বীজগণিত

ইউনিট
১

সেট

ভূমিকা

সেট গণিত বিষয়ের একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। জি বুল (১৮১৫–১৮৬৪) এবং ক্যান্টর (১৮৪৫–১৯১৮) সেট সম্পর্কে প্রথম সুস্পষ্ট ধারণা দেন এবং স্কুল গাণিতিক বিকাশ সাধনের ভিত্তি হিসাবে তখন থেকে দ্রুত স্বীকৃতি লাভ করে। সংখ্যা ও বিন্দুর বিমূর্ত ধারণাকে মূর্ত করে তোলার জন্য সেটের ধারণা অপরিহার্য। বাস্তব বস্তুর সেটের সাহয্যে আমরা সহজেই পাটিগণিতের সংখ্যা সেট, জ্যামিতির বিন্দুর সেট এবং উভয়কে সমন্বয় সাধন করে গণিত বিষয়ে পরিপূর্ণ ধারণা লাভ করতে পারি। এ ইউনিটে সেট সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি–

- সেট এর সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- সেট এর কার্যাবলী ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সেট এর বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন;
- ক্রমজোড়, কার্তেসীয় গুণজ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

পাঠ ১ সেট ও তার প্রকারভেদ

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি–

- সেট কি তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- সেটকে গাণিতিক প্রতীকে প্রকাশ করতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার সেট এর সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন।

সেট আধুনিক গণিতের অন্যতম স্তম্ভ। সেট বলতে বুঝায় বাস্তব জগতের বা চিন্তা জগতের বস্তুর যে কোন সুনির্ধারিত সংগ্রহ। গাণিতিক প্রতীক বা উক্তি দিয়ে কোন সেটের অবতারণা করলে তা যে সুনির্ধারিত সে বিষয়ে অবশ্যই নিশ্চিত হওয়া দরকার। কারণ সুনির্ধারিত সংগ্রহ ছাড়া সেটের ধারণার উপর শর্ত আরোপ করা সম্ভব নয়। এ পাঠে সেট ও তার প্রকারভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

সেট

দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তুর সংগ্রহ বর্ণনা করতে আমরা বলি: এক সেট প্লেট, এক ঝুড়ি আম, এক গুচ্ছ দুল, একদল ছাত্র। এখানে সেট, ঝুড়ি, গুচ্ছ, দল ইত্যাদি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ ব্যবহার করা হয়েছে। গণিতে এ অর্থে আমরা সেট শব্দ ব্যবহার করি।

বিভিন্ন বস্তুর সুনির্দিষ্ট সংগ্রহকে সেট বলা হয়।

সেটের সকল উপাদান এক জাতীয় হবে এ ধরনের কোন নিয়ম নেই। যেমন: ডাইনিং সেট = {টেবিল, চেয়ার, প্লেট, গ্লাস}। এখানে টেবিল, চেয়ার, প্লেট গ্লাস; ডাইনিং সেটের কতগুলো উপাদান। অর্থাৎ সেটের সদস্যকে সেটের উপাদান বলে। সেটের উপাদান বোঝার জন্য আমরা "$\in$" (গ্রিক অক্ষর *Epsilon*) চিহ্ন ব্যবহার করি। যেমন : $X\in A$ এর অর্থ হল "X", A সেটের একটি উপাদান। আবার "X", A সেটের উপাদান না হলে □ চিহ্নের দ্বারা প্রকাশ করা হয়, X□A এখানে "□" দ্বারা সেটের উপাদান নয় বুঝাবে।

সেট প্রকাশের বিভিন্ন রকম প্রতীক :

১. বাক্যের সাহায্যে: এক দল ছাত্র, এক গুচ্ছ ফুল ইত্যাদি।

২. দ্বিতীয় বন্ধনীর সাহায্যে : $\{X\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{0\}$, $\{1, 2, 3...\}$ ইত্যাদি

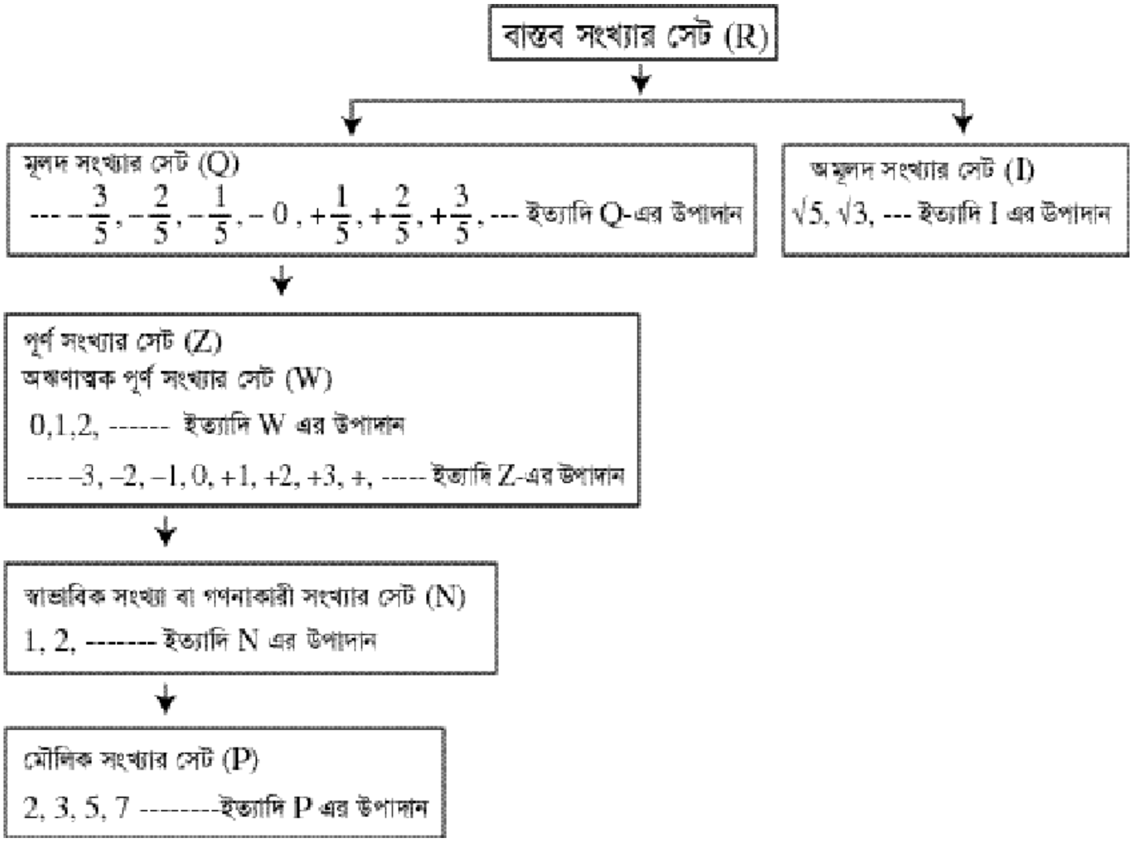
৩. ভেনচিত্রের সাহায্যে : বৃত্ত, উপবৃত্ত, আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ইত্যাদি।
(ফরাসি গণিতবিদ অয়লার এবং ইংরেজ গণিতবিদ ভেন পৃথকভাবে জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে সেটের উপাদানগুলো রেখে সেটকে প্রকাশ করেন)

