ইউনিট ৩

বীজগণিতীয় সহজ সূত্রাবলির পুনরালোচনা ও সমস্যাবলি

ভূমিকা

বীজগণিতকে পাটীগণিতের সর্বায়ন (generalized) রূপ বলা হয়। পাটীগণিতের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান সাধারণত কোন নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা দ্বারা যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রভৃতি করে সম্পন্ন করা হয়। কিন্তু বীজগণিতে নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা ছাড়াও $a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ প্রভৃতি ইংরেজি ও গ্রিক বর্ণমালার অক্ষরসমূহ অনির্দিষ্ট সংখ্যামানের প্রতীক হিসেবে ব্যবহৃত হয়। বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যে কোন সাধারণ নিয়ম বীজগণিতীয় সূত্র নামে পরিচিত। বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকার বীজগণিতীয় গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা হয়। আপনারা ইতোমধ্যে বীজগণিতীয় সূত্র সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা পেয়েছেন। এই ইউনিটে উক্ত সূত্রাবলির পুনরালোচনা ও কিছু সমস্যাবলি সমাধানে সূত্রের ব্যবহার সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

ইউনিট শেষে আপনি–

- বীজগণিতের সহজ ও প্রধান সূত্রাবলি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সূত্রাবলির সাহায্যে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক সমস্যা সমাধানে সূত্রাবলি প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ সূত্র ১ ও সূত্র ২

উদ্দেশ্যে

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বীজগণিতীয় দুইটি প্রধান সূত্র সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- সূত্রের সাহায্যে বীজগণিতীয় সমস্যার সমাধান করতে পারবেন;
- গাণিতিক সমস্যা সমাধানে সূত্র দুইটির ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

সূত্র ১ : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

সূত্র ২ : $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

সূত্র ১ ও সূত্র ২ কে আমরা বর্ণনার সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করতে পারি। লক্ষ করুন সূত্র দুইটিতে a ও b দুইটি রাশি।

সূত্র ১ : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ = প্রথম রাশির বর্গ + রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ + দ্বিতীয় রাশির বর্গ।

সূত্রটিকে নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা যায় :

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

সূত্র ২ : $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ = প্রথম রাশির বর্গ − রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ + দ্বিতীয় রাশির বর্গ।

সূত্রটিকে নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা যায়

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

এখানে লক্ষণীয় যে যোগ ও বিয়োগফলের ক্ষেত্রে পূর্বের রাশিকে পরে ও পরের রাশিকে পূর্বে আনলে সূত্রের কোন পরিবর্তন হয় না।

যেহেতু সূত্র ১ ও সূত্র ২ দুইটি রাশির যোগফল ও বিয়োগফলের বর্গ, অতএব আসুন আমরা সূত্র দুইটির সাহায্যে বর্গ নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

উদাহরণ : $3x + 2y$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$3x+2y$ এর বর্গ

$=(3x+2y)^2$

এখানে লক্ষ করলে দেখা যায় দুইটি রাশি আছে। রাশি দুটির একটি $3x$ এবং অপরটি $2y$। রাশি দুটির মাঝখানে কি চিহ্ন দেওয়া আছে? রাশি দুইটির মাঝে যোগ (+) চিহ্ন দেওয়া আছে। তাহলে আপনারা বুঝতে পারছেন দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ নির্ণয় করতে হবে এবং নিশ্চয় বুঝতে পারছেন দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ নির্ণয় করতে

হলে সূত্র ১ ব্যবহার করতে হবে, অর্থাৎ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ সূত্র ব্যবহার করতে হবে। এখন $3x$ এর স্থলে a এবং $2y$ এর স্থলে b কল্পনা করে সমস্যাটির সমাধান করলে পাই–

$$\begin{aligned}(3x+2y)^2 &= (3x)^2 + 2.3x.2y + (2y)^2\\ &= 3^2x^2 + 2.3.2.xy + 2^2y^2\\ &= 9x^2 + 12xy + 4y^2\end{aligned}$$

