দুতে বেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান :



চিত্রঃ ৯.৩.৬

ধরুন, A ও C বিন্দুতে বেগ যথাক্রমে u ও v এবং ত্বরণ f।

এক্ষেত্রে $t_1=t_2$ = 50 সেকেন্ড = $\frac{50}{60*60}$ ঘন্টা = $\frac{1}{72}$ ঘন্টা

এখন $AB = ut_1 + \frac{1}{2} ft_1^2$ বা, $\frac{1}{2} = u.\frac{1}{72} + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{72}\right)^2$ ----- (i)

আবার $AC = u(t_1+t_2)+\frac{1}{2}f(t_1+t_2)^2$

বা, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = u.2.\frac{1}{72} + \frac{1}{2} f\left(2.\frac{1}{72}\right)^2$

বা, $\frac{5}{4} = \frac{2u}{72} + 2f\left(\frac{1}{72}\right)^2$

বা, $\frac{5}{8} = \frac{u}{72} + \frac{f}{(72)^2}$ .... (ii)

(ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই, $\frac{1}{2} .f. \frac{1}{(72)^2} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

বা, $f = 2.\frac{1}{8}.(72)^2 = \frac{1}{4}(72)^2$

এখন (ii) হতে পাই,

$\frac{5}{8} = \frac{u}{72} + \frac{1}{4}(72)^2 \cdot \frac{1}{(72)^2}$

বা, $u.\frac{1}{72} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

বা, $u.\frac{1}{72} = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ $\therefore u = \frac{3}{8} * 72 = 27$

$\therefore v = u+f(t_1+t_2) = 27 + \frac{1}{4}.(72)^2. 2. \frac{1}{72} = 27+36=63$

$\therefore$ A বিন্দুতে বেগ, u=27 মা/ঘ. এবং C বিন্দুতে বেগ, v = 63 মা/ঘ.

উদাহরণ 3 : একটি বুলেট কোন খাড়া দেয়ালের 3 ইঞ্চি ভেতরে ঢুকতে তার অর্ধেক বেগ হারায়। মন্দন সুষম হলে তা আর কতটুকু ভেতরে ঢুকতে পারবে?

সমাধান : মনে করুন, বুলেটের আদিবেগ u, দেয়ালের ভেতর সৃষ্ট মন্দন f এবং নির্ণেয় দূরত্ব $= s$ ইঞ্চি।

যেহেতু বুলেটটি দেয়ালে ভিতরে 3 ইঞ্চি ঢুকার পর বেগ হয় $\frac{u}{2}$

অতএব $\left(\frac{u}{2}\right)^2 = u^2 - 2.f.3$

বা, $6f = u^2 - \frac{u^2}{4} = \frac{3}{4}u^2$

$\therefore f = \frac{3u^2}{4*6} = \frac{u^2}{8}$ ------- (i)

আবার বুলেটটির শেষ বেগ $v = 0$

$\therefore 0^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 - 2f.s$ বা, $2fs = \frac{u^2}{4}$

$\therefore s = \frac{u^2}{8f} = \frac{u^2}{8\frac{u^2}{8}}$ [(i) নং এর সাহায্যে]

$= 1$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $s = 1$ইঞ্চি।

উদাহরণ 4 : একটি বুলেট একটি তক্তা ভেদ করতে তার বেগের $\frac{1}{20}$ অংশ হারায়। মন্দন সুষম হলে সেটি থামার পূর্বে পরপর স্থাপিত অনুরূপ কতগুলো তক্তা ভেদ করতে পারবে?

সমাধান : ধরুন, বুলেটের আদিবেগ u, মন্দন f, প্রতি তক্তার পুরুত্ব d। ধরন বুলেটটি n সংখ্যক তক্তা ভেদ করতে পারে। n সংখ্যক তক্তার পুরুত্ব, $s = nd.$

শর্ত অনুযায়ী,

$\left(u - \frac{u}{20}\right)^2 = u^2 - 2fd$

বা, $\left(\frac{19}{20}u\right)^2 = u^2 - 2fd$

বা, $2fd = u^2 - \left(\frac{19}{20}u\right)^2$

বা, $2fd = \left(1 - \frac{19^2}{20^2}\right)u^2 = \frac{20^2 - 19^2}{20^2}u^2 = \frac{400-361}{400}u^2 = \frac{39}{400}u^2$ -------(i)

আবার, $v^2 = u^2 - 2fs$ বা, $0^2 = u^2 - 2f.\ nd$

বা, $n = \frac{u^2}{2fd} = \frac{u^2}{\frac{39}{400}u^2}$, [(i) নং এর সাহায্যে]

$= \frac{400}{39} = 10\frac{10}{39}$

$\therefore$ নির্ণেয় তক্তার সংখ্যা $= 10\frac{10}{39}$ খানা।

উদাহরণ 5 : একটি বস্তুকণা নির্দিষ্ট আদিবেগে ও f সমত্বরণে চলে t সময়ে s পথ এবং পরবর্তী t' সময়ে s' পথ অতিক্রম করে। দেখান যে, $f = \frac{2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)}{t+t'}$

সমাধান : ধরুন, আদিবেগ $= u$

$\therefore\ s=ut + \frac{1}{2}ft^2$ .... (i)

এবং $s+s' = u(t+t') + \frac{1}{2} f(t+t')^2$

বা, $s+s' = ut+ut' + \frac{1}{2} ft^2+ \frac{1}{2} ft'^2+ftt'$ .... (ii)

(ii) হতে (i) বিয়োগ করে, $s' = ut'+\frac{1}{2}\ \partial(2t+t')t'$

বা, $\frac{s'}{t'} = u+\frac{1}{2} f(2t+t')$

আবার (i) হতে পাই, $\frac{s}{t} = u+\frac{1}{2} ft$

এখন $\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t} = \frac{1}{2}f(2t+t') - \frac{1}{2}ft$

বা, $\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t} = \frac{1}{2}f(t+t')$

বা, $f = \frac{2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)}{t+t'}$

উদাহরণ 6 : সমত্বরণে চলমান একটি বস্তুকণা পরপর $t_1,\ t_2,\ t_3$ সময়ে পর্যায়ক্রমে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখান যে, $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1+t_2+t_3}$

সমাধান : ধরুন, আদিবেগে u ও ত্বরণ f

$\therefore\ s = ut_1 + \frac{1}{2} ft_1^2$ ------- (i)

$2s = u(t_1+t_2) + \frac{1}{2} f(t_1+t_2)^2$ ----------- (ii)

$3s = u(t_1+t_2+t_3) + \frac{1}{2}f(t_1+t_2+t_3)^2$ ------ (iii)

(i) হতে পাই, $\frac{s}{t_1} = u+ \frac{1}{2}ft_1$ ----------(1)

(ii) হতে (i) বিয়োগ করে, $s= ut_2 + \frac{1}{2} f(2t_1+t_2)t_2$

বা, $\frac{s}{t_2} = u + \frac{1}{2} f(2t_1+t_2)$ -------- (2)

(iii) হতে (ii) বিয়োগ করে, $s= ut_3+\frac{1}{2}f(2t_1+2t_2+t_3)t_3$

বা, $\frac{s}{t_3} = u+\frac{1}{2} f(2t_1+2t_2+t_3)$ ------- (3)

(iii) হতে পাই, $\frac{3s}{t_1+t_2+t_3} = u+\frac{1}{2} f(t_1+t_2+t_3)$ ----- (4)

এখন (1) – (2) + (3) প্রয়োগ করে

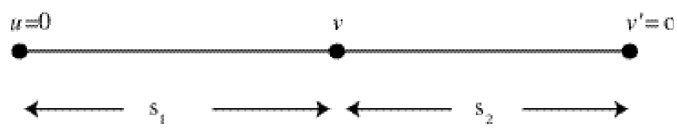
$$\frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2} + \frac{s}{t_3} = u+\frac{1}{2}f(t_1+t_2+t_3) = \frac{3s}{t_1+t_2+t_3}, \quad [(4) \text{ এর সাহায্যে}]$$

$$\therefore \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1+t_2+t_3}$$

উদাহরণ 7 : স্থির অবস্থা হতে সরলপথে চলমান একটি বস্তুকণা প্রথমে f_1 সমত্বরণে এবং পরবর্তী সময়ে f_2 সমমন্দনে চলে t সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করে থেমে যায়। প্রমাণ করুন যে,

(i) $\frac{t^2}{2s} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$, (ii) $t = \sqrt{\frac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}}$

সমাধান :



চিত্র: ৯.৩.৭

মনে করুন, সরলপথে চলমান বস্তুকণাটি প্রথমে t_1 সময়ে f_1 সমত্বরণে চলে s_1 পথ অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং পরবর্তীতে f_2 মন্দনে t_2 সময়ে s_2 পথ অতিক্রমের পর থেমে যায়।

ত্বরণ অংশের ক্ষেত্রে, $v = 0+f_1t_1$ বা, $t_1 = \frac{v}{f_1}$ ---------- (i)

এবং $v^2=0^2 + 2f_1s_1$ বা, $2s_1 = \frac{v^2}{f_1}$ ------------------- (ii)

মন্দন অংশের ক্ষেত্রে, $0 = v- f_2t_2$ বা, $t_2=\frac{v}{f_2}$ ------------- (iii)

এবং $0^2=v^2-2f_2s_2$ বা, $2s_2 = \frac{v2}{f_2}$ ------------------------ (iv)

অতএব, $t = t_1+t_2 = \frac{v}{f_1} + \frac{v}{f_2} = v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$ [(i) নং ও (iii) নং এর সাহায্যে]

এবং $2s = 2(s_1+s_2) = \frac{v^2}{f_1} + \frac{v^2}{f_2} = v^2\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$ [(ii) নং ও (iv) নং এর সাহায্যে]

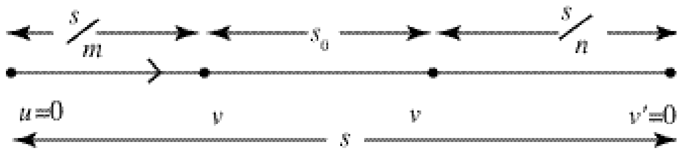
এখন $\frac{t^2}{2s} = \frac{v^2\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)^2}{v^2\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

বা, $t^2 = 2s\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) = \frac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2s(f_1+f_2)}{f_1f_2}}$$

উদাহরণ 8 : একটি ট্রেন দুটি স্টেশনের মধ্যবর্তী দূরত্বের প্রথম $\frac{1}{m}$ অংশ সমত্বরণে, শেষ $\frac{1}{n}$ অংশে সমমন্দনে এবং বাকি অংশ সমবেগে চলে। যদি ট্রেনটি এক স্টেশন হতে ছেড়ে অপর স্টেশনে থামে তবে দেখান যে, তার সর্বোচ্চ বেগ ও গড়বেগের অনুপাত $\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ ঃ 1

সমাধান ঃ



চিত্র: ৯.৩.৮

মনে করুন, স্টেশনদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব s। প্রথম s/m অংশ f_1 সমত্বরণে t_1 সময়ে, পরবর্তীতে v সমবেগে s_0 পথ t_0 সময়ে এবং শেষ s/n অংশ f_2 সমমন্দনে t_2 সময়ে অতিক্রম করে।

$$\therefore\ s_0 = s - \left(\frac{s}{m} + \frac{s}{n}\right) = s\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$$

ত্বরণের ক্ষেত্রে, $v = f_1 t_1$ বা, $t_1 = \frac{v}{f_1}$ এবং $v^2 = 2f_1 . \frac{s}{m}$ বা, $f_1 = \frac{mv^2}{2s}$

$$\therefore\ t_1 = \frac{v}{\frac{mv^2}{2s}} = \frac{2s}{mv} \text{ ---------- (i)}$$

মন্দনের ক্ষেত্রে $0 = v - f_2 t_2$ বা, $t_2 = \frac{v}{f_2}$ এবং $v^2 = 2f_2 . \frac{s}{n}$ বা, $f_2 = \frac{nv^2}{2s}$

$$\therefore\ t_2 = \frac{v}{\frac{nv^2}{2s}} = \frac{2s}{nv} \text{ -------------- (ii)}$$

সমবেগের ক্ষেত্রে, $t_0 = \frac{s_0}{v} = \frac{s}{v}\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$

মোট সময় $t = t_1 + t_0 + t_2 = \frac{2s}{mv} + \frac{s}{v}\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + \frac{2s}{nv}$

$$= \frac{s}{v}\left(\frac{2}{m} + 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\right) = \frac{s}{v}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

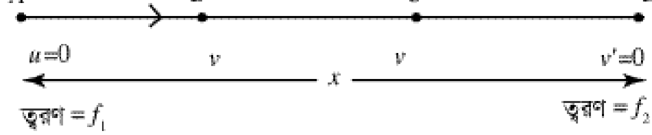
সর্বোচ্চ বেগ ঃ গড়বেগ $= v : \frac{s}{t} = v : \dfrac{s}{\frac{s}{v}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$

$$= v : \frac{v}{1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = 1 : \frac{1}{1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + 1\right) : 1$$

উদাহরণ 9 *:* স্থিরাবস্থা হতে একটি গাড়ি f_1 সমত্বরণে যাত্রা শুরু করলো। v গতিবেগ অর্জিত হবার পর নির্দিষ্ট সময় পর্যন্ত তা সমবেগে চলে। পরিশেষে f_2 সমমন্দনে চলে বেগ শূন্য হয়। যদি সম্পূর্ণ দূরত্ব x এবং মোট সময়কাল t হয় তবে দেখান যে,

(i) $t = \frac{x}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)$; (ii) $2x = v\left\{2t - v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\right\}$

সমাধান :



চিত্র: ৯.৩.৯

মনে করুন, গাড়িটি A বিন্দুতে স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা শুরু করে f_1 সমত্বরণে চলে t_1 সময়ে $AB = x_1$ পথ অতিক্রম করে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং v বেগে $BC = x_0$ পথ t_0 সময়ে অতিক্রম করে। পরবর্তী t_2 সময়ে f_2 সমমন্দনে $CD=x_2$ পথ অতিক্রমের পর গাড়িটি থামে। মনে করুন মোট দূরত্ব $= x$

ত্বরণের ক্ষেত্রে $v = f_1 t_1$ বা, $t_1 = \dfrac{v}{f_1}$

এবং $v^2 = 2f_1 x_1$ বা, $x_1 = \dfrac{v^2}{2f_1}$

মন্দনের ক্ষেত্রে $0 = v - f_2 t_2$ বা, $t_2 = \dfrac{v}{f_2}$

এবং $0^2 = v^2 - 2f_2 x_2$ বা, $x_2 = \dfrac{v^2}{2f_2}$

সমবেগের ক্ষেত্রে $t_0 = \dfrac{x_0}{v}$

এখন $t = t_1 + t_0 + t_2 = \dfrac{v}{f_1} + \dfrac{x_0}{v} + \dfrac{v}{f_2}$

$$= v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \frac{x-(x_1+x_2)}{v}\ ,\ (\because x = x_1 + x_0 + x_2)$$

$$= v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) + \frac{x}{v} - \frac{1}{v}\left(\frac{v^2}{2f_1} + \frac{v^2}{2f_2}\right)$$

$$= \frac{x}{v} + v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) - \frac{1}{2}\ v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) = \frac{x}{v} + \frac{1}{2} v\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_1}\right)$$

বা, $2vt = 2x + v^2\left(\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}\right)$ $\therefore 2x = v\left[2t - v\left(\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}\right)\right]$

উদাহরণ 10 : u আদিবেগে ও f সমত্বরণে চলমান কোন বস্তু p তম, q তম ও r তম সেকেন্ডে যথাক্রমে a, b ও c দূরত্ব অতিক্রম করে। দেখান যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$

সমাধান : $a = p$তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত পথ $= u + \dfrac{1}{2} f(2p-1)$ .... (i)

$b = q$তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত পথ $= u + \dfrac{1}{2} f(2q-1)$ .... (ii)

$c = r$ তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত পথ $= u + \dfrac{1}{2} f(2r-1)$ .... (iii)

(i) - (ii), $(a-b) = \dfrac{1}{2} f.2\ (p-q)$ বা, $p-q = \dfrac{1}{f}(a-b)$

(ii) - (iii), $(b-c) = \dfrac{1}{2} f.\ 2(q-r)$ বা, $q-r = \dfrac{1}{f}(b-c)$

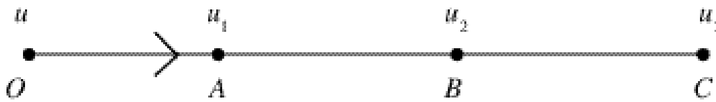
(iii) - (i), $(c-a) = \dfrac{1}{2} f.\ 2(r-p)$ বা, $r-p = \dfrac{1}{f}(c-a)$