৪. সেটের গাণিতিক প্রকাশ : $A=\{x:x\in A\}$ অর্থাৎ A একটি সেট যার সদস্য হল x।

বিভিন্ন ধরনের সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেটকে বিভিন্ন প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেয়া হল:

প্রতীক	কথায়
১. $A=\{x\in N : x<10\}$	১. A একটি সেট যার উপাদান হল 10 এর চেয়ে ছোট স্বাভাবিক সংখ্যা x
২. $B=\{y\in N : \frac{y}{12}\}$	২. B একটি সেট যার উপাদান হল 12 কে ভাগ কর এমন স্বাভাবিক সংখ্যা y অর্থাৎ 12 এর ধনাত্মক গুণনীয়ক y
৩. $C=\{z\in N : \frac{2}{z}\}$	৩. C একটি সেট যার উপাদানগুলো হল 2 দ্বারা বিভাজ্য স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহ অর্থাৎ 2 এর গুণিতক z

বিভিন্ন সংখ্যার সেটকে ছকের সাহায্যে নিম্নে দেখানো হল :



বিভিন্ন প্রকার সেট

উপসেট (Sub Set) : মনে করুন *A*, B দুটি সেট। *A* কে *B* এর উপসেট বলা হবে যদি *A* এর প্রত্যেক উপাদান *B*-এর উপাদান হয়, তখন *A∏B* লেখা হয়।

উদাহরণস্বরূপ : $A=\{1, 7\}$ এবং $B=\{x, y, z\}$

সেট দুটি $C=\{1, 7, x, y, z\}$ এর উপসেট অর্থাৎ *A* ∏ *C*, *B* ∏ *C.*

প্রকৃত উপসেট : যে কোন একটি সেট *A* অন্য একটি সেট U-এর প্রকৃত উপসেট হবে যদি *A* সেটে U সেট অপেক্ষা অন্ততপক্ষে একটি উপাদান কম থাকে। উদাহরণসরূপ U= $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $A=\{1, 2, 3, 4\}$ হয় তবে *A* সেট U সেটের প্রকৃত উপসেট এবং প্রকৃত উপসেট-এর প্রতীক হল " ℘" অর্থাৎ *A*℘U আবার $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ হলে *B*∏U, এক্ষেত্রে *B* কে U-এর অপ্রকৃত উপসেট বলা হয়।

নিজে করুন : মনে করুন, $A=\{1, 2, 3, 5\}$ এবং $B= \{2, 3, 4, 5\}$। তাহলে *A*, কি *B*-এর উপসেট**?** *B* কি *A*-এর উপসেট**?**

সীমিত ও অসীম সেট : কোন সেটের উপাদান সংখ্যা যদি সীমিত হয় তবে তাকে সীমিত সেট বলে। $A=\{1, 2, 3, 4\}$ সেটটি সীমিত সেট, কারণ এই সেটে চারটি উপাদান আছে।

কোন সেটের উপাদান সংখ্যা যদি অসীম হয় তবে তাকে অসীম সেট বলে। যেমন : $A=\{x:x\in A; x= 1, 2, 3, \ldots\}$ এখানে x, A সেট এর উপাদান যেখানে x এর মান $1, 2, 3, \ldots$। এখানে সেটটি অসীম সেট, কারণ পূর্ণ সংখ্যা কোথাও শেষ হয়নি।

নিজে করুন : মনে করুন $A=\{1, 2, 3, \ldots\ldots., 100\}$

$B= \{2, 4, 6, 8,\ldots\ldots..\}$

১. A কি ধরণের সেট?

২. B কি ধরনের সেট?

ফাঁকা সেট (Null or empty set) : যদি কোন একটি সেটে আদৌ কোন উপাদান না থাকে তবে সেই সেটকে ফাঁকা সেট বলে। ফাঁকা সেটকে 'φ' অথবা '{ }' চিহ্ন দ্বরা প্রকাশ করা হয়। মনে করুন, একটি ক্লাসে কিছু ছাত্র আছে। ছাত্রগুলি একে একে সবাই চলে গেলে ক্লাসে একটি ছাত্রও রইল না। সেক্ষেত্রে ক্লাসে ছাত্রের সেটকে আমরা ফাঁকা সেট বলবো এবং "ϕ" চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করবো।

নিজে করুন : $A= \{O\}$; A সেট কি ফাকা সেট?