এখন আসুন আমরা উদাহরণের মাধ্যমে কয়েকটি সমস্যার সমাধান করি। a ও b এর স্থলে যে কোন রাশিই থাকুক না কেন উপরোক্ত সমস্যার সমাধানের মত সব সমস্যা সমাধানে সচেষ্ট হব।

উদাহরণ 1 : $3a + 4b$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $3a + 4b$ এর বর্গ

$$\begin{aligned}&= (3a+4b)^2\\ &= (3a)^2 + 2.3a.4b + (4b)^2\\ &= 9a^2 + 24ab + 16b^2\end{aligned}$$

বীজগণিতের এই জাতীয় দুইটি রাশির গুণফলের সময় শুধুমাত্র রাশিটির শক্তিসমূহের যোগ করতে হয়। যেমন– $a.a = a^1a^1 = a^{1+1} = a^2$

$$a.a^2 = a^1a^2 = a^{1+2} = a^3$$

উদাহরণ 2 : $3ax + 4ay$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $3ax + 4ay$ এর বর্গ

$$\begin{aligned}&= (3ax + 4ay)^2\\ &= (3ax)^2 + 2.3ax.4ay + (4ay)^2\\ &= 3^2a^2x^2 + 24a.axy + 4^2a^2y^2\\ &= 9a^2x^2 + 24a^2xy + 16a^2y^2\end{aligned}$$

উদাহরণ 3 : $x^2 + \frac{2}{x^2}$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $x^2 + \frac{2}{x^2}$ এর বর্গ

$$\begin{aligned}&= \left(x^2 + \frac{2}{x^2}\right)^2\\ &= (x^2)^2 + 2.x^2.\frac{2}{x^2} + \left(\frac{2}{x^2}\right)^2\\ &= (x^2)^2 + 4 + \frac{2^2}{(x^2)^2}\\ &= x^4 + 4 + \frac{4}{x^4}\\ &= x^4 + \frac{4}{x^4} + 4\end{aligned}$$

লক্ষণীয় বিষয় : বীজগণিতীয় রাশির যদি শক্তির শক্তি দেওয়া থাকে তাহলে শক্তিসমূহ গুণ করতে হয়। যেমন, $(x^2)^2 = x^{2.2} = x^4$, $(x^2)^3 = x^{2.3} = x^6$, $(x^4)^2 = x^{4.2} = x^8$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 4 : $2x - 3y$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান ও ব্যাখ্যা :

$2x - 3y$ এর বর্গ

$= (2x - 3y)^2$

এখানে লক্ষ করলে দেখা যায় দুইটি রাশি আছে। রাশি দুইটির একটি $2x$ এবং অপরটি $3y$। রাশি দুইটির মাঝখানে কি চিহ্ন দেওয়া আছে? রাশি দুইটির মাঝখানে বিয়োগ (−) চিহ্ন দেওয়া আছে। তাহলে আপনারা বুঝতে পারছেন দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ নির্ণয় করতে হবে এবং নিশ্চয় বুঝতে পারছেন দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ নির্ণয় করতে হলে সূত্র ২ অর্থাৎ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে। এখন $2x$ এর স্থলে a এবং $2y$ এর স্থলে b কল্পনা করে সমস্যাটির সমাধান করলে পাই−

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2.2x.3y + (3y)^2$$
$$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

উদাহরণ 5 : $4x^2 - 5y^3$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $4x^2 - 5y^3$ এর বর্গ

$$= (4x^2 - 5y^3)^2$$
$$= (4x^2)^2 - 2.4x^2.5y^3 + (5y^3)^2$$
$$= 16x^4 - 40x^2y^3 + 25y^6$$

তিনটি রাশির বর্গ নির্ণয়

এখন যদি দুইটি রাশির স্থানে তিনটি রাশি থাকে তাহলে তাদেরও বর্গ নির্ণয় করা যাবে। ধরুন $a+b+c$ এর বর্গ নির্ণয় করতে হবে।