এখন, $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = a\dfrac{1}{f}(b-c) + b\dfrac{1}{f}(c-a) + c\dfrac{1}{f}(a-b)$

$$= \frac{1}{f}\ [ab-ac+bc-ab+ca-bc] = \frac{1}{f} * 0 = 0$$

উদাহরণ 11 : একটি সরলরেখা বরাবর সমত্বরণে চলমান কোন বস্তুর পর্যায়ক্রমে তিনটি বিরতিকাল t_1, t_2, t_3 তে গড়বেগের পরিমাণ যথাক্রমে v_1, v_2, v_3 হলে দেখান যে, $\frac{v_1-v_2}{v_2-v_3}=\frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$

সমাধান :



চিত্র:৯.৩.১০

মনে করুন, বস্তুকণাটি O বিন্দু হতে u বেগে যাত্রা করে f সমত্বরণে চলে t_1 সময় পর A বিন্দুতে u_1 পরবর্তী t_2 সময় পর B বিন্দুতে u_2, এবং তার পরবর্তী t_3 সময় পর C বিন্দুতে u_3 বেগ প্রাপ্ত হয়।

$\therefore u_1=u+ft_1,$

$u_2=u_1+ft_2=u+ft_1+ft_2$

বা, $u_2-u=f(t_1+t_2)$

এবং $u_3=u_2+ft_3=u_1+ft_2+ft_3$ বা, $u_3-u_1=f(t_2+t_3)$

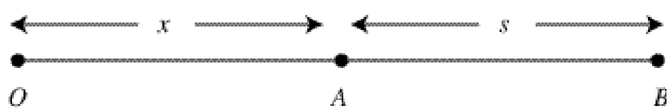
$$\frac{v_1-v_2}{v_2-v_3}=\frac{v_2-v_1}{v_3-v_2}=\left(\frac{u_1+u_2}{2}-\frac{u+u_1}{2}\right)/\left(\frac{u_2+u_3}{2}-\frac{u_1+u_2}{2}\right)=\frac{u_2-u}{u_3-u_1}$$

$$=\frac{f(t_1+t_2)}{f(t_2+t_3)}=\frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$$

$$\therefore \frac{v_1-v_2}{v_2-v_3}=\frac{t_1+t_2}{t_2+t_3}$$

উদাহরণ 12 : একটি বাস স্থির অবস্থান হতে 2 ফুট/সে^{2} সমত্বরণে যাত্রা শুরু করলো। দেখান যে, একজন যাত্রী 25 ফুটের অধিক পিছন হতে 10 ফুট/সে. সমবেগে দৌঁড়ে বাসটি ধরতে পারবে না।

সমাধান :



চিত্র: ৯.৩.১১

মনে করুন, O লোকটির আদি অবস্থান, A বাসটির আদি অবস্থান এবং t সময় পর লোকটি B বিন্দুতে বাসটি ধরে। ধরুন, $OA=x$ ও $AB=s.$

বাসের ক্ষেত্রে, $s=0.t+\frac{1}{2}ft^2=\frac{1}{2}ft^2=\frac{1}{2}.2.t^2=t^2$ ----------- (i)

এবং যাত্রীর ক্ষেত্রে $x+s=vt=10t$ ------------- (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, $x+t^2=10t$ বা, $t^2-10t+x=0$

বাসটি ধরার জন্য t এর মান বাস্তব হতে হবে। সেক্ষেত্রে নিশ্চয়ক ≥ 0

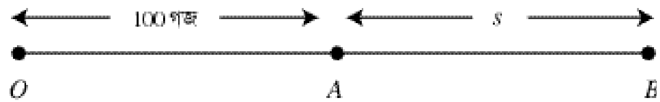
বা, $10^2-4x\geq 0$ বা, $100-4x\geq 0$ বা, $25\geq x$

$\therefore x\leq 25$

অতএব x এর মান 25 ফুট বা 25 ফুট এর কম হলে বাস ধরা যাবে অর্থাৎ x এর মান 25 ফুট এর বেশি হলে বাস ধরা যাবে না। সুতরাং যাত্রীটি বাসটি ধরতে পারবে না।

উদাহরণ 13 : একজন লোক তার 100 গজ সামনে স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে একটি বাস ছাড়তে দেখে তা ধরার জন্য সমবেগে দৌঁড়াতে শুরু করলো। যদি সে 1 মিনিটে কোন রকমে বাসটি ধরতে পারে, তবে লোকটির বেগ ও বাসের ত্বরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান :



চিত্র: ৯.৩.১২

মনে করুন, লোকটির আদি অবস্থান O, বাসের যাত্রাবিন্দু A এবং t=1 মিনিট = 60 সেকেন্ড পর লোকটি B বিন্দুতে বাস ধরে। OA=100 গজ= 300 ফুট। ধরুন $AB=s$ ও বাসের ত্বরণ= f ।

যেহেতু লোকটি কোন রকমে বাসটি ধরে, সেহেতু B বিন্দুতে বাসের বেগ= লোকের বেগ = v (ধরুন)।

লোকটির ক্ষেত্রে, $s+300 = vt$

$= v.\ 60$ ------------- (i)

এবং বাসের ক্ষেত্রে $v = ft = f.60$ .... (ii)

ও $s = \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}f.60^2$ ------------- (iii)

(i), (ii) ও (iii) হতে , $\frac{1}{2}f.60^2 + 300 = f.60.60$

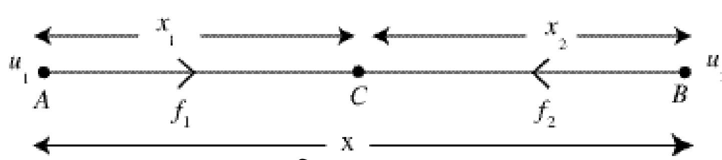
বা, $300 = \frac{1}{2}f.\ 60^2 \quad \therefore f = \frac{2 * 300}{60 * 60} = \frac{1}{6}$

$\therefore v = f.60 = \frac{1}{6} * 60$ ফুট/সেকেন্ড = 10 ফুট/সেকেন্ড

অতএব বাসের ত্বরণ $= \frac{1}{6}$ ফুট/সেকেন্ড^2 এবং লোকটির বেগ = 10 ফুট/সেকেন্ড.

উদাহরণ 14 : দুইটি ট্রেন একই রেলপথে বিপরীত দিক হতে যথাক্রমে u_1 ও u_2 গতিবেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। যখন মধ্যবর্তী দূরত্ব x তখন ট্রেন দুটিতে যথাক্রমে f_1 ও f_2 মন্দন প্রয়োগ করা হলো। দেখান যে, এদের মধ্যে সংঘর্ষ কোন রকমে এড়ানো সম্ভব যদি $u_1^2\ f_2\ + u_2^2\ f_1\ + = 2f_1 f_2 x$. হয়।

সমাধান :



চিত্র: ৯.৩.১৩

মনে করুন, একটি ট্রেন A বিন্দু হতে u_1 বেগে এবং অপর ট্রেন B বিন্দু হতে u_2 বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে।

কোন রকমে সংঘর্ষ এড়ানোর ক্ষেত্রে উভয় ট্রেন এক বিন্দু C-তে থেমে যাবে। C বিন্দুতে উভয় ট্রেনের বেগ শূণ্য। ট্রেনদ্বয়ের অতিক্রান্ত পথ যথাক্রমে x_1 ও x_2 হলে মোট দূরত্ব $x=x_1+x_2$ হবে।

$\therefore 0^2 = u_1^2 - 2f_1x_1$ বা, $2x_1 = \frac{u_1^2}{f_1}$

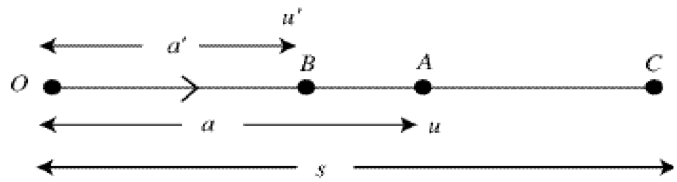
এবং $0^2 = u_2^2 - 2f_2x_2$ বা, $2x_2 = \frac{u_2^2}{f_2}$

$\therefore \frac{u_1^2}{f_1} + \frac{u_2^2}{f_2} = 2(x_1+x_2)$ বা, $\frac{u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1}{f_1f_2} = 2x$

$\therefore u_1^2 f_2 + u_2^2 f_1 = 2f_1f_2x$

উদাহরণ 15 : দুইটি বস্তুকণা একই সরলরেখায়, f ও f' সমত্বরণে চলছে। উক্ত রেখার কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে a ও a' দূরত্বে তাদের গতিবেগ ছিল যথাক্রমে u ও u'। দেখান যে, তারা দুই বারের বেশি মিলিত হতে পারে না এবং যদি দুবার মিলিত হয়, তবে সময় দুটির ব্যবধান হবে $\frac{2}{f-f'}\sqrt{(u-u')^2 - 2(a-a')(f-f')}$

সমাধান :



চিত্র: ৯.৩.১৪

মনে করুন, O বিন্দু হতে a দূরে অবস্থিত A বিন্দুতে একটি বস্তু কণার বেগ u এবং a' দূরে অবস্থিত B বিন্দুতে আরেকটি বস্তুকণার বেগ u' । t সময় পরে উহারা C বিন্দুতে মিলিত হয়। ধরুন, $OC = s$

$\therefore AC = s-a$ ও $BC = s-a'$

$s-a= ut + \frac{1}{2}ft^2$ ----------- (i)

ও $s-a' = ut + \frac{1}{2} f't^2$ ------------ (ii)

(i) - (ii), $a'-a = (u-u')t + \frac{1}{2}(f-f')\ t^2$

বা, $(f-f')\,t^2 + 2(u-u')t + 2(a-a') = 0$, যা t এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

তাই t এর মান দুইটি। সুতরাং তারা দুইবারের বেশি মিলিত হতে পারে না। যদি t এর মান দুটি বাস্তব ও ধনাত্মক হয়, তবে তারা দুইবার মিলিত হবে। ধরুন, t এর মান t_1 ও t_2

$\therefore t_1+t_2 = -\frac{2(u-u')}{f-f'}$ ও $t_1t_2 = \frac{2(a-a')}{f-f'}$

এখন $(t_1-t_2)^2 = (t_1+t_2)^2 - 4t_1t_2$

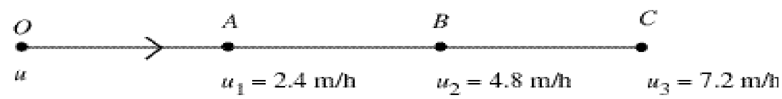
$= 4\frac{(u-u')^2}{(f-f')^2} - 4.\frac{2(a-a')}{f-f'}$

$= \frac{4}{(f-f')^2}\,[(u-u')^2 - 2(a-a')\,(f-f')]$

$\therefore t_1{\sim}t_2 = \frac{2}{f-f'}\sqrt{(u-u')^2 - 2(a-a')(f-f')}$

উদাহরণ 16 : সরলরেখা বরাবর চলমান একটি বস্তুকণা 0.04, 0.08, 0.12 ঘন্টা শেষে যথাক্রমে প্রতি ঘন্টায় 2.4, 4.8, 7.2 মাইল বেগ প্রাপ্ত হয়। কণাটি 1 ঘন্টায় কতটুকু পথ অতিক্রম করবে?

সমাধান :



চিত্র:৯.৩.১৫

মনে করুন, বস্তু কণাটি O বিন্দু হতে u বেগে যাত্রা করে OA পথ $t_1=0.04$ ঘন্টা সময়ে অতিক্রমের পর $u_1=2.4$ মাইল/ঘন্টা, OB পথ $t_2=.08$ ঘন্টা সময়ে অতিক্রমের পর $u_2=4.8$ মাইল/ঘন্টা এবং OC পথ $t_3=0.12$ ঘন্টা সময়ে অতিক্রমের পর $u_3=7.2$ মাইল/ঘন্টা বেগ প্রাপ্ত হয়।

AB পথে ত্বরণ $=\dfrac{u_2-u_1}{t_2-t_1}=\dfrac{(4.8-2.4)\text{মাইল/ঘন্টা}}{(.08-.04)\text{ঘন্টা}}=\dfrac{2.4}{.04}$ মাইল/ঘন্টা$^2=60$ মাইল/ঘন্টা^{2}

এবং AC পথে ত্বরণ $=\dfrac{u_3-u_1}{t_2-t_1}=\dfrac{(7.2-2.4)\text{ মাইল/ঘন্টা}}{(.12-.04)\text{ ঘন্টা}}=\dfrac{4.8}{.08}$ ম াইল/ঘন্টা$^2=60$ মাইল/ঘন্টা^{2}

$\therefore$ কণাটি সমত্বরণে চলে এবং উক্ত ত্বরণ, $f=60$ মাইল/ঘন্টা^{2}

আবার, $u_1=u+ft_1$ বা, $2.4=u+60*.04=u+2.4 \;\therefore\; u=0$

$\therefore$ 1 ঘন্টায় অতিক্রান্ত পথ, $s=\dfrac{1}{2}ft^2=\dfrac{1}{2}.\,60.1^2=30$ মাইল।

অনুশীলনী ৯.৩

1. স্থির অবস্থা হতে যাত্রা করে একটি গাড়ি সমত্বরণে চলছে । 5 সেকেন্ড পর গাড়িটির বেগ 10 কিলোমিটার হলে, আরও 10 সেকেন্ড পর তার দূরত্ব কত হবে নির্ণয় করুন।
2. ঘন্টার 30 মাইল বেগে চলন্ত একটা বাসকে ব্রেকের সাহায্যে 100 ফুট দূরত্বের মধ্যে থামান হল। ব্রেক প্রয়োগের ফলে উৎপন্ন মন্দন নির্ণয় করুন।
3. কোন কোন স্টেশন হতে ছাড়ার 6 মিনিট পরে একটি রেলগাড়ি 2 মাইল দূরে পরবর্তী স্টেশনে থামে। গাড়িটি তার গতিপথের দুই তৃতীয়াংশ সমত্বরণে চলে এবং অবশিষ্ট অংশ সমমন্দনে চলে। তার ত্বরণ, মন্দন ও সর্বোচ্চ বেগ নির্ণয় করুন।
4. একটি বুলেট কোন দেওয়ালের ভিতর 2 ইঞ্চি ঢুকার পর তার অর্ধেক বেগ হারায়। বুলেট দেওয়ালের মধ্যে আর কতদূর যাবে।
5. একটি কণা u আদিবেগে f ও f^1 ত্বরণে কোন নির্দিষ্ট দূরত্বের দুই অর্ধাংশ অতিক্রম করে। প্রমাণ করুন $\dfrac{1}{2}(f+f^1)$ ত্বরণে সম্পূর্ণ দূরত্ব অতিক্রম করলে একই অন্তবেগ হবে।
6. একটি রেলগাড়ি ঢাকা হতে ছেড়ে নারায়নগঞ্জে যেয়ে থামে। গাড়িটি তার গতিপথের প্রথম চতুর্থাংশ সমত্বরণে, শেষ চতুর্থাংশ সমমন্দনে এবং মধ্যবর্তী অর্ধাংশ সমবেগে চলে। দেখান যে, গাড়িটির গড়বেগ তার সর্বোচ্চ বেগের অংশের সমান।
7. একটি বাঘ 20 মিটার দূরে একটি হরিণকে দেখতে পেয়ে স্থির অবস্থা হতে 3 মি/সে^{2} ত্বরণে হরিণটির পিছনে দৌড়াতে শুরু করলো। হরিণটি 13 মি/সে সমবেগে দৌড়াতে থাকলে কতক্ষণ পরে কত দূরে যেয়ে বাঘটি হরিণটিকে ধরতে পারবে?
8. একই লাইনে একটি এক্সপ্রেস গাড়ি একটি মালগাড়িকে অতিক্রম করায় সময় যখন তাদের বেগ যথাক্রমে u_1 ও u_2 তখন তারা x দূরত্বে একে অপরকে দেখতে পায়। গাড়ি দুটির সর্বোচ্চ ত্বরণ f_1 এবং সর্বোচ্চ মন্দন f_2 হলে দেখান যে, দুর্ঘটনা এড়ানো সম্ভব হবে কেবল যদি $(u_1-u_2)^2=2(f_1+f_1)x$ হয়।

9. একটি রেলগাড়ি কোন এক স্টেশন থেকে ছেড়ে 4 মিনিট পরে 2 মাইল দূরে অবস্থিত অপর স্টেশনে থামে। গাড়িটি তার গতিপথের প্রথমাংশ x সমত্বরণে এবং দ্বিতীয়াংশ y সমমন্দনে চললে প্রমাণ করুন, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$