$B = \{\ \ \}=\{x\in N| x^2=3\}$; B সেটটি কোন সেট?

সমান ও সমতুল্য সেট (Equal and Equivalent Set) : যে সব সেটের উপাদান একই তাদেরকে সমান সেট বলে। উদাহরণ স্বরূপ $A=\{1,2,3\}$ এবং $B=\{3,1,2\}$ হলে এ ক্ষেত্রে A ও B সমান সেট অর্থাৎ যদি $A=B$।

দুটি সেটের উপাদানের মধ্যে যদি এক এক মিল করা যায় তবে সে সেট দুইটি পরস্পর সমতুল্য। যেমন, $A =$ {আম, জাম, কাঠাল} ও $B =$ {শাপলা, জবা, গোলাপ} সেট দুটির উপাদানগুলি এক জাতীয় নয় তবে উপাদান সংখ্যা সমান তাই এ সেট দুটি সমতুল্য সেট।

নিজে করুন : $A= \{10, 15, 20\}$ এবং $B = \{15, 20, 10\}$ সেট দুটি কি সমান সেট?

$A=$ {চেয়ার, টেবিল, ছাত্র} এবং $B =$ {কাগজ, চক, কালি} এখানে A ও B কি ধরণের সেট?

সার্বিক সেট (Universal set) : আলোচিত সকল সেট যে বৃহৎ সেটের অন্তর্ভূক্ত তাকে সার্বিক সেট বলে। সার্বিক সেটকে U, প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তাছাড়া আয়তকার বা বর্গাকার ক্ষেত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করুন, গরু, মহিষ, মানুষ, পাশু-পাখি সেট নিয়ে আলোচনা করলে প্রাণী সেট হবে সার্বিক সেট।

পাঠোত্তোর মূল্যায়ন ১

1. কোনটি উপসেটের প্রতীক?

   ক. ϕ খ. □ গ. $\simeq$ ঘ. $\wp$

2. কোনটি U={1,2,3,4} এর উপসেট, কিন্তু প্রকৃত উপসেট নয়।

   ক. {1, 2} খ. {1, 4, 2, 3} গ. {2, 4, 2, 1} ঘ. {1}

3. $A=\{1, 2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4, 5, 6\}$ সেট দুটি পরস্পর

   ক. সমান সেট খ. সমতুল্য সেট গ. সার্বিক সেট ঘ. ফাঁকা সেট

4. যদি $A=\{X|X\in N$ এবং $X<5\}$ হয় তবে A সেটের উপসেট সংখ্যা কত?

ক. 5টি খ. 4টি গ. 8টি ঘ. 16 টি

5. $A=\{3,4,5,6\}$—এর উপাদান সংখ্যা কয়টি?

ক. 4টি খ. 6টি গ. 5টি ঘ. 3টি

6. কোনটি প্রকৃত উপসেটের প্রতীক?

ক. $\in$ খ. { } গ. □ ঘ. $\wp$

7. ফাঁকা সেট কি ভাবে প্রকাশ করা হয়?

ক. { } খ. {০} গ. {−} ঘ. $\{x\}$

8. নিচের কোনটি অসীম সেট?

ক. $\{1, 2, 3, 4\}$ খ. $\{1, 2, 3\}$ গ. $\{1, 2, 3...\}$ ঘ. $\{-1, -2, -3\}$

9. দুটি সেট সমান হয় কখন?

ক. সদস্য সংখ্যা সমান হলে খ. একই জাতীয় সদস্য হলে

গ. সদস্য সংখ্যা সমান ও একই জাতীয় ঘ. সদস্য সংখ্যা সমমান হলে

10. $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{3,4,2,5\}$ সেট দুটি কিরূপ সেট?

ক. পরস্পর পূরক সেট খ. সমান সেট

গ. সমতুল সেট ঘ. উপসেট

পাঠ ২ সেটের কার্যবিধি; সংযোগ ও ছেদ সেটের ধর্মাবলী এবং প্রমাণ

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সেটের কার্যবিধি ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সংযোগ সেটের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- ছেদ সেটের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- সংযোগ ও ছেদ সেটের গঠন ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সংযোগ ও ছেদ সেটের ধর্মাবলী প্রমাণ করতে পারবেন।

সেট আলোচনায় সংখ্যার মত একপাদী ও দ্বিপদী কার্যবিধি রয়েছে। সংখ্যার ক্ষেত্রে বাইনারী কার্যবিধি গুলি হল যোগ $(+)$, বিয়োগ $(-)$, গুণ $(*)$ এবং ভাগ $(\div)$। কিন্তু সেটের বেলায় দ্বিপদী কার্যবিধিগুলি হল সেটের সংযোগ $(\cup)$, সেটের ছেদ $(\cap)$ এবং পূরক (c) ইত্যাদি। বর্তমান পাঠে সেটের কার্যবিধিগুলো আলোচনা করা হল।

সেটের কার্যবিধি

সেটের কার্যবিধি বলতে সেটের সংযোগ, সেটের ছেদ, সেটের বিয়োগ ইত্যাদি কার্যকে বুঝায়। কার্যবিধিকে নিম্নের চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

১. সংযোগ সেট "$\cup$"

২. ছেদ সেট "$\cap$"

৩. বিয়োগ "$-$"

৪. পূরক সেট "c"

সেটের কার্যবিধি বলতে সেটের সংযোগ, ছেদ, বিয়োগ ইত্যাদি কার্যকে বুঝায়।

সংযোগ সেট (Set Union) : দুটি সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে তাদের সংযোগ সেট বলে। যদি A ও B দুটি সেট হয়, তবে A ও B এর সংযোগ সেটকে $A \cup B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ স্বরূপ: যদি $A = \{1,2,3\}$ এবং $B = \{4,5,6\}$ হয় তবে সংযোগ সেট
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

নিজে করুন:

যদি $A = \{1, 2,3\}$ এবং $B = \{3,4,5\}$ তখন
সংযোগ সেট, $A \cup B =$ কত?