$a+b+c$ এর বর্গ

$= (a+b+c)^2$

এখানে লক্ষণীয় যে এখানে তিনটি রাশি আছে। কিন্তু পূর্বে আমরা দুইটি রাশির বর্গ নির্ণয় করতে শিখেছি। যদি আমরা $a+b$ কে একটি রাশিরূপে কল্পনা করি তাহলে আমরা পাই−

$(a+b+c)^2$

$= \{(a+b) + c\}^2$

এখন $a+b$ কে একটি রাশি এবং c কে অপর রাশি ধরলে দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ পাই এবং সূত্র ১ এর সাহায্যে সহজেই সমস্যাটির সমাধান করতে পারি। অর্থাৎ

$\{(a+b) + c\}^2$

$= (a+b)^2 + 2.(a+b).c + (c)^2$

আবার এখানে লক্ষ করলে দেখতে পাবেন $(a+b)^2$ দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ এবং $(a+b).c$ অর্থাৎ a এর সাথে c গুণ করতে হবে, b এর সাথেও c গুণ করতে হবে। অতএব,

$(a+b)^2 + 2.(a+b).c + (c)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(ac+bc) + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$

এখন আমরা কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে তিনটি রাশির বর্গ নির্ণয় করতে চেষ্টা করবো।

উদাহরণ 6 : $3x + 2y + 3z$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $3x + 2y + 3z$ এর বর্গ

$= (3x+2y+3z)^2$

$= \{(3x+2y) + 3z\}^2$

$= (3x+2y)^2 + 2(3x+2y).3z + (3z)^2$

$= (3x)^2 + 2.3x.2y + (2y)^2 + 2(9xz + 6yz) + 9z^2$

$= 9x^2 + 12xy + 4y^2 + 18xz + 12yz + 9z^2$

$= 9x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12xy + 12yz + 18zx$

উদাহরণ 7 : $x + 2y - 3z$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $x + 2y - 3z$ এর বর্গ

$= (x+2y-3z)^2$

$= \{(x+2y) - 3z\}^2$

$= (x+2y)^2 - 2(x+2y).3z + (3z)^2$ [$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ সূত্র প্রয়োগ করে]

$= x^2 + 2.x.2y + (2y)^2 - 2(3xz + 6yz) + 9z^2$

$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 6xz - 12yz + 9z^2$

$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 12yz - 6zx$

বন্ধনীর পূর্বে যে চিহ্ন থাকে বন্ধনীর ভিতরের সকল চিহ্নকে গুণের সময় সেই চিহ্ন দিয়ে গুণ করতে হয়।

অনুশীলনী ৩.১

সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় করুন :

1. $2x + 3y$
2. $ay + 3bx$
3. $x + \frac{1}{x}$
4. $x^2y - xy^2$
5. $p^2 - 2q^2$
6. $2x + 3y + 4z$
7. $3x - 2y - 4z$
8. $a-b+c-d$.

পাঠ ২ সূত্র ৩ ও সূত্র ৪

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বীজগণিতের দুইটি প্রধান সূত্র ব্যবহার করে বীজগণিতের অন্যান্য সূত্র সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- বিভিন্ন প্রকার সমস্যা সমাধানে বীজগণিতের সূত্রাবলি ব্যবহারের দক্ষতা অর্জন করবেন।

সূত্র ৩ : $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$

সূত্র ৪ : $a^2+b^2 = (a-b)^2+2ab$

সূত্র ৩ : $a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$

সূত্র ১ হতে আপনারা জানেন

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

অর্থাৎ $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ [পক্ষান্তর করে]

এখন সমান চিহ্নের বামদিক ও ডানদিক উভয় দিকেই $2ab$ বিয়োগ করলে আমরা পাই–

$a^2+2ab+b^2 - 2ab = (a+b)^2 - 2ab$

অর্থাৎ $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

সূত্র ৪ : $a^2+b^2 = (a - b)^2+2ab$

সূত্র ২ হতে আপনারা জানেন

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

অর্থাৎ $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$ [পক্ষান্তর করে]