10. দুইটি কণা একই সরলরেখায় যথাক্রমে a ও b সমত্বরণে চলছে । ঐ সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হতে যখন তাদের দূরত্ব x ও y তখন তাদের বেগ যথাক্রমে u ও v। দেখান যে, তারা দুইবারের অধিক মিলিত হতে পারে না। যদি তারা দুইবার মিলিত হয়, তবে তাদের মিলিত হবার সময়ের পার্থক্য $\frac{2}{(a-b)}\sqrt{(u-v)^2-2(x-y)(a-b)}$

পাঠ-৪

উল্লম্ব গতির ক্ষেত্রে ত্বরণ সম্পর্কিত সূত্রসমূহের প্রয়োগ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- উল্লম্ব গতির ক্ষেত্রে ত্বরণ সম্পর্কিত সূত্র সমূহ প্রয়োগ করে, সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

কোন বস্তুকে শূন্য হতে ছেড়ে দিলে তা ক্রমান্বয়ে বেগ বৃদ্ধি পেয়ে ভূমিতে পতিত হয়। আবার কোন বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে ক্রমান্বয়ে বেগ হ্রাস পেয়ে বেগ শূন্য হয়, তারপর একই হারে বেগ বৃদ্ধি পেয়ে একই পথে ভূমিতে পতিত হয়। পৃথিবী সকল বস্তুকে তার কেন্দ্রের দিকে টানে; সেই টানের কারণেই সৃষ্ট এই ত্বরণ ও মন্দন। পৃথিবীল এই টানকে মাধ্যাকর্ষণ বলা হয়। মাধ্যাকর্ষণের কারণে সৃষ্ট ত্বরণকে মাধ্যাকর্ষণ জনিত ত্বরণ বা অভিকর্ষজনিত ত্বরণ বলা হয়। এই ত্বরণ বস্তুর আকার বা ওজনের উপর নির্ভর করে না। র্পযন্ত বস্তুর ত্বরণ আর খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর মন্দন নির্দিষ্ট এবং তা একই মানের। পৃথিবীর উপরস্থ বিভিন্ন অবস্থানে এবং উচ্চতা ভেদে ত্বরণের মানের তারতম্য হয়, তবে তা অতিশয় ক্ষুদ্র। তাই সাধারণত এই তারতম্যকে অগ্রাহ্য করা হয়।

বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের কারণে সৃষ্ট ত্বরণ/মন্দনকে সাধারণত f প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়; আর অভিকর্ষজনিত ত্বরণকে g প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। g এর গৃহীত মান হচ্ছে 32 ফুট/সেকেন্ড^2 বা 981 সেমি/সেকেন্ড^2।

সাধারণতঃ সরণকে s প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। এখানে সরণটি উচ্চতা, তাই h প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অত্এব $v=u\pm ft,\ s=ut\pm\frac{1}{2}ft^2,\ v^2=u^2 \pm 2fs$ ও $s_{t\text{ তম}} = u+\frac{1}{2}\ f(2t-1)$ সূত্রসমূহের অনুরূপ সূত্র যথাক্রমে

$v = u\pm gh,\ h=ut \pm \frac{1}{2}gt^2,\ v^2=u^2\pm 2gh$ ও $h_{t\text{ তম}} = u+\frac{1}{2}g\ (2t-1)$।

পতনশীল বস্তুর গতি

মনে করুন, মাধ্যাকর্ষনের প্রভাবে h উচ্চতা হতে পতিত একটি কণা t সময়ে v বেগে ভূমিতে পতিত হল।

$v = u+ft,\ s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ ও $v^2 = u^2+2fs$ সমীকরণসমূহে $u=0,\ f=g,\ s=h$ বসিয়ে পতনশীল বস্তুর সমীকরণ পাওয়া যায়। তাহলে

$v=gt$ .... (i)

$h=\frac{1}{2}gf^2$ .... (ii)

$v^2 = ugh$ বা, $v = \sqrt{2gh}$ .... (iii)

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ হতে স্পষ্ট যে, বস্তুর আকার বা আয়তন যাই হোক না কেন, একই উচ্চতা বিশিষ্ট স্থান থেকে ছেড়ে দিলে তাদের পতনের সময় ও ভূমিতে পৌঁছার কালে বেগ একই হবে।

একটি বস্তুকণা u আদিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হলো। (i) সর্বাধিক উচ্চতা (ii) উত্থানকাল (iii) পতনকাল (iv) বিচরণকাল নির্ণয় করুন।

মনে কুরন, u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণাটি g মন্দনে চলে সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগ শূন্য হয়। সর্বাধিক উচ্চতা H হলে,

$0^2 = u^2 - 2gH \;\therefore\; H = \dfrac{u^2}{2g}$

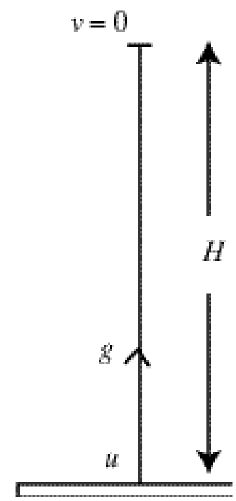
$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতা $= \dfrac{u^2}{2g}$

কণাটির উত্থানকাল t_1 হলে, ঐ সময়ে কণার উর্ধ্বমূখী বেগ শূণ্য

$\therefore\; 0 = u - gt_1$

$\therefore\; t_1 = \dfrac{u}{g}$

কণাটির উত্থানকাল $= \dfrac{u}{g}$



চিত্র ৯.৪.১

কণাটির পতনকাল t_2 হলে,

$H = 0.t_2 + \dfrac{1}{2}\, gt_2^2 \;\left(\because \text{আদিবেগ} = 0 \text{ ও ত্বরণ} = g\right)$

বা, $\dfrac{u^2}{2g} = \dfrac{1}{2}\, gt_2^2 \left[\because H = \dfrac{u^2}{2g}\right]$

বা, $t_2^2 = \dfrac{u^2}{g^2} = \left(\dfrac{u}{g}\right)^2 \;\therefore\; t_2 = \dfrac{u}{g}$

$\therefore$ কণাটির পতনকাল $= \dfrac{u}{g}$

$\therefore$ উত্থানকাল = পতনকাল $= \dfrac{u}{g}$

বিচরণকাল = উত্থানকাল + পতনকাল $= \dfrac{u}{g} + \dfrac{u}{g} = \dfrac{2u}{g}$

একটি বস্তুকণা u আদিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হলে (i) সর্বাধিক উচ্চতা $= \frac{u^2}{2g}$ (ii) উত্থানকাল $= \frac{u}{g}$ (iii) পতনকাল $= \frac{u}{g}$ এবং (iv) বিচরণকাল = উত্থানকাল + পতনকাল $= \frac{u}{g} + \frac{u}{g} = \frac{2u}{g}$ ।

উপপাদ্য ঃ দেখান যে, ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নির্দিষ্ট গতিবেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার ক্ষেত্র, ভূমিতে পতনবেগ = নিক্ষেপণ বেগ।

মনে করুন, নিক্ষেপণ বেগ = u ও ভূমিতে পতন বেগ $=v$ ।

u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুটি g মন্দনে চলে সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগ শূন্য হয়। সর্বাধিক উচ্চতা H হলে, $0^2 = u^2 - 2gH$

$2gH = u^2$ ---------- (i)

সর্বোচ্চ বিন্দু হতে পতনকালীন আদিবেগ = 0, ভূমি স্পর্শ মুহূর্তে বেগ = v ও ত্বরণ $= g$

$\therefore v^2 = 0^2 + 2gH = 2gH = u^2,$ [(i) এর সাহায্যে]

$\therefore v = u$

অতএব ভূমিতে পতনকালে বেগ = নিক্ষেপন বেগ

উপপাদ্য ঃ একটি বস্তুকণা u গতিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হলো। দেখান যে, কোন নির্দিষ্ট h উচ্চতায়

(i) বেগ, $v=\pm\sqrt{u^2\text{-}2gh}$ (ii) গমনকাল $t = \frac{u\pm\sqrt{u^2\text{-}2gh}}{g}$

দুটি করে উত্তরের ব্যাখ্যা কি?

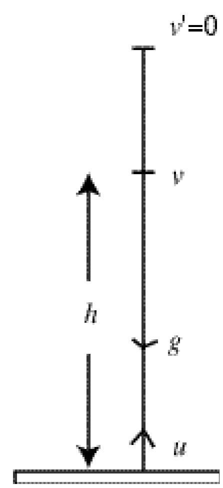
মনে করুন, u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণাটি g মন্দনে চলে সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছে বেগ $v'=0$ হয় এবং তার পর g ত্বরণে চলে একই পথে ভূমিতে ফিরে আসে।

(i) h উচ্চতায় বেগ v হলে,

$v^2=u^2 - 2gh$ বা, $v = \pm\sqrt{u^2\text{-}2gh}$

বেগের চিহ্ন গতির দিক নির্দেশ করে।

যোগবোধক মানটি বস্তুটির উপরে উঠার সময় h উচ্চতায় বেগ নির্দেশ করে এবং বিয়োগবোধক মানটি বস্তুকণাটি সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছে তারপর নীচে নামার সময় h উচ্চতায় বেগ নির্দেশ করে।



চিত্র ৯.৪.২

(ii) h উচ্চতায় পৌঁছার সময় t হলে

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ বা, $2h = 2ut - gt^2$

বা, $gt^2 - 2ut + 2h = 0$

$\therefore\ t = \frac{1}{2g}(2u \pm \sqrt{4u^2 - 4.g.2h})$

$= \frac{1}{g}\left(u \pm \sqrt{u^2 - 2gh}\right)$

$t = \frac{1}{g}\left(u - \sqrt{u^2 - 2gh}\right)$ ক্ষুদ্রতর মানটি উপরে উঠার পথে h উচ্চতায় পৌঁছার সময় নির্দেশ করে এবং

$t = \frac{1}{g}\left(u + \sqrt{u^2 - 2gh}\right)$ বৃহত্তর মানটি বস্তুকণাটির সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছে তারপর নিচে নামার পথে h উচ্চতায় পৌঁছার সময় নির্দেশ করে।

> একটি বস্তুকণা u গতিবেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হলে কোন নির্দিষ্ট h উচ্চতায়
>
> (i) বেগ $v = \pm\sqrt{u^2 - 2gh}$ (ii) গমনকাল $t = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2gh}}{g}$

উদাহরণ 1 : 32 ফুট/সেকেন্ড সমবেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত একটি বেলুন হতে পতিত একটি পাথর খন্ড 17 সেকেন্ডে ভূমিতে পৌঁছে। পাথর খন্ডটি বেলুন হতে পড়ার মুহূর্তে বেলুনটির উচ্চতা কত ছিল?

সমাধান : ধরুন, নির্ণেয় উচ্চতা h ফুট

$\therefore\ h = -ut + \frac{1}{2}\ gt^2$

এক্ষেত্রে $u = 32$ ফুট/সেকেন্ড^2, $t = 17$ সেকন্ড, $g = 32$ ফুট/সেকেন্ড^2

$\therefore\ h = -\ 32.\ 17 + \frac{1}{2}.\ 32\ .\ 17^2$

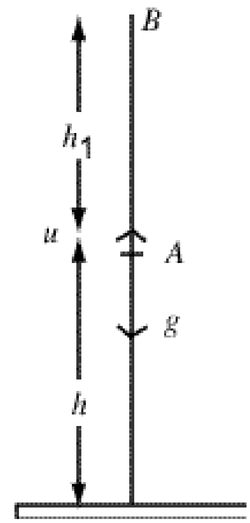
$= 32.17\left(-1 + \frac{17}{2}\right) = 32.17.\ \frac{15}{2}$

$= 15 \infty 16 \infty 17 = 4080$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা = 4080 ফুট.

উদাহরণ 2 : ভূমি হতে সমবেগে খাড়া উপরের দিকে উঠন্ত একটি বোমারু বিমান হতে একটি বোমা ফেলে দিলে তা 5 সেকেন্ড পর ভূমিতে আঘাত করে। ভূমিতে আঘাত মুহূর্তে বিমানটির উচ্চতা কত ছিল?

সমাধান : মনে করুন, $OA=h$ উচ্চতা হতে বোমাটি ফেলা হয় এবং পরবর্তী 5 সেকেন্ড সময়ে বিমানটি B বিন্দুতে পৌঁছে।



চিত্র ৯.৪.৩

ধরুন, বিমানের বেগ = u ও $AB=h_1$

$\therefore h_1 = ut$ (যেহেতু বিমানটি সমবেগে চলে)

$= 5u$ -------- (i)

এবং $h = -ut + \frac{1}{2} gt^2$

$= -5u + \frac{1}{2} . 32.5^2$

$= -5u + 400$ ------ (ii)

এখন $OB = OA+AB$

$= h + h_1 = -5u+400+5u$

$= 400$ ফুট

উদাহরণ 3 : দেখান যে, u বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণা h উচ্চতায় $\frac{2}{g}\sqrt{u^2-2gh}$ সময়ের ব্যবধানে দুবার গমন করে।

সমাধান : মনে করুন, u বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণাটি t সময়ে h উচ্চতায় গমন করে।

$\therefore h=ut - \frac{1}{2} gt2$ বা, $2h=2ut - gt^2$

বা, $gt^2 - 2ut + 2h = 0$

$\therefore t = \frac{1}{2g}\left(2u \pm \sqrt{4u^2-4g*2h}\right)$

$= \frac{1}{g}\left(u \pm \sqrt{u^2-2gh}\right)$

$t = \frac{1}{g}\left(u-\sqrt{u^2-2gh}\right)$ ক্ষুদ্রতর সময়ে বস্তুকণাটি সরাসরি h উচ্চতায় পৌঁছে এবং $t = \frac{1}{g}\left(u+\sqrt{u^2-2gh}\right)$ বৃহত্তর সময়ে বস্তুকণাটি সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছিবার পর নিচে নামাকালীন h উচ্চতায় পৌঁছে।

সময় দুটির ব্যবধান $= \frac{1}{g}\left(u+\sqrt{u^2-2gh}\right) - \frac{1}{g}\left(u-\sqrt{u^2-2gh}\right)$

$= \frac{1}{g} . 2\sqrt{u^2-2gh} = \frac{2}{g}\sqrt{u^2-2gh}$

উদাহরণ 4 : একটি বস্তু খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হওয়ার t সেকেন্ড সময়ে h উচ্চতায় গমন করে এবং পরবর্তী t' সময়ে নিক্ষেপ বিন্দুতে ফিরে আসে। দেখান যে, $h=\frac{1}{2}\ gt\,t'$

সমাধান : ধরুন, নিক্ষেপন বেগ u

$\therefore\ t+t' =$ বিচরণকাল $= \frac{2u}{g}$

বা, $u = \frac{1}{2}\ g\,(t+t')$ ------- (i)

আবার $h = ut - \frac{1}{2}\ gt^2$

$= \frac{1}{2}\ g(t+t')\,t - \frac{1}{2}\ gt^2,$ [(i) এর সাহায্যে]

$= \frac{1}{2}\ gt\,[t+t'-t] = \frac{1}{2}\ gt.t'$

উদাহরণ 5 : h ফুট গভীর একটি গর্তে একটি পাথর খন্ড ছেড়ে দিলে t সেকেন্ড পর তলদেশে পতনের শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ v হলে দেখান যে,

(i) $\frac{h}{v} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = t$

(ii) $2h\left(1 + \frac{gt}{v}\right) = gt^2,$ $\left(\frac{h}{v}\right)^2$ অতিক্ষুদ্র বলে বর্জন করা হয়েছে।

সমাধান : মনে করুন, পাথরখন্ডের পতনকাল t_1 এবং তলদেশে আঘাতের শব্দ ফিরে আসার সময় t_2

$\therefore\ t = t_1+t_2$

এখন $h = \frac{1}{2}\ gt_1^2$ বা, $t_1^2 = \frac{2h}{g}$ বা, $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

এবং $h = vt_2$ বা, $t_2 = \frac{h}{v}$

$\therefore\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$ --------- (i)

বা, $t - \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

বা, $\left(t - \frac{h}{v}\right)^2 = \frac{2h}{g}$

বা, $t^2 - \frac{2h}{v}t + \left(\frac{h}{v}\right)^2 = \frac{2h}{g}$

বা, $t^2 - \frac{2h}{v}\ t = \frac{2h}{g}$, $\quad \left(\frac{h}{v}\right)^2$ বর্জন করে

$\therefore\ gt^2 = 2h + \frac{2htg}{v} = 2h\left(1 + \frac{gt}{v}\right)$ --------- (ii)