ছেদ সেট (Set Intersection) : দুটি সেটের সাধারণ সদস্য নিয়ে গঠিত সেটকে তাদের ছেদ সেট বলা হয়। যদি A ও B দুটি সেট হয় তবে ছেদ সেটকে $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। উদহরণ স্বরূপ : যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{3, 4, 5, 6\}$ হয় তবে ছেদ সেট

$A \cap B = \{3, 4\}$

নিজে করুন: যদি $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং

$B \{4, 5, 6, 7, 8\}$ তখন

ছেদ সেট $A \cap B =$ কত?

সংযোগ সেট ও ছেদ সেটের কয়েকটি ধর্ম

ক. সংযোগ সেট:

i. A কোন সেট হলে $A \cup A = A$।

ii. সংযোগ সেট বিনিময় বিধি (commutative law) মেনে চলে। অর্থাৎ $A \cup B = B \cup A$; যেখানে A ও B দুটি সেট।

iii. সংযোগ সেট সঙ্গী নিয়ম (associative law) মেনে চলে। A, B এবং C তিনটি সেট হলে,

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$।

iv. সংযোগ সেট বন্টন (distributive law) বিধি মেনে চলে। যদি A, B এবং C তিনটি সেট হয় তবে

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

খ. ছেদ সেট

i) প্রত্যেক ছেদ সেটের ক্ষেত্রে সে তার নিজের একক অর্থাৎ $A \cap A = A$

ii) ছেদ সেট বিনিময় বিধি (commulative law) পালন করে। যদি A ও B দুটি সেট হয় তবে

$A \cap B = B \cap A$

iii) ছেদ সেট সঙ্গী নিয়ম (associative law) পালন করে। যদি A, B এবং C তিনটি সেট হয় তবে

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

iv ছেদ সেট বন্টন বিধি মেনে চলে। যদি A, B ও C তিনটি সেট হয় তবে

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

সেটের বিনিময় নিয়মের প্রমাণ

বিনিময় সূত্র : A ও B দুটি সেটের জন্য

i. $A \cup B = B \cup A$ (সংযোগের বিনিময় নিয়ম)

ii. $A \cap B = B \cap A$(ছেদ এর বিনিময় নিয়ম)

প্রমাণ: মনে করুন A ও B দুটি সেট, x তাদের উপাদান এবং $x \in A \cup B$

তখন, $X \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ অথবা $x \in A$

$\Rightarrow x \in B \cup A$

অতএব, $A \cup B = B \cup A$ (সংযোগ সেটের ক্ষেত্রে)

আবার মনে করুন, $x \in A \cap B$ তখন

$x \in A \cap B$ $\quad$ $x \in A$ এবং $x \in B$

$x \in B$ এবং $x \in A$

$x \in B \cap A$

সুতরাং $A \cap B = B \cap A$ [ছেদ সেটের ক্ষেত্রে]

অতএব, সংযোগ এবং ছেদ সেটের ক্ষেত্রে বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

উদাহরণ: যদি $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ হয়

তবে i. সংযোগ সেটের বিনিময় সুত্র প্রমাণ করুন।

ii. ছেদ সেটের বিনিময় সুত্র প্রমাণ করুন।

সমাধান-i. সংযোগ সেটের সুত্র অনুযায়ী

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ এবং

$B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$\therefore A \cup B = B \cup A$

(ii) ছেদ সেটের সুত্র অনুযায়ী

$A \cap B = \{3\}$

$B \cap A = \{3\}$

$\therefore A \cap B = B \cap A$

নিজে করুন

যদি $P = \{x, y, z\}$ এবং $Q = \{\text{u}, \text{v}, x\}$ হয়

তবে সংযোগ ও ছেদ সেটের ক্ষেত্রে বিনিময় সুত্র যাচাই করুন।

সংযোগ ও ছেদ সেটের সঙ্গী নিয়মের প্রমাণ

মনে করুন A, B ও C তিনটি সেট। অতএব সংযোগ সেটের ক্ষেত্রে সঙ্গী নিয়ম সূত্র

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$।

প্রমাণ ঃ ধরুন $x \in A \cup (B \cup C)$; যেখানে x সংযোগ সেটের উপাদান

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা ($x \in B$ অথবা $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ অথবা $x \in B$) অথবা $x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ অথবা $x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

$\therefore A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

অতএব সংযোগ সেট সঙ্গী নিয়ম সূত্র মেনে চলে।

আবার, ছেদ সেট এর ক্ষেত্রে সঙ্গী নিয়ম সূত্র $A \cap (B \cap C) = (\text{A} \cap \text{B}) \cap C$

প্রমাণঃ ধরুন $x \in A \cap (B \cap C)$; যেখানে x ছেট সেটের উপাদান

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং ($x \in B$ এবং $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ এবং $x \in B$) এবং $x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

$\therefore A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ।

অতএব ছেদ সেট সঙ্গী নিয়ম সূত্র মেনে চলে।

অতএব, সংযোগ ও ছেদ উভয় সেট সঙ্গী নিয়ম সূত্র মেনে চলে।

উদাহরণ : যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ও B $\{3, 4, 5, 6\}$ এবং $C\{1, 2, 5, 6, 4\}$ হয় তবে (i) সংযোগ (ii) ছেদ সেট যে সঙ্গী নিয়ম সূত্র মেনে চলে তা যাচাই করুন।

সমাধানঃ

(i) সংযোগ সেটে সঙ্গী নিয়ম সুত্র

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

এখানে, $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

এবং $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

আবার, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

এবং $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(ii) ছেদ সেটে সঙ্গী নিয়ম সুত্র

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

এখানে, $(B \cap C) = \{4, 5, 6\}$

এবং $A \cap (B \cap C) = \{4\}$

আবার $(A \cap B) = \{3, 4\}$

এবং $(A \cap B) \cap C = \{4\}$

$\therefore A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

নিজে করুন, যদি $P = \{x, y, z\}$, $Q = \{y, z, \mathrm{u}\}$ এবং $R = \{z, \mathrm{u}, \mathrm{v}\}$ হয় তবে সংযোগ ও ছেদ সেটের ক্ষেত্রে সঙ্গী নিয়ম সূত্র যাচাই করুন।

সংযোগ ও ছেদ সেট বন্টন নীতি মেনে চলে তার প্রমাণ

যদি A, B ও C তিনটি সেট হয় তবে

সংযোগ সেটের বন্টন নিয়ম সুত্র $A\cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$।

প্রমাণঃ ধরুন, $x \in A\cup (B \cap C)$।

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা ($x \in B$ এবং $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ অথবা $x \in B$) এবং ($x \in A$ অথবা $x \in C$)

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore A\cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

অতএব সংযোগ বন্টন নিয়ম সট সূত্র মেনে চলে।

ছেদ সেটের ক্ষেত্রে বন্টন সুত্র $A\cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

প্রমাণঃ $x \in A\cap (B\cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in (B\cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$ অথবা $x \in C$

$\Rightarrow$ ($x \in A$ এবং $x \in B$) অথবা ($x \in A$ এবং $x \in C$)

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ অথবা $X \in (A \cap C)$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore A\cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

অতএব, ছেদ সেট বন্টন বিধি নিয়ম মেনে চলে।

উদাহরণঃ যদি $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$ এবং $C=\{4, 5, 6, 7\}$ হয় তবে সংযোগ ও ছেদ সেটের ক্ষেত্রে বন্টন বিধি যাচাই করুন।

সমাধানঃ

(i) সংযোগ সেটের ক্ষেত্রে

$A\cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

এখানে, $(B \cap C) = \{4, 5, 6\}$ এবং

$A\cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

আবার, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore A\cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

সংযোগ সেট বন্টন সুত্র মেনে চলে।

(ii) ছেদ সেট এর ক্ষেত্রে:

$A\cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

এখানে,

$(B\cup C) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

এবং $A\cap (B \cup C) = \{3, 4\}$

আবার, $(A \cap B) = \{3, 4\}$, $(A \cap C)=\{4\}$

অতএব, $(A \cap B) \cup (A \cap C)=\{3, 4\}$

$\therefore A\cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ অতএব ছেদ সেট বন্টন নিয়ম মেনে চলে।

নিজে করুন:

যদি, $A =$ {গরু, ছাগল, ভেড়া, মহিষ}

$B =$ {ভেড়া, মহিষ, হরিণ, বাঘ}

$C =$ {হরিণ, বাঘ, মহিষ, সিংহ}

তিনটি সেট হয় তবে, সংযোগ ও ছেদ সেটের ক্ষেত্রে বন্টন নিয়ম যাচাই করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২

1. $x\in (A \cap \mathrm{B})$ দ্বারা কি বুঝায়?

   ক. $x\in A$ অথবা $x\in B$ খ. $x\in A$ এবং $x\square B$

   গ. $x\square A$ অথবা $x\in B$ ঘ. $x\in A$ এবং $x\in B$

2. '$\cup$' প্রতীক দ্বারা কি বুঝায়?

   ক. সংযোগ খ. ছেদ

   গ. উপসেট ঘ. ফাঁকা

3. "অথবা" অর্থে কোন প্রতীক ব্যবহার করা হয়

   ক. Λ খ. Δ

   গ. A ঘ. $\forall$

4. নিন্মে কোনটি সেটের বিনিময় নিয়ম?

   ক. $A\cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   খ. $(A \cap B) = (B \cup A)$

   গ. $(A \cap B) \square (B \cup A)$

   ঘ. $A\cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. **নিম্নে কোনটি বন্টন নিয়ম?**
   ক. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   খ. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   গ. $(A \cap B) = (B \cup A)$
   ঘ. $(A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (A \cap B)$
6. **নিম্নলিখিত সেটগুলো নির্ণয় করুন?**
   যদি (i) $N = \{x \in N \mid x^2 > 10$ এবং $x^3 < 100\}$
   (ii) $Z = \{x \in Z \mid x^2 < 50$এখানে z স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$
7. **যদি** $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5, 4\}$ **এবং** $C= \{7, 2, 4, 6\}$ **হয় তবে নির্ণয় করুন।**
   (i) $A \cup B=$ **কত?** (ii) $B \cup C=$ **কত?** (iii) $A \cap B \cup C=$ **কত?**
8. **প্রমাণ করুন,** $\{x \in N \mid x^2 < 50\} = \{x \in N \mid x^3 < 500\}$
9. **যদি** $A=\{x, y, z\}$ **এবং** $B=\{y, z, \mathrm{v}\}$ **হয় তবে প্রমাণ করুন**
   (i) $A \cap B = B \cap A$ (ii) $A \cup B = B \cup A$

পাঠ-৩ সমস্যা সমাধানে সেট

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- ভেনচিত্র সম্পর্কে লিখতে পারবেন।
- সেটের কার্যবিধি ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

আমরা পূর্ব পাঠে সেটের কার্যবিধি সম্পর্কে আলোচনা করেছি। এখন প্রশ্ন হল সেটের এ সব কার্যবিধিকে কিভাবে ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করা যায়। বর্তমান পাঠে সেট সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা ও তাদের সমাধান আলোচনা করা হল।

সেটের গাণিতিক ব্যবহার: সেটের কার্যবিধি গণিতে বিভিন্ন সমস্যা যেমন: ল.সা.গু, গ.সা.গু ইত্যাদি সমাধান করতে পারে। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ সহ আলোচনা করা হল।

উদাহরণ-1: 8, 12 ও 20-এর গ.সা.গু সেটের সাহায্যে নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, 8, 12, 20-এর গুননীয়কের সেট হল P, Q, R তাহলে