উদাহরণ 6 : ভূমি হতে এক সেকেন্ড পরপর খাড়া উপরের দিকে তিনটি বুলেট নিক্ষিপ্ত হলো। প্রথমটির বেগ 500 ফুট/সেকেন্ড, দ্বিতীয়টির বেগ 600 ফুট/সেকেন্ড। ভূসমান্তরাল কোন তলকে তারা একই সঙ্গে আঘাত করলে তৃতীয় বুলেটের নিক্ষেপণ বেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরুন, তৃতীয় বুলেটের নিক্ষেপণ বেগ u এবং প্রথম বুলেট t সময় পর h ফুট উঁচু তলকে আঘাত করে।

$\therefore\ h=500t - \frac{1}{2}\ gt^2$ -------- (i)

$h= 600\ (t-1) - \frac{1}{2}\ g\ (t-1)^2$ ----- (ii)

$h = u(t-2) - \frac{1}{2}\ g\ (t-2)^2$ -------- (iii)

(i) ও (ii) হতে, $500t - \frac{1}{2}gt^2 = 600\ (t-1) - \frac{1}{2}\ g(t-1)^2$

বা, $500t - 600(t-1) = \frac{1}{2}\ gt^2 - \frac{1}{2}\ g(t-1)^2$

বা, $600-100t = \frac{1}{2}\ g\{t^2-(t-1)^2\} = \frac{1}{2}.\ 32\ (2t-1) = 32t - 16$

বা, $132t = 616$

$\therefore\ t = \frac{616}{132} = \frac{154}{33} = \frac{14}{3}$ সেকেন্ড

(i) ও (iii) হতে $(t-2)\left[u-\frac{1}{2}g\ (t-2)\right] = t\left(500 - \frac{1}{2}gt\right)$

বা, $\left(\frac{14}{3} - 2\right)\left[u - \frac{1}{2}.\ 32\left(\frac{14}{3}-2\right)\right] = \frac{14}{3}\left(500 - \frac{1}{2}.\ 32\ \frac{14}{3}\right)$

বা, $\frac{8}{3}\left(u\text{-}16\text{*জ}f(8,3)\right) = \frac{14}{3}\left(500\text{-}16.\frac{14}{3}\right)$

বা, $u - \frac{128}{3} = \frac{7}{4}\left(500\text{-}16.\ \frac{14}{3}\right) = 7\left(125 - 4.\frac{14}{3}\right) = 875 - \frac{392}{3}$

$\therefore\ u = 875 - \frac{392}{3} + \frac{128}{3} = 875 - \frac{264}{3} = 875 - 88 = 787$

$\therefore$ তৃতীয় বুলেটের বেগ = 787 ফুট/সেকেন্ড

উদাহরণ 7 : $\sqrt{2gy}$ ফুট/সেকেন্ড বেগে ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত একটি রকেট তার সর্বাধিক উচ্চতায় বিস্ফোরিত হয়। নিক্ষেপণ বিন্দুতে এবং তা হতে x ফুট অনুভূমিক দূরে কোন বিন্দুতে শব্দ পৌঁছার সময়ের ব্যবধান $\frac{1}{n}$ সেকেন্ড হলে, দেখান যে, শব্দের গতিবেগ $v = n\left(\sqrt{x^2+y^2} - y\right)$ ফুট/সেকেন্ড

সমাধান : এক্ষেত্রে নিক্ষেপণ বেগ $u = \sqrt{2gy}$

$\therefore$ সর্বাধিক উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{2gy}{2g} = y$

নিক্ষেপণ বিন্দুতে শব্দ পৌঁছার সময় $t_1 = \frac{y}{v}$ এবং x ফুট অনুভূমিক দূরত্বে শব্দ পৌঁছার সময় $t_2 = \frac{r}{v} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v}$

শর্তানুযায়ী,

$t_2 - t_1 = \frac{1}{n}$

$\therefore \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{v} - \frac{y}{v} = \frac{1}{n}$

বা, $\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{v} = \frac{1}{n}$

বা, $v = n\left(\sqrt{x^2+y^2} - y\right)$ ফুট/সেকেন্ড.

উদাহরণ 8 : তিনটি বস্তুকে h_1, h_2, h_3 উচ্চতায় অবস্থিত তিনটি বিন্দু হতে যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 বেগে খাড়া উপরের দিকে একই সময়ে নিক্ষেপ করা হলো। তারা একই সঙ্গে ভূমিতে পতিত হলে দেখান যে,
$h_1(u_2-u_3)+h_2(u_3-u_1)+h_3(u_1-u_2)=0$

সমাধান : ধরুন, বস্তুগুলো নিক্ষেপণের t সময় পর ভূমিতে পতিত হয়। এক্ষেত্রে সরণ ও বেগ বিপরীতমুখী।

$\therefore h_1 = -u_1t+\frac{1}{2}gt^2$ ----(i)

$h_2 = -u_2t+\frac{1}{2}gt^2$ -------(ii)

$h_3 = -u_3t+\frac{1}{2}gt^2$ -----(iii)

(ii) - (i), $h_2-h_1 = (u_1-u_2)t$

(iii) - (ii), $h_3-h_2 = (u_2-u_3)t$

(i) - (iii), $h_1-h_3 = (u_3-u_1)t$

এখন, $h_1(u_2-u_3) + h_2(u_3-u_1) + h_3(u_1-u_2)$

$= \frac{1}{t}[h_1(u_2-u_3)t + h_2(u_3-u_1)t + h_3(u_1-u_2)t]$

$= \frac{1}{t}[h_1(h_3-h_2) + h_2(h_1-h_3)+h_3(h_2-h_1)]$

$= \frac{1}{t}[h_1h_3-h_1h_2+h_1h_2- h_2h_3+h_2h_3 - h_1h_3] = \frac{1}{t} * 0 = 0$

উদাহরণ 9 : একটি বস্তু উপরের দিকে 128 ফুট/সেকেন্ড বেগে নিক্ষিপ্ত হওয়ার 2 সেকেন্ড পর আরেকটি বস্তুকে একই বিন্দু হতে একই বেগে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। তারা কত উচ্চতায় ও কখন মিলিত হবে এবং মিলিত হওয়ার সময় তাদের গতির দিক কি হবে?

সমাধান : মনে করুন দ্বিতীয় বস্তুটি t সময় পর h উচ্চতায় প্রথম বস্তুটির সাথে মিলিত হয়।

$\therefore$ দ্বিতীয় বস্তুর ক্ষেত্রে, $h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ -------- (i)

এবং প্রথম বস্তুর ক্ষেত্রে, $h=u(2+t)-\frac{1}{2}g\,(2+t)^2$----- (ii)

(ii) - (i), $0=2u-\frac{1}{2}\;g(4+4t)$

$=2*128-\frac{1}{2}\;*32*4(t+1)$

বা, $t+1=\dfrac{2*128}{32*2}\;=4$

$\therefore\; t=4\text{-}1=3$ সেকেন্ড ------- (iii)

(i) হতে, $h=128*3-\frac{1}{2}\;*32*3^2=128*3\text{-}16*9=384-144=240$ ফুট-----(iv)

h উচ্চতায়, প্রথম বস্তুর বেগ $v_1=u\text{-}g(t+2)=128\text{ - }32(3+2)=128\text{-}160=\text{-}32$ ফুট/সেকেন্ড এবং দ্বিতীয় বস্তুর বেগ $v_2=u\text{-}gt=128\text{ - }32*3=128\text{ - }96=32$ ফুট/সেকেন্ড.

বেগদ্বয়ের চিহ্ন তাদের দিক নির্দেশ করে। মিলিত হওয়ার সময় প্রথম বস্তুটি নিম্নমুখী এবং দ্বিতীয় বস্তুটি উর্ধ্বমুখী গতিবেগে ছিল।

উদাহরণ 10 : একটি বস্তু খাড়া উপরের দিকে u বেগে নিক্ষিপ্ত হওয়ার t সময় পর আরেকটি বস্তুকে একই বিন্দু হতে একই বেগে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। তারা h উচ্চতায় মিলিত হলে, দেখান যে, $h=\dfrac{4u^2\text{-}g^2t^2}{8g}$

সমাধান : মনে করুন, দ্বিতীয় বস্তু t_1 সময় পর h উচ্চতায় প্রথম বস্তুটির সাথে মিলিত হয়।

$\therefore$ দ্বিতীয় বস্তুর ক্ষেত্রে, $h=ut_1-\frac{1}{2}gt_1^2$ ----(i)

এবং প্রথম বস্তুর ক্ষেত্রে, $h=u(t+t_1)-\frac{1}{2}g\,(t+t_1)^2$------- (ii)

(ii)-(i), $0=ut-\frac{1}{2}\;g(t^2+2tt_1)$

বা, $0=2u\text{-}g\,(t+2t_1)$

বা, $2gt_1=2u-gt$

$\therefore\; t_1=\dfrac{2u\text{-}gt}{2g}$ -------- (iii)

(i) হতে $h=u*\dfrac{2u\text{-}gt}{2g}-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{2u\text{ - }gt}{2g}\right)^2$

$$=\frac{2u\text{-}gt}{2g}\left[u-\frac{1}{2}g.\,\frac{2u\text{-}gt}{2g}\right]=\frac{2u\text{-}gt}{2g}*\frac{2u+gt}{4}$$

$$=\frac{4u^2\text{-}g^2t^2}{8g}$$

উদাহরণ 11 : কোন বিন্দু হতে অবাধে পড়ন্ত একটি বস্তু x ফুট অতিক্রমের পর আরেকটি বস্তু উপরোক্ত বিন্দুর y ফুট নিচু হতে অবাধে পড়তে দেয়া হলো। তারা একই সঙ্গে ভূমিতে পৌঁছলে দেখান যে, $h=\frac{(x+y)^2}{4x}$

সমাধান : x ফুট পতনের পর প্রথম বস্তুটির বেগ u হলে,

$u^2 = 0^2+2gx = 2gx$ -------- (i)

দ্বিতীয় বস্তুর পতনকাল t হলে,

$h\text{-}y = \frac{1}{2}\, gt^2$------------- (ii)

এবং $h - x = ut + \frac{1}{2}\, gt^2$ --------- (iii)

(iii) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$y - x = ut$

$t = \frac{y-x}{u}$

$t^2 = \frac{(y-x)^2}{u^2}$

$t^2 = \frac{(y-x)^2}{2gx}$ [(i) এর সাহায্যে]

(ii) হতে, $h = \frac{1}{2}\, gt^2 + y = \frac{1}{2}\, g.\ \frac{(y-x)^2}{2gx} + y$

$= \frac{(y-x)^2}{4x} + y = \frac{(y-x)^2+4xy}{4x} = \frac{(x+y)^2}{4x}$

উদাহরণ 12 *:* অভিকর্ষজনিত ত্বরণের অধীনে পড়ন্ত একটি বস্তু শেষতম সেকেন্ডে 224 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। যে বিন্দুতে পতিত হয়েছিল তার উচ্চতা ও পতনকাল নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, নির্ণেয় উচ্চতা h ও পতনকাল t।

$h_{t\text{তম}} = \frac{1}{2}\, g\, (2t\text{-}1)$

বা, $224 = \frac{1}{2}.\ 32\ (2t\text{-}1) = 16\ (2t\text{-}1)$

বা, $2t - 1 = \frac{224}{16} = 14$

$\therefore\ t = \frac{14+1}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ সেকেন্ড

$h = \frac{1}{2}\, gt^2 = \frac{1}{2}\ .32.\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 16*\frac{15*15}{4} = 4*225 = 900$ ফুট

অনুশীলনী ৯.৪

1. একটি পাথরখন্ড ভূমি হতে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হওয়ার 5 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপণ বিন্দুতে ফিরে আসে। সর্বাধিক উচ্চতা ও ভূমিতে স্পর্শ মুহূর্তে গতিবেগ নির্ণয় করুন।
2. h ফুট উচ্চতা হতে 64 ফুট/সেকেন্ড আদিবেগে একটি বলকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। বলটি 6 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পতিত হলে h এর মান নির্ণয় করুন।

3. স্থির অবস্থা হতে 4 ফুট/সেকেন্ড^2 সমত্বরণে ভূমি হতে খাড়া উপরে উঠন্ত বেলুন হতে 30 সেকেন্ড পরে একটি বস্তুকে ছেড়ে দেওয়া হল। দেখান যে, বস্তুটি 15 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পতিত হবে।
4. ভূমি হতে 240 ফুট উঁচুতে অবস্থানকালে একটি বেলুন হতে একটি ভারী বস্তুকে নিচে ছেড়ে দেওয়া হল। বেলুনটি 32 ফুট/সেকেন্ড সমবেগ (i) নিচে নামতে থাকলে বস্তুটির পতনকাল কত? (ii) উপরে উঠতে থাকলে, বস্তুটির পতনকাল কত তা নির্ণয় করুন।
5. ভূমি হতে h_1, h_2, h_3 উঁচু অবস্থান থেকে তিনটি বস্তুকে খাড়া নিচের দিকে যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 গতিবেগে নিক্ষেপ করা হল। ইহারা একই সঙ্গে ভূমিতে পতিত হলে, প্রমাণ করুন যে, $\frac{h_1-h_2}{u_1-u_2} = \frac{h_2-h_3}{u_2-u_3} = \frac{h_3-h_1}{u_3-u_1}$
7. একটি কুপের মধ্যে একটি পাথর খন্ড ছেড়ে দেওয়া হল। তার $7\frac{7}{10}$ সেকেন্ড পরে পাথরটির পতন শব্দ শোনা গেল। শব্দের গতিবেগ 1120 ফুট/সেকেন্ড. হলে কুপটির গভীরতা কত?
৮. একটি দালানের ছাদ হতে স্বাধীনভাবে পড়ন্ত একটি পাথরখন্ড $\frac{1}{4}$ সেকেন্ড সময়ে ভূমি সংলগ্ন 8 ফুট উঁচু একটি দরজা অতিক্রম করে। দালানের উচ্চতা নির্ণয় করুন।
9. 300 ফুট উঁচু একটি টাওয়ারের চুঁড়া ও ভূমি হতে P ও Q বস্তু দুটিকে যথাক্রমে 25 ফুট/সেকেন্ড ও 200 ফুট/সেকেন্ড গতিবেগে একই মুহূর্তে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। তারা কখন ও কোথায় মিলিত হবে এবং মিলিত হওয়ার সময় তাদের গতির দিক কি হবে?