$P = \{1, 2, 4, 8\}$

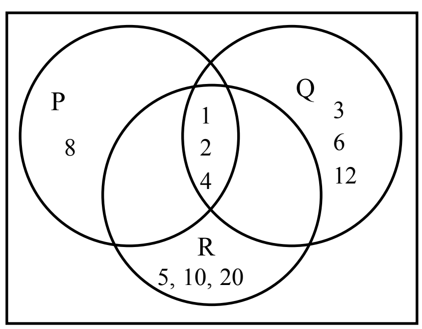
$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ এবং

$R = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

এখন P, Q ও R সেট এর সাধারণ সংখ্যা নিয়ে গঠিত সেট হল

$P \cap Q \cap R = \{1, 2, 4\}$

ভেনচিত্রের সাহায্যেও আমরা $P \cap Q \cap R$ নির্ণয় করতে পারি।



চিত্র ১.১

এখানে, $P \cap Q \cap R = \{1, 2, 4\}$

এই সেটের গরিষ্ঠ উপাদান 4

$\therefore$ নির্ণেয় গসাগু = 4

নিজে করুন

1. 3, 9, 21 এর গ.সা.গু সেটের সাহায্যে নির্ণয় করুন।
2. 12, 24, 32-এর গ.সা.গু সেটের সাহায্যে নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 2ঃ 2, 3 ও 4-এর ল.সা.গু সেটের সাহায্যে নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন 2, 3 ও 4 এর গুণিতকের সেটগুলি যথাক্রমে P, Q ও R, তাহলে

$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12 \ldots\}$

$Q = \{3, 6, 9, 12\ldots\}$

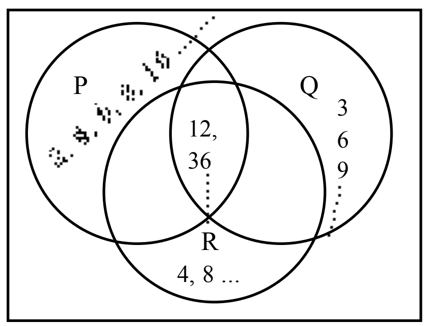
$R = \{4, 8, 12\ldots\}$

$P \cap Q \cap R = \{12, 36\ldots\}$

এই সেটের লগিষ্ঠ উপাদান 12

$\therefore$ নির্ণেয় লসাগু =12

ভেনচিত্রের সাহায্যেও আমরা P∩Q∩R পেতে পারি ঃ



চিত্র ১.২

এখানে, $P \cap Q \cap R = \{12, 36\ldots\}$

উদাহরণ 3 : 50 জন ব্যবসায়ী যুবকের মধ্যে 17 জন গাড়ী, 20 জন সাইকেল, 23 জন মটর সাইকেল, 12 জন সাইকেল ও মটর সাইকেল, 9 জন গাড়ী ও সাইকেল, 8 জন গাড়ী ও মটর সাইকেল এবং 5 জন গাড়ী , সাইকেল ও মটর সাইকেল ক্রয় করল।

i) মোট কতজন ব্যবসায়ী যুবক কোন কিছুই ক্রয় করছে না?

ii) মোট কতজন ব্যবসায়ী যুবক কেবল মাত্র সাইকেল ক্রয় করেছে?

iii) মোট কতজন ব্যবসায়ী যুবক কেবল মাত্র মটর সাইকেল ক্রয় করেছে?

iv) মোট কতজন ব্যবসায়ী যুবক কেবলমাত্র গাড়ী ক্রয় করেছে?

সমাধান : মনে করুন,

U = ব্যবসায়ী যুবকদের সেট (সার্বিক সেট)

A = গাড়ী ক্রেতার সেট

B = সাইকেল ক্রেতার সেট

C = মটর সাইকেল ক্রেতার সেট

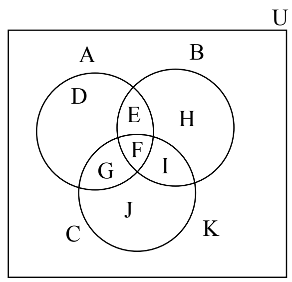
কোন সেট S এর উপাদান সংখ্যাকে $n(S)$ দ্বারা সূচিত করা হলে $n(U)=50$

$n(A) = 17, \quad n(B)= 20, \quad n(C)= 23$

$n(A\cap B)=9, \quad n(A\cap C)=8, \quad n(B\cap C) = 12$

$n(A\cap B\cap C) = 5$

ভেনচিত্র অংকন করে দেখি যে,



চিত্র: ১.৩

$F = A\cap B\cap C \quad n(\mathrm{F}) = 5$

$E\cup F = A\cap B \quad n(E\cup F) =9$

$n(E) +n(F) = 9$

$n(E) = 4$

$G\cup F = A\cap C \quad n(G\cup F) = 8$

$n(G) + n(F) = 8$

$n(G) = 3$

$I\cup F = B\cap C \quad n(I\cup F) = 12$

$n(I)+n(F) =12$

$n(I) = 7$

$D\cup E\cup F\cup G = A$

$n(D) + n(E) + n(F) + n(G) = 17$

$n(D) = 17–4–5–3 = 5$

$E\cup F\cup I\cup H = B$

$n(E) + n(F) + n(I) + n(H) = 20$

$n (H) = 20–4–5–7 = 4$

$F\cup G\cup I\cup J = C$

$n(F) + n(G) + n(I) + n(J) = 23$

$n(J) = 23–5–3–7=8$

এখন $A\cup B\cup C = D\cup E\cup F\cup G\cup H\cup I\cup J$

$= \{36\}$

$\therefore\ n(K) = n(U) – n(A\cup B\cup C) = 14$

$\therefore$ 14 জন ব্যবসায়ী যুবক কোন কিছুই ক্রয় করছে না এবং 5 জন যুবক কেবলমাত্র গাড়ী, 4 জন যুবক কেবলমাত্র সাইকেল ও 8 জন যুবক কেবলমাত্র মাটর সাইকেল ক্রয় করেছে।

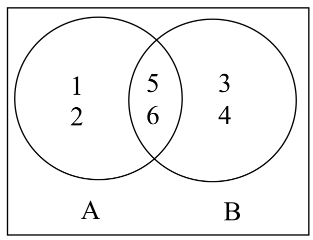
নিজে করুন

বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের নওয়াপাড়া শঙ্কর পাশা উচ্চ বিদ্যালয় টিউটোরিয়াল কেন্দ্রের ৪0 জন গণিত, 65 জন ইংরেজী এবং 55 জন ধর্ম অধ্যয়ন করে। 25 জন গণিত ও ইংরেজী উভয় বিষয়, 15 জন ধর্ম ও ইংরেজী উভয় বিষয় এবং 10 জন গণিত ও ধর্ম উভয় বিষয় অধ্যয়ন করে। 5 জন ছাত্র তিনটি বিষয়ই অধ্যয়ন করে। ভেনচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করুন কতজন ছাত্র কেবলমাত্র গণিত, কেবলমাত্র ইংরেজী এবং কেবলমাত্র ধর্ম অধ্যয়ন করে।

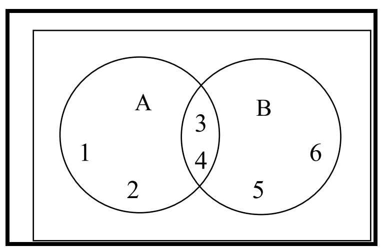
ভেনচিত্র : দলের ছেদ, সংযোগ ইত্যাদি প্রক্রিয়া এবং ইহাদের জন্য বলবৎ বিধিসমূহের জ্যামিতিক প্রতিরূপ দানের জন্য ভেনচিত্রের ব্যবহার করা হয়। দলের চিত্র হল দলগুলিকে বিভিন্ন অবস্থানের ও আকারের বৃত্তাকার বিন্দুসমূহের দলের সহিত একান্ত করে দেখা। উদাহরণ স্বরূপ -

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ও $B = \{3, 4, 5, 6\}$

তাহলে ভেনচিত্রের সাহায্যে $A \cup B$ ও $A \cap B$ কে নিম্নভাবে প্রকাশ করলে পাওয়া যায়:



$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$



$A \cap B = \{3,4\}$

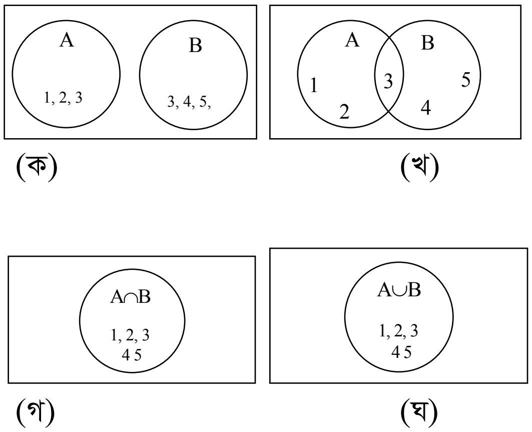
চিত্র ১.৪

নিজে করুন

A= {গরু, ছাগল, ভেড়া}, B = {ভেড়া, মহিষ, হরিণ} সেট দু'টিকে ভেনচিত্রের সাহয্যে $A \cap B$ ও $A \cup B$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়নঃ-৩

1. $A = \{1, 2,3\}$ ও $B = \{3, 4, 5\}$ কে ভেনচিত্রের সাহায্যে $A \cap B$ এর ক্ষেত্রে কোনটি সত্য?



চিত্র ১.৫

2. ভেনচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় নিচের কোনটি

   ক) সুদ-আসল   খ) চলিত নিয়ম

   গ) সেট   ঘ) বর্গমুল

3. সেটের সাহায্যে নিচের কোন সমস্যার সমাধান সম্ভব নয়?

   ক) ল.সা.গু   খ) গ.সা.গু

   গ) গড়   ঘ) গাণিতিক সমস্যা

পাঠ-৪ ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজ

উদ্দেশ্য

এ পাঠে শেষে আপনি-

- ক্রমজোড় সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- কার্টেসীয় গুণজ সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- ক্রমজোড় ও কার্টেসীয় গুণজ এর ব্যবহারের বিভিন্ন দিক বর্ণনা করতে পারবেন।

ক্রমজোড় ও কার্টেসীয় গুণজ বর্তমানে আধুনিক গণিতের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। এ পাঠে ক্রমজোড় ও কার্টেসীয় গুণজ সম্পর্কে আলোচনা করা হলো।

ক্রমজোড়

a, b যে কোন বস্তু হলে ক্রমজোড় বলতে প্রদর্শিত ক্রমে বিন্যস্ত জোড় a,b কে বুঝায়। অতএব $a\neq b$ হলে ক্রমজোড় হিসাবে (a,b) এবং (b,a) ভিন্ন। সাধারণভাবে ক্রমজোড়ের জন্য সমতার সংজ্ঞা নিম্নরূপ।

$(a,b) = (c, d)$ যদি $a = c$ এবং $b = d$ হয়।

a ও b কে ক্রমজোড় (a,b) এর যথাক্রমে প্রথম অংশক ও দ্বিতীয় অংশক বলা হয়।

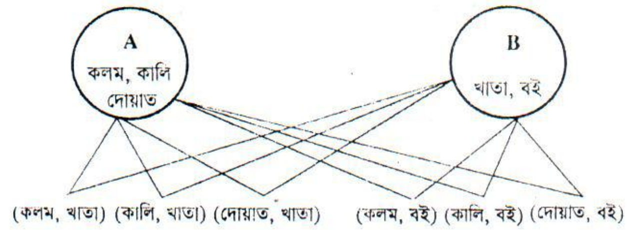
***a, b* যে কোন বস্তু হলে *a* কে প্রথম উপাদান ও *b* কে দ্বিতীয় উপাদান ধরে বিন্যস্ত জোড় *(a,b)* কে ক্রমজোড় বলে।**