পাঠ-৫
উল্লম্ব তলে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকণার গতি

উদ্দেশ্য

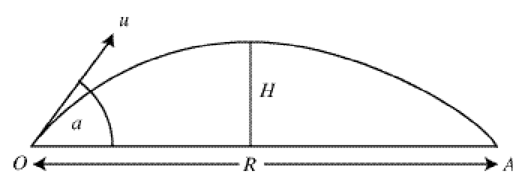
এই পাঠ শেষে আপনি–

- উল্লম্ব তলে প্রক্ষিপ্ত কোন কণার গতি বর্ণনা করতে পারবেন,
- সর্বাধিক উচ্চতা, সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছার সময়, বিচরণকাল, অনুভূমিক পাল্লা ইত্যাদি নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে সূত্রগুলো প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ইতিপূর্বে খাড়া সরলরেখা বরাবর বস্তুর চলাচল সম্পর্কীয় বিষয়াদি অভিকর্ষজনিত ত্বরণ অংশে আলোচিত হয়েছে। এ অংশে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তু (খাড়াভাবে নয়)-এর চলাচল সম্পর্কীয় বিষয়াদি আলোচিত হবে। অনুভূমির সাথে নির্দিষ্ট কোণে আনত (সমকোণে নয়) সরলরেখা বরাবর শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুকে শূন্যে চলাকালীন সময়ে প্রক্ষেপক বলা হয়। তার প্রকৃষ্ট উদাহরণ হচ্ছে ফুটবল, ভলিবল, ক্রিকেট বল, যে সবের সাথে আমরা সকলেই পরিচিত। নির্দিষ্ট গতিবেগে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে প্রক্ষেপকটি g ত্বরণের কারণে বক্রপথে চলে ভূমিতে পতিত হয়। এই বক্ররেখাটিকে বিচরণপথ, শূন্যে অতিবাহিত সময়কে বিচরনকাল বা উড্ডয়ন কাল, যে বিন্দু হতে নিক্ষিপ্ত হয়েছে সেই বিন্দুকে নিক্ষেপন বিন্দু, অনুভূমির সাথে যে কোণে নিক্ষিপ্ত হয়েছে সেই কোণকে নিক্ষেপণ কোণ, আর ভূমি বরাবর সরণকে অনুভূমিক পাল্লা বলা হয়। প্রক্ষেপকের বিচরণ পথটি প্রকৃতপক্ষে পরাবৃত্ত হবে। প্রক্ষেপকটির প্রতি মুহূর্তে দিক ও বেগ পরিবর্তন হতে থাকায় তার সম্পর্কীয় সমস্যাদি সমাধানের ক্ষেত্রে সাধারণত বেগকে অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশে বিভাজন করা হয়ে থাকে।

সাধারণত অনুভূমিক পাল্লাকে R, সর্বাধিক অনুভূমিক পাল-াকে $R\ max$, বিচরণকালকে T ও বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতাকে H দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

চিত্রে u হচ্ছে নিক্ষেপণ বেগ, α হচ্ছে নিক্ষেপণ কোণ, O হচ্ছে নিক্ষেপণ বিন্দু, OA হচ্ছে অনুভূমিক পাল্লা।

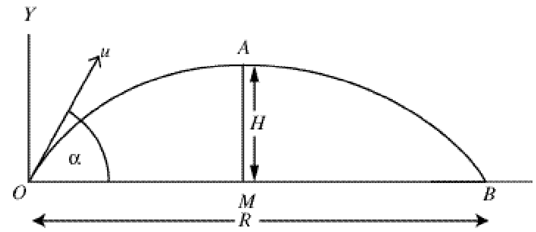


চিত্র ৯.৫.১

> নির্দিষ্ট গতিবেগে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে প্রক্ষেপকটি g ত্বরণের কারণে বক্রপথে চলে ভূমিতে পতিত হয়। এই বক্ররেখাটিকে বিচরণপথ, শূন্যে অতিবাহিত সময়কে বিচরনকাল বা উড্ডয়ন কাল, যে বিন্দু হতে নিক্ষিপ্ত হয়েছে সেই বিন্দুকে নিক্ষেপন বিন্দু, অনুভূমির সাথে যে কোণে নিক্ষিপ্ত হয়েছে সেই কোণকে নিক্ষেপণ কোণ, আর ভূমি বরাবর সরণকে অনুভূমিক পাল্লা বলা হয়। প্রক্ষেপকের বিচরণ পথটি প্রকৃতপক্ষে পরাবৃত্ত হবে।

একটি বস্তুকণা বায়ুহীন অবস্থায় অনুভূমিক তলের সাথে α কোণে u আদিবেগে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হলো। কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা, সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছার সময়, অনুভূমিক পাল্লা, সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা ও বিচরণকাল নির্ণয় করুন। আরও দেখান যে, একই অনুভূমিক পাল্লার জন্য দুটি বিচরণ পথ থাকবে।

মনে করুন, একটি বস্তুকণা O বিন্দু হতে অনুভূমিক তলের সাথে α কোণে u আদিবেগে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে T_1 সময় অন্তে সর্বোচ্চ বিন্দু A তে পৌঁছে এবং T সময় অন্তে O বিন্দুগামী অনুভূমিক তলের B বিন্দুতে ফিরে আসে। ধরুন, $MA=H$ ও $OB=R$।



চিত্র ৯.৫.২

u এর অনুভূমিক উপাংশ $= u \cos \alpha$ ও উলম্ব উপাংশ $= u \sin \alpha$ এবং নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল g এর অনুভূমিক উপাংশ $= g \cos 90° = g.0 = 0$

সর্বাধিক উঁচু A বিন্দুতে প্রক্ষেপকটির উলম্ব বেগ শূন্য। তাই ত্বরণের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী,

$0^2 = u^2 \sin^2\alpha - 2gH \ or,\ 2gH = u^2 \sin^2\alpha$

$\therefore H = \frac{u^2}{2g} \sin^2\alpha$

কণাটির সর্বাধিক উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g} \sin^2\alpha$

ত্বরণের প্রথম সূত্র অনুযায়ী,

$0 = u \sin \alpha - gT_1 \quad \therefore T_1 = \frac{u}{g} \sin\alpha$

অতএব সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছার সময় $T_1 = \frac{u}{g} \sin\alpha$

B বিন্দুর উলম্ব সরণ শূন্য। তাই ত্বরণের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী,

$0 = u\sin\alpha .\ T - \frac{1}{2} gT^2$ বা, $0 = u\sin\alpha - \frac{1}{2} gT$

বা, $\frac{1}{2} gT = u\sin\alpha \quad \therefore T = \frac{2u}{g} \sin\alpha$

অতএব কণাটির বিচরণকাল $T = \frac{2u}{g} \sin\alpha$

এবং অনুভূমিক পাল্লা $R = u\cos\alpha . T = u.\cos\alpha . \frac{2u}{g} \sin\alpha = \frac{u^2}{g} 2\sin\alpha \cos\alpha = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$ -------- (i)

$= \frac{u^2}{g} \sin (180° - 2\alpha) = \frac{u^2}{g} \sin 2(90° - \alpha)$ -------- (ii)

(i) এর ক্ষেত্রে নিক্ষেপণ কোণ α, আর (ii) এর ক্ষেত্রে নিক্ষেপণ কোণ $(90° - \alpha)$ অর্থাৎ একই অনুভূমিক পাল্লার জন্য একটি নিক্ষেপণ কোণ α হলে, অপর নিক্ষেপণ কোণ $(90° - \alpha)$ হবে।

(i) হতে প্রতীয়মান হয় যে, নির্দিষ্ট নিক্ষেপণ বেগের জন্য R□ $\sin 2\alpha$। তাই R এর সর্বোচ্চ মানের জন্য $\sin 2\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ। অর্থাৎ $\sin 2\alpha = 1 = \sin 90°$ বা, $2\alpha = 90°$ বা, $\alpha = 45°$ হতে হবে। সুতরাং $R_{max} = \frac{u^2}{g}$

u বেগে অনুভূমিকের সাথে α কোণে প্রক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে

সর্বাধিক উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g} \sin^2\alpha$

সর্বাধিক উচ্চতায় পোঁছার সময় $T_1 = \frac{u}{g} \sin\alpha$

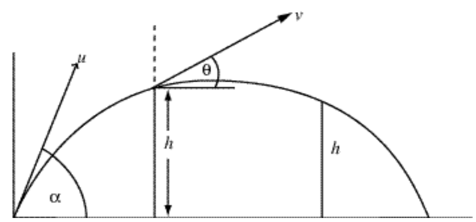
বিচরণকাল $T = \frac{2u}{g} \sin\alpha$

অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$

সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা $R_{max} = \frac{u^2}{g}$

u আদিবেগে ও α নিক্ষেপণ কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের কোন নির্দিষ্ট উচ্চতায় তার গতিবেগ ও গতির দিক নির্ণয় করুন।

মনে করুন প্রক্ষেপকটি অনুভূমিক তলের সাথে α কোণে u আদিবেগ শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে h উচ্চতায় পোঁছে অনুভূমিক দিকের সাথে θ কোণে v বেগ প্রাপ্ত হয়।



চিত্র ৯.৫.৩

u এর অনুভূমিক উপাংশ $= u\cos\alpha$ ও উলম্ব উপাংশ $= u \sin\alpha$ এবং v এর অনুভূমিক উপাংশ $= v\cos\theta$ ও উলম্ব উপাংশ $= v\sin\theta$; নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল g এর অনুভূমিক উপাংশ $= g\cos 90° = g.0 = 0$

এখন, $v\cos\theta = u\cos\alpha$ [$\because$ অনুভূমিক ত্বরণ $= 0$]

এবং $v^2 \sin^2\theta = u^2 \sin^2\alpha - 2gh$

অতএব $v^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = u^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2gh$

বা, $v^2 = u^2 - 2gh$

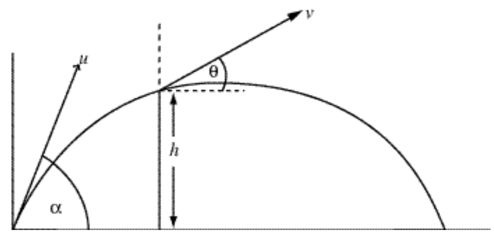
বা, $v = \pm\sqrt{u^2 - 2gh}$ --------------------(i)

আবার $\tan\theta = \frac{v\sin\theta}{v\cos\theta} = \pm\frac{\sqrt{u^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{u\cos\alpha}$ ---------------(ii)

বেগ ও কোণের চিহ্ন দিক নির্দেশ করে। প্রক্ষেপকটি বিচরণপথের সর্বোচ্চ বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে h উচ্চতায় একই বেগ প্রাপ্ত হয় এবং অনুভূমিক রেখার সাথে বিপরীত দিকে একই পরিমাণ কোণ সৃষ্টি করে।

u আদিবেগে ও α নিক্ষেপণ কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকটির t সময় অন্তে অবস্থান, গতিবেগ ও গতির দিক নির্ণয় করুন।

মনে করুন, প্রক্ষেপকটি অনুভূমিক তলের সাথে α কোণে ও u আদিবেগে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে t সময় অন্তে h উচ্চতায় পৌঁছে অনুভূমিক দিকের সাথে θ কোণে v বেগ প্রাপ্ত হয়।



চিত্র ৯.৫.৪

u এর অনুভূমির উপাংশ = $u \cos \alpha$ ও উলম্ব উপাংশ = $u \sin\alpha$ এবং v এর অনুভূমিক উপাংশ = $v \cos\theta$ ও উলম্ব উপাংশ = $v \sin\theta$; নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল g এর অনুভূমিক উপাংশ = $g \cos 90° = g.0 = 0$

এখন $v \cos\theta = u \cos\alpha$ [∵ অনুভূমিক ত্বরণ =0]

এবং $v \sin\theta = u \sin\alpha - gt$

অতএব $v^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (u \cos\alpha)^2 + (u \sin\alpha - gt)^2$

$$= u^2 (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2u\, gt \sin\alpha + g^2t^2$$

বা, $v^2 = u^2 - 2ugt \sin \alpha + g^2t^2$

$$\therefore\ v = \sqrt{u^2 - 2ugt \sin \alpha + g^2t^2} \text{ -------------- (i)}$$

$$\tan\theta = \frac{v \sin\theta}{v \cos\theta} = \frac{u \sin\alpha - gt}{u \cos\alpha}$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{u \sin\alpha - gt}{u \cos\alpha}\right) \text{ ------------------ (ii)}$$

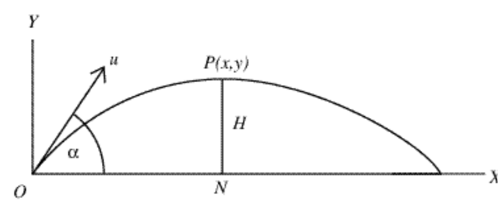
$$h = u \sin\alpha.t - \frac{1}{2}\, gt^2 \text{------------------------ (iii)}$$

উপপাদ্য ঃ দেখান যে,

(i) **শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার বিচরণপথ একটি পরাবৃত্ত।**

(ii) **শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার বিচরণপথের সমীকরণ** $y = x \tan\alpha \left(1 - \frac{x}{R}\right)$ **বা,** $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x} \cdot \frac{R}{R-x}\right)$, **যেখানে** α **হচ্ছে নিক্ষেপণ কোণ এবং** R **হচ্ছে অনুভূমিক পাল্লা**

মনে করুন, একটি বস্তুকণা O বিন্দু হতে u বেগে ও অনুভূমির সাথে α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে t সময়ে আন্তে বিচরণপথের P বিন্দুতে পৌঁছে।



চিত্র ৯.৫.৫

u এর অনুভূমিক উপাংশ = $u\cos\alpha$ ও উলম্ব উপাংশ = $u \sin\alpha$ এবং নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল g এর অনুভূমিক উপাংশ = $g \cos 90° = g*0 = 0$

t সময়ে প্রক্ষেপকটির অনুভূমিক সরণ $x = ON = u \cos \alpha.t$ ---- (i)

এবং উলম্ব সরণ $y = NP = u \sin \alpha.t - \frac{1}{2} gt^2$ ----------------- (ii)

অনুভূমিক রেখা OX কে x-অক্ষ এবং উলম্বরেখা OY কে y-অক্ষ বিবেচনা করলে, P বিন্দুর স্থানাংক হয় (x,y)।

(i) ও (ii) হতে

$$y = u\sin\alpha. \frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{1}{2}\, g\left(\frac{x}{u\cos\alpha}\right)^2 = x \tan\alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{gx^2}{u^2 \cos^2 \alpha}$$

বা, $y = \left(-\frac{g}{2u^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 + (\tan\alpha)\, x + 0$, $(y = ax^2 + bx + c$ এর অনুরূপ)

যা পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

সুতরাং শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার বিচরণপথ একটি পরাবৃত্ত।

আবার $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2\alpha}$

$$= x \tan\alpha \left(1 - \frac{gx}{2u^2 \cos^2\alpha \tan\alpha}\right)$$

$$= x \tan\alpha \left(1 - \frac{x}{\frac{u^2}{8}\, 2\cos\alpha \sin\alpha}\right)$$

$$= x \tan\alpha \left(1 - \frac{x}{\frac{u^2}{g} \sin 2\alpha}\right)$$

$= x \tan\alpha \left(1 - \frac{x}{R}\right)$, [$\because$ অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$]

বা, $\frac{y}{x} = \tan\alpha \left(\frac{R-x}{R}\right)$

বা, $\tan\alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{R}{R-x}$ $\qquad \therefore \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x} \cdot \frac{R}{R-x}\right)$

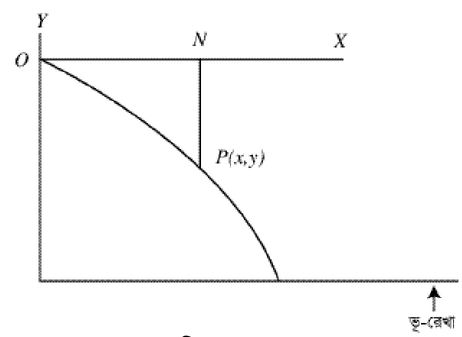
উপপাদ্য ঃ দেখান যে, শূন্যে অবস্থিত কোন বিন্দু হতে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত।

মনে করুন, শূন্যে অবস্থিত O বিন্দু হতে একটি বস্তুকণা অনুভূমিক দিকে u বেগে নিক্ষিপ্ত হয়ে t সময় অন্তে বিচরণ পথের P বিন্দুতে পৌঁছে।

u এর উলম্ব উপাংশ $= u \sin 0° = u.0 = 0$ এবং নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল g এর অনুভূমিক উপাংশ $= g \cos 90° = g.0 = 0$

t সময়ে প্রক্ষেপকটির অনুভূমিক সরণ, $x = ON = ut$ ---------- (i)

এবং উলম্ব সরণ, $y = NP = \frac{1}{2} gt^2$----------- (ii)



চিত্র ৯.৫.৬

O বিন্দুগামী অনুভূমিক রেখাকে x-অক্ষ এবং উলম্ব রেখাকে y-অক্ষ বিবেচনা করলে, P এর স্থানাংক হয় (x,y)।

(i) ও (ii) হতে, $y = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{u}\right)^2$

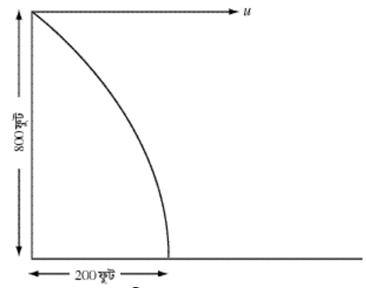
বা, $x^2 = \frac{2u^2}{g}\, y$

বা, $x^2 = 4.\left(\frac{u^2}{2g}\right) y$; ($x^2 = 4ay$ এর অনুরূপ) যা পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

সুতরাং শূন্যে অবস্থিত বিন্দু হতে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুকণার বিচরণপথ একটি পরাবৃত্ত।

উদাহরণ 1 : 800 ফুট উচু একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে একটি পাথরকে অনুভূমিকভাবে কি বেগে নিক্ষেপ করলে তা টাওয়ারের পাদদেশ হতে 200 ফুট দূরে ভূমিতে পতিত হবে?