কার্টেসীয় গুণজ

দুটি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সম্ভাব্য সকল সজ্জিত সংখ্যা জোড়ের সেটকে উক্ত সেট দুটির কার্টেসীয় গুণজ বলে। সজ্জিত জোড়ার প্রথম সদস্য অবশ্যই প্রথম সেট হতে এবং দ্বিতীয় সদস্য অবশ্যই দ্বিতীয় সেট হতে নিতে হবে। A ও B সেট হলে A থেকে প্রথম উপাদান ও B থেকে দ্বিতীয় উপাদান নিয়ে গঠিত সকল ক্রমজোড়ের সেটকে A ও B এর কার্টেসীয় গুণজ $A*B$ বলা হয়।

$A\infty B = \{(a,b)|a\in A$ এবং $b\in B\}$

উদাহরণ স্বরূপ : A = {কলম, কালি, দোয়াত}, B = {খাতা, বই} দু'টি সেট। A ও B সেট এর উপাদান নিয়ে সম্ভাব্য সকল ক্রমজোড় তৈরি করুন যেন প্রতিটি জোড়ে প্রথম সদস্যটি A সেটের এবং দ্বিতীয় সদস্যটি B সেটের হয়। অর্থাৎ



চিত্র ১.৬

$\Rightarrow$ (কলম, খাতা); (কালি, খাতা); (দোয়াত, খাতা); (কলম, বই); (কালি, বই); (দোয়াত, বই)

$\therefore$ অতএব, সজ্জিত জোড়াগুলি নিয়ে গঠিত সেটকে A ও B সেটের কার্টেসীয় গুণজ বলে। যাকে প্রকাশ করা হয় $A*B$

এখন, $A*B$ = {(কলম, খাতা); (কালি, খাতা); (দোয়াত, খাতা); (কলম, বই); (কালি, বই); (দোয়াত, বই)}

যদি সেট $A = \{x \& x \in A\}$ এবং $B = \{y \& y \in B\}$ হয়

তবে $A*B = \{(x,y) \mid (x,y) \in A*B,\ x \in A$ এবং $y \in B\}$

দুটি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সম্ভাব্য সকল সজ্জিত সংখ্যা জোড়ের সেটকে উক্ত সেট দুইটির কার্টেসীয় গুণজ বলে।

নিজে করুন ৪

A = {হাতি, ঘোড়া}; B = {বাঘ, সিংহ} হয়

তবে কার্টেসীয় গুনজ $A*B$ = কত?

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪

1. (a,b) ক্রমজোড় হলে "a" কে বলা হয়

   ক. গড়   খ. প্রথম অংশক

   গ. দ্বিতীয় অংশক   ঘ. সমানুপাত

2. (a,b) ক্রম জোড় হলে "b" কে (বলা হয়

   ক. প্রথম অংশক   খ. সমানুপাত

   গ. দ্বিতীয় অংশক   ঘ. গুণানুপাত

3. যদি ক্রম জোড় $(a,b) = (c,d)$ হয়

   ক. $a{=}d$ এবং $c{=}b$ খ. $a{=}c$ এবং $b{=}d$

   গ. $a{=}d$ এবং $c \neq b$ ঘ. $a \neq c$ এবং $b \neq d$

4. $A = (a,b)$ এবং $B = (c,d)$ হলে কার্টেসীয় গুণজ $A \mathrm{X} B$ সমান

   ক. $(a,c), (a,d), (b,c)$ এবং (b,d) খ. $(a,c), (b,d)$

   গ. (a,c) এবং (b,d) ঘ. (a,d) এবং (b,c)

নিজে করুন

1. (r,s) ক্রমজোড় হলে প্রথম ও দ্বিতীয় অংশক নির্ণয় করুন।
2. $(p,q) = (r,s)$ হলে তবে ক্রমজোড় পদ্ধতিতে উপাদানগুলির সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. সেটের সংজ্ঞা লিখুন। ছেদ ও সংযোগ সেটের উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন?
2. নিম্নলিখিত সেটগুলি নির্ণয় করুন

   i) $\{x \in N \& x^2 > 10$ এবং $x^3 < 100\}$ ii) $\{x \in Z \& x^2 < 13\}$

   iii) $\{x \in N \& x^2 < 17\}$ iv) $\{x \in Q \& x < 10$ এবং x এর লঘিষ্ঠ আকারের লব ও হর প্রত্যেককে $< 4\}$
3. সেট কে কি কি উপায়ে প্রকাশ করা যায় উদাহরণসহ লিখুন।
4. উদাহরণসহ সংজ্ঞা লিখুন:

   ক) সসীম ও অসীম সেট খ) ফাঁকা ও শূন্য সেট

   গ) সংযোগ ও ছেদ সেট ঘ) ক্রমজোড় ও কার্টেসীয় গুণজ

   ঙ) সার্বিক ও সমতুল সেট
5. যদি $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 5\}$ এবং $C = \{2, 3, 4, 5\}$ হয় তবে নিম্নলিখিত সেটগুলিকে ভেনচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

   (i) $A \cup B$ (ii) $B \cup C$

   (iii) $C \cap A$ (iv) $B \cap C$ (v) $A \cap B \cap C$
6. যদি $A = \{x, y, z, p\}$, $B = \{p, q, r\}$ এবং $C = \{x, p, q\}$ হয় তবে নির্ণয় করুন

   (i) $A \cap B$ (ii) $A \cup B$

   (iii) $A \cap C$ (iv) $B \cap C$ (v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cap B \cap C$
7. যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ হয় তবে প্রমাণ করুন

   (i) $A \cap B = B \cap A$ (ii) $A \cup B = B \cup A$