সমাধান : ধরুন, পাথরের অনুভূমিক নিক্ষেপণ বেগ u। u এর অনুভূমিক উপাংশ = $u\cos 0° = u$ এবং উল্লম্ব উপাংশ = $u\sin 0° = u * 0 = 0$; মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ g নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল, যার অনুভূমিক উপাংশ = $g\cos 90° = g*0=0$



চিত্র ৯.৫.৭

পাথরের পতনকাল t হলে, $200 = ut$ ------------------ (i)

এবং $800 = 0.t + \frac{1}{2}\ gt^2 = \frac{1}{2}.\ 32.\ t^2 = 16t^2$

বা, $t^2 = \frac{800}{16} = 50$

বা, $t = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ সেকেন্ড-------------------------- (ii)

এখন (i) নং হতে, $u = \frac{200}{t} = \frac{200}{5\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ ফুট/সেকেন্ড

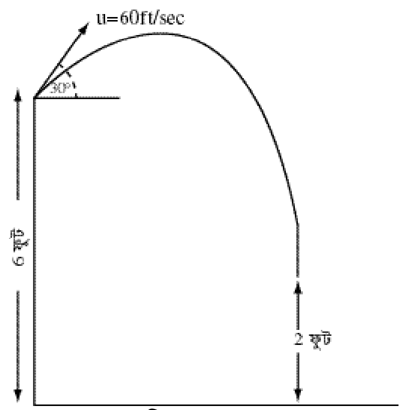
$\therefore$ নির্ণেয় নিক্ষেপণ বেগ = $20\sqrt{2}$ ফুট/সেকেন্ড

উদাহরণ 2 : 6 ফুট উচু হতে অনুভূমির সাথে 30° কোণে 60 ফুট/সেকেন্ড গতিবেগে শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি ক্রিকেট বলকে অপর একজন খেলোয়াড় ভূমি হতে 2 ফুট উঁচুতে ধরে ফেলে। খেলোয়াড়দ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, খেলোয়াড়দ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব x এবং নিক্ষেপণের t সময় পর বলটা ধরা হয়। নিক্ষেপণ বেগের অনুভূমিক উপাংশ = $u \cos 30° = 60.\frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$

এবং উলম্ব উপাংশ = $u \sin 30° = 60.\ \frac{1}{2} = 30$

অভিকর্ষজনিত ত্বরণ g নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল, যার অনুভূমিক উপাংশ = $g \cos 90° = g*\ 0 = 0$



চিত্র ৯.৫.৮

এখন $h = -30t + \frac{1}{2}\ gt^2$ বা, $6\text{-}2 = -30t + \frac{1}{2}.\ 32t^2$ বা, $4= -30t + 16t^2$

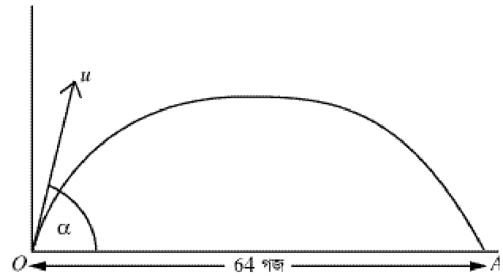
বা, $2= -15t + 8t^2$ বা, $8t^2 - 15t - 2= 0$, বা, $(t\text{-}2)(8t+1)=0$

$t = 2, -\frac{1}{8}$ [যা হতে পারে না] $\therefore\ t= 2$ সেকেন্ড

$\therefore$ অনুভূমিক সরণ $x= 30\sqrt{3}\ t = 30\sqrt{3}\ * 2= 60\sqrt{3}$ ফুট

উদাহরণ 3 : ভূমিতে অবস্থিত কোন বিন্দু হতে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক 4 সেকেন্ড পরে নিক্ষেপন বিন্দু হতে 64 গজ দূরে ভূমিতে পতিত হয়। নিক্ষেপণ বেগ ও কোণের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, প্রক্ষেপকটি O বিন্দু হতে u বেগে ও অনুভূমিকের সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত হয়ে A বিন্দুতে পতিত হয়।



চিত্র ৯.৫.৯

u এর অনুভূমিক উপাংশ= $u\cos\alpha$ ও উলম্ব উপাংশ = $u\sin\alpha$ এবং g ত্বরণ নিম্মুখী ক্রিয়াশীল, যার অনুভূমিক উপাংশ = $g\cos 90° = g*0=0$

এক্ষেত্রে বিচরণকাল $T=4$ সেকেন্ড এবং অনুভূমিক পাল□া $R = OA = 64$ গজ = $64*3$ ফুট।

এখন $R = u\cos\alpha.\ T\ (\because$ ত্বরণ $= 0)$

বা, $64\infty 3 = u\cos\alpha.\ 4$

বা, $u\cos\alpha = 16\infty 3$ ------------ (i)

এবং উল□ম্ব সরণ $h = u\sin\alpha.\ T - \frac{1}{2}\ gT^2$

বা, $0 = u\sin\alpha.\ 4 - \frac{1}{2}\ 32.4^2$

বা, $0 = u\sin\alpha - 16.4$

বা, $u\sin\alpha = 16.4$ ------------- (ii)

(i) ও (ii) হতে $u^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = 16^2(3^2+4^2)$

বা, $u^2=16^2.5^2= 80^2 \quad \therefore\ u=80$ ফুট/সেকেন্ড

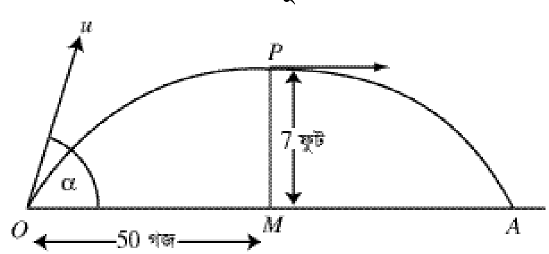
এবং $\tan\theta = \frac{u\sin\alpha}{u\cos\alpha} = \frac{16\infty 4}{16\infty 3} = \frac{4}{3}$

$\therefore\ \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3}$

$\therefore$ নিক্ষেপণ বেগ = 80 ফুট/সেকেন্ড ও নিক্ষেপণ কোণ $= \tan^{-1}\frac{4}{3}$

উদাহরণ 4 : নিক্ষেপণ বিন্দু হতে 50 গজ দূরে অবস্থিত 75 ফুট উঁচু একটি দেওয়ালের ঠিক উপর দিয়ে একটি বুলেট অনুভূমিকভাবে চলে যায়। বুলেটটির নিক্ষেপণ বেগ ও নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, বুলেটটি O বিন্দু হতে u বেগে ও অনুভূমির সাথে α কোণে নিক্ষিপ্ত হয়ে PM দেওয়ালকে কোন রকমে অনুভূমিকভাবে অতিক্রম করে A বিন্দুতে ভূমিতে পতিত হয়।



চিত্র ৯.৫.১০

যেহেতু বুলেটটি অনুভূমিকভাবে দেওয়ালকে অতিক্রম করে, সেহেতু বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতা $H=PM=75$ ফুট এবং অনুভূমিক পাল্লা $R=OA=2\ OM=2\infty 50$ গজ = $100\infty 3$ ফুট= 300 ফুট

এখন $\frac{H}{R} = \frac{75}{300}$

বা, $\dfrac{\dfrac{u^2}{2g}\sin^2\alpha}{\dfrac{u^2}{g}\sin 2\alpha} = \dfrac{1}{4}$

বা, $\dfrac{\sin^2\alpha}{2\sin 2\alpha} = \dfrac{1}{4}$

বা, $\dfrac{\sin^2\alpha}{2.2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{4}$

বা, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$

বা, $\tan\alpha = 1 = \tan 45°$

$\therefore \alpha = 45°$

আবার, $\dfrac{u^2}{g} \sin 2(45°) = R = 300$

বা, $\dfrac{u^2}{g} . 1 = 300$

বা, $u^2 = 300g = 300 \infty 32$

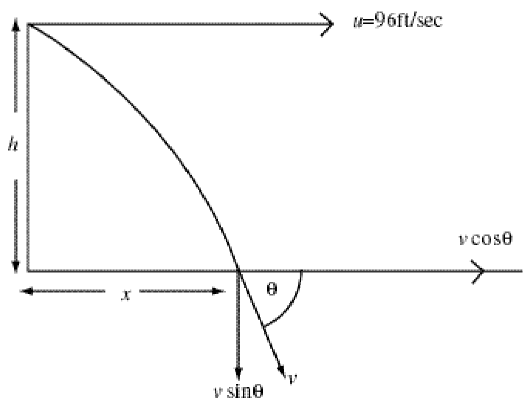
বা, $u^2 = 100 \infty 16 \infty 6$

$\therefore u = 10 \infty 4 \infty \sqrt{6} = 40\sqrt{6}$ ফুট/সেকেন্ড

অতএব নিক্ষেপণ বেগ = $40\sqrt{6}$ ফুট/সেকেন্ড ও নিক্ষেপণ কোণ = $45°$

উদাহরণ 5 : 96 ফুট/সেকেন্ড সমবেগে অনুভূমিকভাবে চলমান একটি বেলুন হতে একটি পাথরকে নিচে ফেলে দেওয়া হলে তা 4 সেকেন্ড পর ভূমিতে পতিত হয়। বেলুনের উচ্চতা, যে বেগে পাথরটি ভূমিতে আঘাত করে সে বেগের মান ও দিক নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, h উচ্চতা হতে পাথরটি নিক্ষিপ্ত হয়ে x অনুভূমিক দূরে অনুভূমির সাথে θ কোণে v বেগে ভূমিতে পতিত হয়।



চিত্র ৯.৫.১১

$u=96$ ফুট/সেকেন্ড এর উলম্ব উপাংশ $= u\cos 90° = u*0 = 0$

এবং মাধ্যাকর্ষনজনিত ত্বরণ g নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল, যার অনুভূমিক উপাংশ $= g\cos 90° = g*0 = 0$

$\therefore h = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2} \infty 32 \infty 4^2 = 16 \infty 16 = 256$ ফুট

ও $x = ut$ [$\therefore$ অনুভূমিক দিকে ত্বরণ = 0]

$= 96*4 = 284$ ফুট

আবার v এর অনুভূমিক উপাংশ ও উলম্ব উপাংশ যথাক্রমে $v\cos\theta$ ও $v\sin\theta$.

$\therefore v\cos\theta = u = 96 = 32 \infty 3$

ও $v\sin\theta = gt = 32 \infty 4$

$\therefore v^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 32^2 (3^2+4^2)$ বা, $v^2 = 32^2 \infty 5^2$

$\therefore\ v = 32*5 = 160$ ফুট/সেকেন্ড

এবং $\tan\theta = \dfrac{v\sin\theta}{v\cos\theta} = \dfrac{32\infty 4}{32\infty 3} = \dfrac{4}{3}$

$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{4}{3}$

উদাহরণ 6 : 128 ফুট উচু টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে অনুভূমির সাথে 30° কোণে 64 ফুট/সেকেন্ড আদিবেগে একটি বল উপরের দিকে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হলো। কোথায়, কখন ও কতবেগে বলটি ভূমিতে আঘাত করবে তা নির্ণয় করুন।

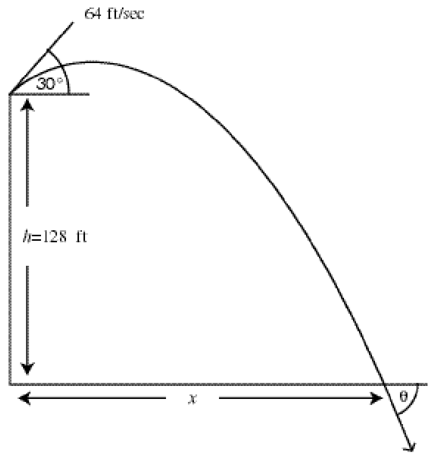
সমাধান : মনে করুন, 128 ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে প্রক্ষেপকটি নিক্ষিপ্ত হয়ে t সময় পর x অনুভূমিক দূরে অনুভূমির সাথে θ কোণে v বেগে ভূমিতে আঘাত করে।

নিক্ষেপণ বেগের অনুভূমিক উপাংশ = $u\cos 30°$

$= 64*\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$

উলম্ব উপাংশ = $u\sin 30° = 64*\dfrac{1}{2} = 32$

পতনবেগের অনুভূমিক উপাংশ = $v\cos\theta$ ও উলম্ব উপাংশ = $v\sin\theta$; নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল অভিকর্ষজনিত ত্বরণ g এর অনুভূমিক উপাংশ= $g\cos 90° = g*0 = 0$



চিত্র ৯.৫.১২

এখন $h = -32t + \dfrac{1}{2}gt^2$ বা, $128 = -32t + \dfrac{1}{2}.32.t^2$

বা, $t^2 - 2t = 8$ বা, $t^2 - 2t - 8 = 0$ বা, $(t-4)(t+2) = 0$

$\therefore\ t = 4, -2$ [যা হতে পারে না]

অতএব পতনকাল = 4 সেকেন্ড --------- (i)

আবার, $x = 32\sqrt{3}\ t$ [$\because$ ত্বরণ নাই]

$= 32\sqrt{3} * 4 = 128\sqrt{3}$

$\therefore$ অনুভূমিক দূরত্ব = $128\sqrt{3}$ ফুট ---------(ii)

আবার v এর অনুভূমিক উপাংশ ও উল্বম্ব উপাংশ যথাক্রমে $v\cos\theta$ ও $v\sin\theta$

$\therefore\ v\cos\theta = 32\sqrt{3}$

ও $v\sin\theta = -32 + gt = -32 + 32\infty 4 = 3\infty 32$

এখন $v^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 32^2\infty 3 + 32^2\infty 9$ বা, $v^2 = 12\infty 32^2$

$\therefore\ v = 2\infty 32\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ ফুট/সেকেন্ড --------- (iii)

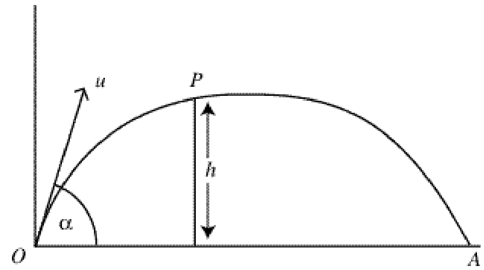
আবার, $\tan\theta = \dfrac{v\sin\theta}{v\cos\theta} = \dfrac{3\infty 32}{32\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \tan 60°$

$\therefore\ \theta = 60°$ ---------- (iv)

অতএব সময় = 4 সেকেন্ড, দূরত্ব = $128\sqrt{3}$ ফুট এবং বেগ = $64\sqrt{3}$ ফুট/সেকেন্ড

উদাহরণ 7 : t সময় অন্তে একটি প্রক্ষেপক তার বিচরণপথের P বিন্দুতে পৌঁছে এবং পরবর্তী t' সময়ে নিক্ষেপণ বিন্দুর সমতলে ফিরে আসে। দেখান যে, উক্ত তল হতে P বিন্দুর উচ্চতা $h = \frac{1}{2}\ gt\ t'$

সমাধান : মনে করুন, প্রক্ষেপকটি O বিন্দু হতে u বেগে ও অনুভূমিকের সাথে α কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে t সময়ে h উচ্চতায় P বিন্দুতে পৌঁছে এবং পরবর্তী t' সময়ে অনুভূমিক তলের A বিন্দুতে পৌঁছে।



চিত্র ৯.৫.১৩

u এর অনুভূমিক ও উল্লম্ব লম্বাংশ যথাক্রমে $u \cos\alpha$ ও $u \sin\alpha$ এবং g নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল, যার অনুভূমিক লম্বাংশ $= g \cos 90° = g*0 = 0$

এক্ষেত্রে বিচরণকাল $T = t+t'$

বা, $\frac{2u \sin\alpha}{g} = t+t'$

বা, $u \sin\alpha = \frac{1}{2}\ g(t+t')$ ----- (i)

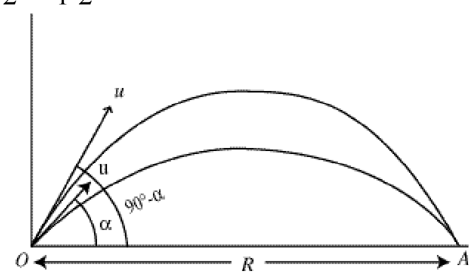
এখন $h = u \sin \alpha . t - \frac{1}{2}\ gt^2$

$= \frac{1}{2} g\ (t+t')\ t - \frac{1}{2}\ gt^2$ [(i) এর সাহায্যে]

$= \frac{1}{2} gt\ (t+t'-t) = \frac{1}{2}\ gtt'$

উদাহরণ 8 : একটি নির্দিষ্ট গতিবেগে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের একই অনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য নির্দিষ্ট বিচরণপথ দুটিতে তার বিচরণকাল t_1 ও t_2 হলে, প্রমাণ করুন, যে, $R = \frac{1}{2}\ gt_1t_2$

সমাধান : মনে করুন, প্রক্ষেপকটির নিক্ষেপণ বেগ u। কোন অনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য একটি নিক্ষেপণ কোণ α হলে, অপর নিক্ষেপণ কোণ $(90° - \alpha)$ হবে।



চিত্র ৯.৫.১৪

অতএব $t_1 = \frac{2u \sin\alpha}{g}$

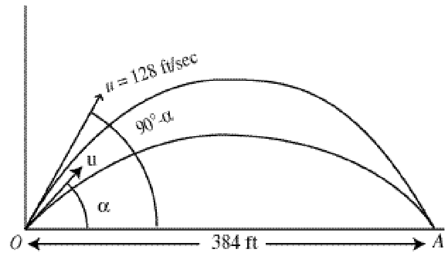
ও $t_2 = \frac{2u \sin(90° - \alpha)}{g} = \frac{2u \cos\alpha}{g}$

এখন $R = \frac{u^2}{g}\ \sin 2\alpha = \frac{u^2}{g} 2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} g * \frac{2u\sin\alpha}{g} * \frac{2u\cos\alpha}{g} = \frac{1}{2} gt_1t_2$

অতএব $R = \frac{1}{2} gt_1t_2$

উদাহরণ 9 : একটি রকেট ভূমিতে আঘাত করা মাত্র তার কণাগুলো 128 ফুট/সেকেন্ড বেগে চতুর্দিকে ছুটতে থাকে। দেখান যে, 384 ফুট অনুভূমিক দূরত্বে অবস্থিত কোন বিন্দুতে তার কণাসমূহ 4 সেকেন্ড অন্তর পতিত হবে।

সমাধান : মনে করুন, প্রেক্ষাপকটি O বিন্দু হতে নিক্ষিপ্ত হয়ে 384 ফুট অনুভূমিক দূরত্বে A বিন্দুতে পতিত হয়। একটি বিচরণপথের জন্য নিক্ষেপণ কোণ α হলে, অপর বিচরণপথের জন্য নিক্ষেপণ কোণ $(90°-\alpha)$ হবে।



চিত্র ৯.৫.১৫

প্রথম ক্ষেত্রে বিচরণকাল $t_1 = \dfrac{2u\sin\alpha}{g}$

$$= \frac{2\infty 128 \sin\alpha}{32} = 8\sin\alpha \text{ ------------ (i)}$$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বিচরণকাল $t_2 = \dfrac{2u\sin(90°-\alpha)}{g}$

$$= \frac{2\infty 128 \cos\alpha}{32} = 8\cos\alpha \text{---------- (ii)}$$

এখন $OA = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

বা, $384 = \dfrac{128^2}{32} \sin 2\alpha = 4\infty 128 \sin 2\alpha$

$\therefore \sin 2\alpha = \dfrac{384}{4*128} = \dfrac{3}{4}$ -----------(iii)

অতএব, বিচরণকালের ব্যবধান $t_1 \sim t_2 = \sqrt{(t_1-t_2)^2}$

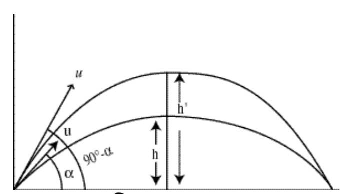
$$= \sqrt{(8\sin\alpha-8\cos\alpha)^2}$$

$$= \sqrt{8^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha)}$$

$$= 8\sqrt{1-\sin 2\alpha} = 8\sqrt{1-\frac{3}{4}} = 8\infty\frac{1}{2} = 4 \text{ সেকেন্ড}$$

উদাহরণ 10 : একই গতিবেগে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপকের কোন নির্দিষ্ট অনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য দুইটি বিচরণপথের সর্বাধিক উচ্চতা h ও h' হলে, দেখান যে, $R = 4\sqrt{hh'}$

সমাধান : মনে করুন, নির্দিষ্ট অনুভূমিক পাল্লা R এর জন্য পক্ষেপকের নিক্ষেপণ বেগ u ও নিক্ষেপণ কোণ α এর ক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতা h। সুতরাং একই অনুভূমিক পাল্লার জন্য আরেকটি নিক্ষেপণ কোণ $(90°-\alpha)$ হবে এবং এক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতা h' হবে।



চিত্র ৯.৫.১৬

$\therefore h = \dfrac{u^2}{2g}\sin^2\alpha$ ও $h' = \dfrac{u^2}{2g}\sin^2(90°-\alpha) = \dfrac{u^2}{2g}\cos^2\alpha$

$$R = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{u^2}{g} 2\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{4.\frac{u^2}{g}\sin^2\alpha * জf(u^2,g)\cos^2\alpha}$$

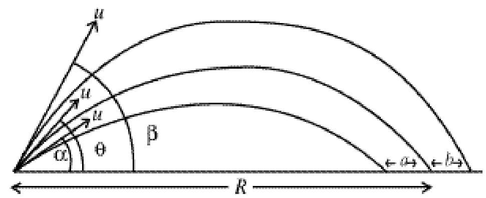
$$= \sqrt{4^2 * জf(u^2,2g)\sin^2\alpha * \frac{u^2}{2g}\cos^2\alpha} = \sqrt{4^2 hh'}$$

$\therefore R = 4\sqrt{hh'}$

উদাহরণ 11: ভূমি হতে α ও β কোণে নিক্ষিপ্ত গোলা ভূমিতে অবস্থিত লক্ষ্যবস্তু হতে যথাক্রমে a কাছে ও b দূরে পতিত হয়। দেখান যে, লক্ষ্যবস্তুকে আঘাত করতে হলে, তার সঠিক নিক্ষেপণ কোণ

$\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a\sin2\beta + b\sin2\alpha}{a+b}\right)$ হতে হবে।

সমাধান : মনে করুন, গোলার নিক্ষেপণ বেগ u এবং লক্ষ্যবস্তুটির অনুভূমিক দূরত্ব R।



চিত্র ৯.৫.১৭

α নিক্ষেপণ কোণের ক্ষেত্রে,

অনুভূমিক পাল্লা $R-a = \frac{u^2}{g}\sin2\alpha$ ---(i)

β নিক্ষেপণ কোণের ক্ষেত্রে,

অনুভূমিক পাল্লা $R+b = \frac{u^2}{g}\sin2\beta$ ---------- (ii)

θ নিক্ষেপণ কোণের ক্ষেত্রে,

অনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2}{g}\sin2\theta$ ----------- (iii)

(i) কে b দ্বারা এবং (ii) কে a দ্বারা গুণ করে যোগ করলে,

$(b+a)R = \frac{u^2}{g}(b\sin2\alpha + a\sin2\beta)$

বা, $R = \frac{u^2}{g}\left(\frac{a\sin2\beta + b\sin2\alpha}{a+b}\right)$ --------- (iv)

(iii) ও (iv) হতে পাই, $\sin2\theta = \frac{a\sin2\beta + b\sin2\alpha}{a+b}$

বা, $2\theta = \sin^{-1}\left(\frac{a\sin2\beta + b\sin2\alpha}{a+b}\right)$

$\therefore\ \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{a\sin2\beta + b\sin2\alpha}{a+b}\right)$

উদাহরণ 12 : u বেগে ও α নিক্ষেপণ কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা R ও সর্বাধিক উচ্চতা H হলে প্রমাণ করুন যে, $16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$

সমাধান : এক্ষেত্রে, $H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$ ও $R = \frac{u^2\sin2\alpha}{g}$

এখন $16gH^2 - 8u^2H + gR^2$

$= 16g * \left(\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)^2 - 8u^2\frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} + g\left(\frac{u^2\sin2\alpha}{g}\right)^2$

$= \frac{4u^4}{g}\sin^4\alpha - 4\frac{u^4}{g}\sin^2\alpha + \frac{u^4}{g} * 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$= \frac{4u^4}{g}\sin^2\alpha\,[\sin^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha] = \frac{4u^4}{g}\sin^2\alpha\,(1-1)$

$= \frac{4u^4}{g}\sin^2\alpha * 0 = 0$

$\therefore\ 16gH^2 - 8u^2H + gR^2 = 0$

উদাহরণ 13 *:* 20 ফুট/সেকেন্ড নিক্ষেপণ বেগে ও θ নিক্ষেপণ কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা 12 ফুট হলে দেখান যে, $12\tan^2\theta - 25\tan\theta + 12 = 0$

সমাধান : অনুভূমিক পাল্লা $R = \dfrac{u^2}{g}\ \sin 2\theta$

$\therefore\ 12 = \dfrac{(20)^2}{32}\ *\ \sin 2\theta$

বা, $\sin 2\theta = \dfrac{12*32}{20*20} = \dfrac{24}{25}$

বা, $\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{24}{25}$

বা, $25\tan\theta = 12(1+\tan^2\theta)$

$\therefore\ 12\tan^2\theta - 25\tan\theta + 12 = 0$

উদাহরণ 14 *:* ভূমি হতে u বেগে ও α নিক্ষেপণ কোণে একটি বস্তু শূন্যে নিক্ষিপ্ত হলো। যদি তার অনুভূমিক পাল্লা, সর্বাধিক উচ্চতা ও বিচরণকাল যথাক্রমে $R,\ H,\ T$ হয়। তবে প্রমাণ করুন, যে,

(i) $R = 4\sqrt{H\left(\dfrac{u^2}{2g} - H\right)}$

(ii) $g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0$

সমাধান : এক্ষেত্রে অনুভূমিক পাল্লা, $R = \dfrac{u^2}{g}\sin 2\alpha$

সর্বাধিক উচ্চতা, $H = \dfrac{u^2}{2g}\ \sin^2\alpha$

বিচরণকাল, $T = \dfrac{2u\sin\alpha}{g}$

(i) $R = \dfrac{u^2}{g}\ \sin 2\alpha = \sqrt{\dfrac{u^4}{g^2}\sin^2 2\alpha} = \sqrt{\dfrac{u^4}{g^2}\, 2^2\ \sin^2\alpha\ \cos^2\alpha}$

$= \sqrt{\dfrac{4u^4}{g^2}\ \sin^2\alpha\ \cos^2\alpha} = \sqrt{16\dfrac{u^2}{2g}\ \sin^2\alpha \infty \dfrac{u^2}{2g}\cos^2\alpha}$

$= 4\sqrt{\dfrac{u^2}{2g}\ \sin^2\alpha \infty \dfrac{u^2}{2g}(1-\sin^2\alpha)}$

$= 4\sqrt{\dfrac{u^2}{2g}\ \sin^2\alpha\left(\dfrac{u^2}{2g} - \dfrac{u^2}{2g}\ \sin^2\alpha\right)}$

$= 4\sqrt{H\left(\dfrac{u^2}{2g} - H\right)}$

(ii) $g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0$

$$= T^2(g^2T^2-4u^2)+4R^2=\left(\frac{2u\sin\alpha}{g}\right)^2\left\{g^2\left(\frac{2u\sin\alpha}{g}\right)^2-4u^2\right\}+4R^2$$

$$= 4R^2+\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2} * 4u^2(\sin^2\alpha-1)=4R^2+\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2}\infty 4u^2\left(-\cos^2\alpha\right)$$

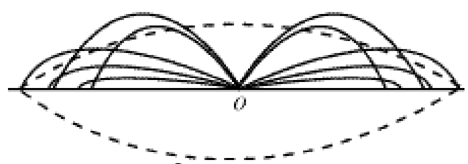
$$= 4R^2-4\left(\frac{u^2}{g}.2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2=4R^2-4\left(\frac{u^2}{g}\sin2\alpha\right)^2=4R^2-4R^2=0$$

অতএব $g^2T^4-4T^2u^2+4R^2=0$

উদাহরণ 15 : ভূমিতে বিস্ফোরিত বোমার কণাগুলো চারিদিকে u গতিবেগে ছুটতে থাকে। ভূমির যে অংশ জুড়ে কণাগুলো ছড়িয়ে পড়বে সে অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, O বিন্দুতে বিস্ফোরিত বোমার কণাগুলো u বেগে বিভিন্ন কোণে চারিদিকে ছড়িয়ে পড়ে।

α কোণে নিক্ষিপ্ত কণার অনুভূমিক পাল্লা $R=\frac{u^2}{g}\sin2\alpha$



চিত্র ৯.৫.১৮

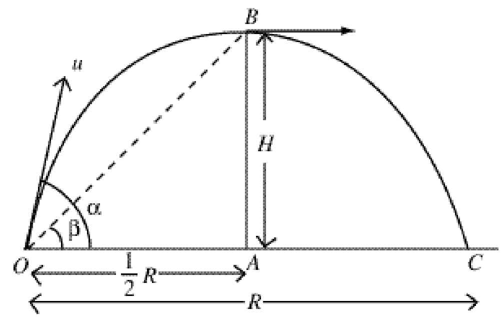
সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা $R_{max}=\frac{u^2}{g}$ [$\because$ $\sin2\alpha$ এর সর্বোচ্চ মান= 1]

সুতরাং কোন কণার অনুভূমিক পাল্লা R_{max} এর বেশি হতে পারে না অর্থাৎ O কেন্দ্র ও R_{max} ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার ক্ষেত্রের অভ্যন্তরে কণাগুলো পতিত হবে।

উক্ত বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\pi.R_{max}^2=\pi.\left(\frac{u^2}{g}\right)^2=\frac{\pi u^4}{g^2}$

উদাহরণ 16 : নিক্ষেপণ বিন্দুতে β কোণ তৈরি করে, এমন একটি খাড়া দেওয়ালকে u আদিবেগে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তুকণা অনুভূমিকভাবে কোন রকমে অতিক্রম করে। প্রক্ষেপকটি t সময় শেষে দেওয়ালটির শীর্ষবিন্দুতে গমন করলে দেখান যে, $t=\dfrac{2u\sin\beta}{g\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$

সমাধান : ধরুন, প্রক্ষেপকের নিক্ষেপণ কোণ α। যেহেতু প্রক্ষেপকটি অনুভূমিকভাবে কোন রকমে AB দেওয়ালকে অতিক্রম করে, সেহেতু $AB=H$ (সর্বাধিক উচ্চতা);



চিত্র ৯.৫.১৯

$OA=\frac{1}{2}R$, (অনুভূমিক পাল্লা $= R$)

এবং $t=\frac{1}{2}T$, (বিচরণকাল $=T$)

$\therefore\ t=\frac{1}{2}.\frac{2u}{g}\sin\alpha=\frac{u}{g}\sin\alpha$

বা, $gt=u\sin\alpha$

$AB=H=\dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$ এবং $OA=\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}.\frac{u^2}{g}\sin2\alpha$

$$\tan\beta=\frac{AB}{OA}=\frac{\frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha}{\frac{u^2}{2g}\sin2\alpha}=\frac{u^2\sin^2\alpha}{u^2.2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{u\sin\alpha}{2u\cos\alpha}$$

$$=\frac{u\sin\alpha}{2\sqrt{u^2\cos^2\alpha}}=\frac{u\sin\alpha}{2\sqrt{u^2(1-\sin^2\alpha)}}=\frac{u\sin\alpha}{2\sqrt{u^2-(u\sin\alpha)^2}}$$

বা, $\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{gt}{2\sqrt{u^2-(gt)^2}}$

বা, $\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\dfrac{g^2t^2}{4(u^2-g^2t^2)}$

বা, $4\sin^2\beta\,(u^2-g^2t^2)=g^2t^2\cos^2\beta=g^2t^2(1-\sin^2\beta)$

বা, $4u^2\sin^2\beta-4g^2t^2\sin^2\beta=g^2t^2-g^2t^2\sin^2\beta$

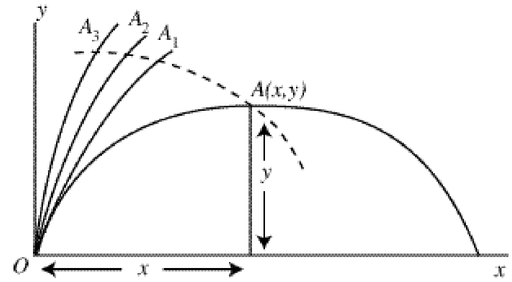
বা, $4u^2\sin^2\beta=g^2t^2(1+3\sin^2\beta)$

বা, $2u\sin\beta=gt\sqrt{1+3\sin^2\beta}$

$$\therefore\ t=\frac{2u\sin\beta}{g\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$$

উদাহরণ 17 : কোন বিন্দু হতে একটি উল্লম্ব তলে বিভিন্ন দিকে v বেগে কতগুলো বস্তুকণা একই মুহূর্তে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হলো। প্রমাণ করুন যে, t সময় অন্তে বস্তুকণাসমূহ একটি বৃত্তের উপর অবস্থান করবে। উক্ত বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, O বিন্দু হতে প্রতিটি বস্তুকণা v বেগে বিভিন্ন নিক্ষেপণ কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে t সময় অন্তে তাদের নিজ নিজ বিচরণ পথের A_1, A_2, A_3----- বিন্দুতে পৌঁছে। মনে করুন, উপরোক্ত কণাসমূহের মধ্যে α নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষিপ্ত কণাটি t সময় অন্তে x অনুভূমিক দূরে ও y উচ্চতায় A বিন্দুতে পৌঁছে।



চিত্র ৯.৫.২০

v এর অনুভূমিক উপাংশ = $v\cos\alpha$ এবং উল্লম্ব উপাংশ = $v\sin\alpha$

মাধ্যাকর্ষনজনিত ত্বরণ g নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল, যার অনুভূমিক উপাংশ = $g\cos 90° = g\infty 0=0$

$\therefore x=v\cos\alpha.t$ এবং $y=v\sin\alpha.t - \frac{1}{2}\ gt^2$

বা, $y+\frac{1}{2}\ gt^2= v\sin\alpha.t$

$\therefore x^2 + \left(y+\frac{1}{2}gt^2\right)^2 = v^2t^2\ (\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

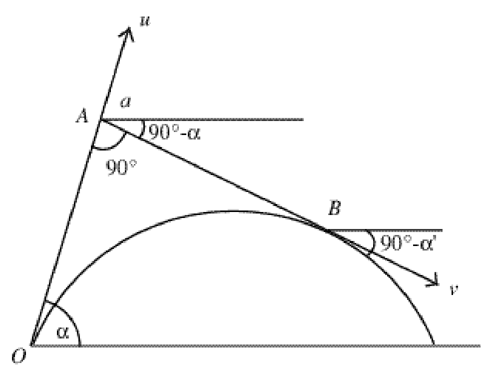
বা, $(x-0)^2+\left\{y-\left(\frac{-gt^2}{2}\right)\right\}^2 = (vt)^2$ ----------- (i)

O বিন্দুগামী অনুভূমিক রেখাকে x-অক্ষ ও উল্লম্ব রেখাকে y-অক্ষ বিবেচনা করলে, A বিন্দুর স্থানাংক (x,y) হয়।

$\therefore$ α নিরপেক্ষ অর্থাৎ যে কোন নিক্ষেপণ কোণের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য (i) নং সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করে, যার কেন্দ্র $(0, \frac{gt^2}{2})$ ও ব্যাসার্ধ = vt.

উদাহরণ 18 : u আদিবেগ ও α নিক্ষেপণ কোণে একটি বস্তুকণা শূন্যে নিক্ষিপ্ত হলো। প্রক্ষেপকটি t সময় অন্তে নিক্ষেপণ দিকের সাথে সমকোণ সৃষ্টি করলে দেখান যে, $t = \frac{u}{g\sin\alpha}$

সমাধান : মনে করুন, প্রক্ষেপকটি O হতে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হয়ে t সময় অন্তে বিচরণপথের B বিন্দুতে পৌঁছে অনুভূমির সাথে θ কোণে v বেগ প্রাপ্ত হয় এবং নিক্ষেপণ দিকের সাথে A বিন্দুতে সমকোণ সৃষ্টি করে।



চিত্র ৯.৫.২১

চিত্র হতে প্রতীয়মান, $\theta=90°-\alpha$

নিক্ষেপণ বেগের অনুভূমিক লম্বাংশ ও উল্লম্ব লম্বাংশ যথাক্রমে $u\cos\alpha$ ও $u\sin\alpha$ এবং v এর অনুভূমিক লম্বাংশ ও নিম্নমুখী লম্বাংশ যথাক্রমে $v\cos\theta= v\cos\ (90°-\alpha) = v\sin\alpha$ ও $v\sin\theta= v\sin(90°-\alpha)= v\cos\alpha$।

মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ g নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল, যার অনুভূমিক লম্বাংশ = $g\cos 90°=g*0=0$.

$v\sin\alpha = u\cos\alpha$ [$\because$ অনুভূমিক দিকে ত্বরণ = 0]

এবং $v\cos\alpha = -u\sin\alpha +gt$

$\therefore \frac{-u\sin\alpha+gt}{u\cos\alpha} = \frac{v\cos\alpha}{v\sin\alpha}$

বা, $-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{gt}{u\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

বা, $\dfrac{gt}{u\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{gt}{u\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{gt}{u}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$

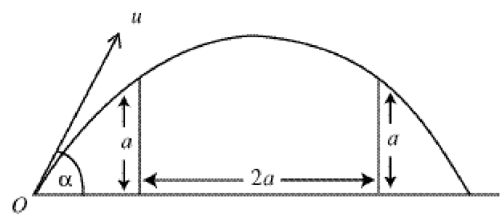
$\therefore t=\dfrac{u}{g\sin\alpha}$

উদাহরণ 19 : u আদিবেগে ও α নিক্ষেপণ কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক $2a$ ব্যবধানে অবস্থিত a উচ্চতা বিশিষ্ট দুটি দেয়ালকে কোন রকমে অতিক্রম করে, প্রমাণ করুন যে,

(i) $a^2g^2 = u^2\cos^2\alpha\,(u^2\sin^2\alpha-2ag)$

(ii) $R= 2a\cot\dfrac{\alpha}{2}$

সমাধান : মনে করুন, t সময় অন্তে প্রক্ষেপকটি $2a$ ব্যবধানে অবস্থিত a উচ্চতায় পৌঁছে। u এর অনুভূমিক লম্বাংশ ও উলম্ব লম্বাংশ যথাক্রমে $u\cos\alpha$ ও $u\sin\alpha$ এবং মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ g নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল, যার অনুভূমিক লম্বাংশ $= g\cos 90° = g*0=0$



চিত্র ৯.৫.২২

$\therefore a = u\sin\alpha\, t-\dfrac{1}{2}gt^2$

বা, $gt^2-2u\sin\alpha t + 2a = 0$

সমীকরণটির মূলদ্বয় t_1 ও t_2 হলে, $t_1+t_2=\dfrac{2u\sin\alpha}{g}$ এবং $t_1t_2=\dfrac{2a}{g}$

প্রক্ষেপকটি $t_1\sim t_2$ সময়ে দেওয়ালদ্বয়ের মধ্যবর্তী $2a$ দূরত্ব অতিক্রম করবে।

$\therefore 2a = u\cos\alpha(t_1\sim t_2)$ [যেহেতু অনুভূমিক দিকে ত্বরণ = 0]

বা, $4a^2= u^2\cos^2\alpha\,(t_1-t_2)^2 = u^2\cos^2\alpha\{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2\}$

$$= u^2\cos^2\alpha\left\{\left(\frac{2u}{g}\sin\alpha\right)^2-4.\frac{2a}{g}\right\}$$

$$= 4u^2\cos^2\alpha\left(\frac{u^2\sin^2\alpha}{g^2}-\frac{2a}{g}\right)$$

বা, $a^2g^2= u^2\cos^2\alpha\,(u^2\sin^2\alpha-2ag)$

আমরা জানি,

অনুভূমিক পাল্লা $R=\dfrac{u^2}{g}\sin2\alpha$ বা, $u^2=\dfrac{gR}{\sin2\alpha}$

(i) হতে, $a^2g^2=\dfrac{gR}{\sin2\alpha}\cos^2\alpha\left(\dfrac{gR}{\sin2\alpha}.\sin^2\alpha-2ag\right)$

$$= \frac{gR\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\left(\frac{gR\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} - 2ag\right)$$

$$= \frac{gR}{2}\cot\alpha\left(\frac{gR}{2}\tan\alpha - 2ag\right)$$

বা, $4a^2g^2 = g^2R^2 - 4ag^2R\cot\alpha$

বা, $4a^2 = R^2 - 4aR\cot\alpha$

বা, $R^2 - (4a\cot\alpha)R - 4a^2 = O$

$\therefore \quad R = \frac{1}{2}\{4a\cot\alpha \pm \sqrt{4^2a^2\cot^2\alpha - 4.1.(-4a^2)}\}$

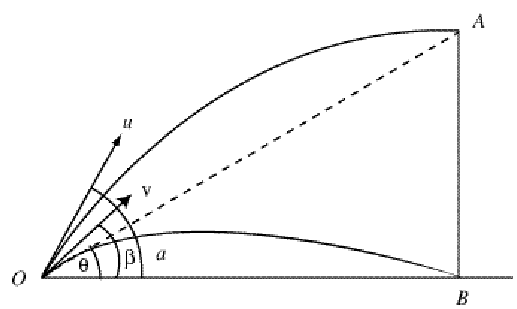
$$R = 2a\left(\cot\alpha \pm \sqrt{\cot^2\alpha + 1}\right) = 2a(\cot\alpha \pm \operatorname{cosec}\alpha) = 2a\left(\frac{\cos\alpha \pm 1}{\sin\alpha}\right)$$

$$\therefore \quad R = 2a\left(\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}\right) = 2a.\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = 2a\cot\frac{\alpha}{2}$$

[$R = 2a\left(\frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}\right)$ যা হতে পারে না, কারণ $(\cos\alpha - 1)$ বিয়োগবোধক এবং সেক্ষেত্রে R বিয়োগবোধক হয়ে যাবে।

উদাহরণ 20 : উলম্ব AB দন্ড ভূমির সাথে O বিন্দুতে θ কোণ সৃষ্টি করে। অনুভূমির সাথে α ও β কোণে একই সঙ্গে O বিন্দু হতে শূণ্যে নিক্ষিপ্ত দুইটি বল যথাক্রমে দন্ডের শীর্ষ ও পাদবিন্দুতে একই সময়ে আঘাত করে। দেখান যে, $\tan\alpha - \tan\beta = \tan\theta$.

সমাধান : মনে করুন, O বিন্দু হতে বলদ্বয় α ও β নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষিপ্ত হয়ে t সময় পরে যথাক্রমে দন্ডের শীর্ষ ও পাদবিন্দুতে আঘাত করে; বল দুইটির নিক্ষেপণ বেগ যথাক্রমে u ও v।



চিত্র ৯.৫.২৩

$OB = x$ ও $AB = y$

u বেগের অনুভূমিক উপাংশ $= u\cos\alpha$ ও উলম্ব উপাংশ $= u\sin\alpha$ এবং v বেগের অনুভূমিক উপাংশ $= v\cos\beta$ ও উলম্ব উপাংশ $= v\sin\beta$;

নিম্নমুখী ক্রিয়াশীল g এর অনুভূমিক লম্বাংশ $= g\cos 90° = g*0 = 0$

এখন $u\cos\alpha.t = x = v\cos\beta.t$

বা, $t = \frac{x}{u\cos\alpha} = \frac{x}{v\cos\beta}$ ------- (i)

$\therefore u\cos\alpha = v\cos\beta$ ------------------------------------ (ii)

$y = u\sin\alpha.\, t - \frac{1}{2}gt^2$ ----------------------------------- (iii)

আবার $0 = v \sin\beta . t - \frac{1}{2} gt^2$ ------------------------------ (iv)

(iii) - (iv), $y = u \sin\alpha .\ t - v \sin \beta . t$

$= u \sin \alpha \frac{x}{u \cos\alpha} - v \sin \beta \frac{x}{v\cos\beta}$

$= x (\tan\alpha - \tan\beta)$

অতএব $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{y}{x} = \tan\theta$

অনুশীলনী– ৯.৫

1. 80 ফুট/সেকেন্ড গতিবেগ ও 30° নিক্ষেপণ কোণে আনত রেখা বরাবর একটি বস্তুকে শূন্যে নিক্ষেপ করা হলো। তার অনুভূমিক পাল্লা, সর্বাধিক উচ্চতা, বিচরণকাল এবং 2 সেকেন্ড পরে অবস্থান ও গতিবেগের দিক নির্ণয় করুন।
2. শূন্যে নিক্ষিপ্ত একটি পাথরখন্ডের সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা 80 ফুট। এক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতা ও বিচরণকাল নির্ণয় করুন।
3. 96 ফুট/সেকেন্ড সমবেগে অনুভূমিকভাবে চলমান একটি বেলুন হতে একটি পাথরকে নিচে ফেলে দেয়া হলে তা 4 সেকেন্ড পরে ভূমিতে পতিত হয়। বেলুনের এবং পাথরটি যে বেগে ভূমিতে আঘাত করে তা নির্ণয় করুন।
4. 1600 ফুট উঁচু পাহাড়ের চুড়ায় অনুভূমিক ভাবে স্থাপিত একটি কামান হতে 200 ফুট/সেকেন্ড গতিবেগে একটি গোলা নিক্ষিপ্ত হলে নির্ণয় করুন–
   (i) গোলাটির অনুভূমিক সরণ;
   (ii) ভূমিতে আঘাতের মুহূর্তে গোলাটির গতিবেগ ও দিক।
5. পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি রাইফেলের বৃহত্তম অনুভূমিক পাল্লা 100 গজ। যদি চন্দ্রপৃষ্ঠে চন্দ্রের আকর্ষণজনিত ত্বরণ $\frac{1}{6} g$ হয়। তবে চন্দ্রপৃষ্ঠে উক্ত রাইফেলের বৃহত্তম অনুভূমিক পাল্লা কত হবে?
6. 80 ফুট উঁচু একটি টাওয়ারের শীর্ষবিন্দু হতে 128 ফুট/সেকেন্ডগতিবেগে ও অনুভূমির সাথে 30° কোণে একটি পাথর শূন্যে নিক্ষিপ্ত হল। টাওয়ার হতে কত দূরে এবং কত গতিবেগে তা ভূমিতে পতিত হবে?
7. দেখান যে, অনুভূমিক পাল্লার মান বৃহত্তম হবে যদি নিক্ষেপণ কোণ 45° হয়। এক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে, সর্বাধিক উচ্চতার মান অনুভূমিক পাল্লার এক চতুর্থাংশ।
8. একটি প্রক্ষেপকের নিক্ষেপণ বেগ u, নিক্ষেপণ কোণ α, সর্বাধিক উচ্চতা H, বিচরণকাল T, অনুভূমিক পাল্লা R ও $g = 32$ ফুট/সেকেন্ড^2 প্রমাণ করুন যে, (i) $4T = H$, (ii) $\frac{16T^2}{R} = \tan\alpha$
9. 128 ফুট/সেকেন্ড গতিবেগে ও 30° নিক্ষেপণ কোণে নিক্ষিপ্ত প্রক্ষেপকের গতিপথ কতক্ষণ পরে তার নিক্ষেপণ দিকের সাথে সমকোণ সৃষ্টি করবে?
10. একটি প্রক্ষেপণ বিন্দু হতে d ও $2d$ দূরে h উচ্চতা বিশিষ্ট দুটি দেওয়ালকে কোন রকমে অতিক্রম করে। প্রক্ষেপকটির নিক্ষেপণ বেগ v হলে দেখান যে, $\frac{4v2}{g} = \frac{4d^2+9h^2}{h}$
11. অনুভূমির সাথে 60° কোণে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক 20 ফুট ব্যবধানে অবস্থিত 10 ফুট উঁচু দুটি দেওয়ালকে কোন রকমে অতিক্রম করে। প্রক্ষেপকটির অনুভূমিক পাল্লার মান নির্ণয় করুন।
12. u বেগে ও α নিক্ষেপণ কোণে শূণ্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর অনুভূমিক পাল্লা R ও বিচরনকাল T হলে প্রমাণ করুন যে, $g^2T^4-4u^2T^2+4R^2 = 0$

13. সম্মুখদিকে ও পশ্চাদদিকে চলন্ত কোন ট্রাক হতে u বেগে নিক্ষিপ্ত গুলির অনুভূমিক পাল্লা যথাক্রমে R ও R' হলে দেখান যে, গুলির নিক্ষেপণ কোণ $\tan^{-1}\left[\dfrac{g(R-R')^2}{4u^2(R+R')}\right]$

14. u আদিবেগে এবং α নিক্ষেপণ কোণে শূণ্যে নিক্ষিপ্ত একটি প্রক্ষেপক প্রক্ষেপ বিন্দু হতে a দূরত্বে অবস্থিত একটি খাড়া দেওয়ালের উপর h উচ্চতায় পৌছালো দেখান যে,

$$h=\frac{u^2}{2g}-\frac{ga^2}{2u^2}-\frac{ga^2}{2u^2}\left(\tan\alpha-\frac{u^2}{ga}\right)^2$$ এবং এ হতে দেখান যে, h এর বৃহত্তম মান $\dfrac{u^2}{2g}-\dfrac{ga^2}{2u^2}$

উত্তরমালা

অনুশীলনী ৯.৩

1. 223 কিলোমিটার
2. 9.68 ফুট/সে^{2}
3. $\frac{11}{45}$ ফুট/সে২, $\frac{22}{45}$ ফুট/সে২, ঘন্টায় 40 মাইল
4. $\frac{2}{3}$ ইঞ্চি
7. 10 সেকেন্ড, 150 মিটার