এখন সমান চিহ্নের বামদিক ও ডানদিক উভয় দিকেই $2ab$ যোগ করলে আমরা পাই–

$a^2-2ab+b^2 +2ab = (a - b)^2 + 2ab$

অর্থাৎ $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

উপরোক্ত সূত্রদ্বয়ে a এবং b এর পরিবর্তে যে কোন রাশি থাকলে একই ফলাফল হবে।

যেমন $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$

এখন সূত্র দুইটি ব্যবহার করে আমরা কিছু সমস্যার সমাধান করবো।

উদাহরণ 1 : $a+b=7$ এবং $ab = 10$ হলে a^2+b^2 এর মান কত?

সমাধান ও ব্যাখ্যা :

কোন রাশিমালার মান নির্ণয় করতে হলে কোন সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে তা নির্ভর করে যে সমস্ত মান দেওয়া আছে তার উপর। এখানে লক্ষ করলে দেখতে পাবেন a^2+b^2 এর মান নির্ণয় করার জন্য $(a+b)$ এবং ab এর মান দেওয়া আছে। আপনারা নিশ্চয় বুঝতে পারছেন a^2+b^2 এর মান নির্ণয় করতে হলে সূত্র ৩ অর্থাৎ

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে।

$$\begin{aligned}
\therefore a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\
&= (7)^2 - 2.10 \\
&= 49 - 20 \\
&= 29
\end{aligned}$$

উদাহরণ 2 : $a-b=7$ এবং $ab = 10$ হলে a^2+b^2 এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ও ব্যাখ্যা :

এখানে লক্ষ করলে দেখতে পাবেন a^2+b^2 এর মান নির্ণয় করার জন্য $(a-b)$ এবং ab এর মান দেওয়া আছে। তাহলে স্পষ্ট বুঝা যায় a^2+b^2 এর মান নির্ণয়ের জন্য সূত্র ৪ অর্থাৎ $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে।

$$\begin{aligned}
\therefore a^2+b^2 &= (a-b)^2 + 2ab \\
&= (7)^2 + 2.10 \\
&= 49 + 20 \\
&= 69
\end{aligned}$$

উদাহরণ 3 : $a+b = m$ এবং $ab=n$ হলে a^2+b^2 এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি, $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$$\begin{aligned}
&= (m)^2 - 2.n \\
&= m^2 - 2n
\end{aligned}$$

উদাহরণ 4 : $m + \frac{1}{m} = 4$ হলে, $m^2 + \frac{1}{m^2}$ এর মান কত?

সমাধান : $m^2 + \frac{1}{m^2}$

$$\begin{aligned}
&= (m)^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 \\
&= \left(m + \frac{1}{m}\right)^2 - 2.m.\frac{1}{m} \\
&= \left(m + \frac{1}{m}\right)^2 - 2 \\
&= (4)^2 - 2 \\
&= 16 - 2 \\
&= 14
\end{aligned}$$

উদাহরণ 5 : $m - \frac{1}{m} = 2$ হলে, $m^4 + \frac{1}{m^4}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $m^4 + \frac{1}{m^4}$

$$= (m^2)^2 + \left(\frac{1}{m^2}\right)^2$$

$$= \left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right)^2 - 2.m^2.\frac{1}{m^2}$$

$$= \left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right)^2 - 2$$

$$= \left\{(m)^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2\right\}^2 - 2$$

$$= \left\{\left(m - \frac{1}{m}\right)^2 + 2.m.\frac{1}{m}\right\}^2 - 2$$

$$= \left\{\left(m - \frac{1}{m}\right)^2 + 2\right\}^2 - 2$$

$$= \{(2)^2 + 2\}^2 - 2$$

$$= (4+2)^2 - 2$$

$$= (6)^2 - 2$$

$$= 36 - 2$$

$$= 34$$

বর্গসূত্রের সম্প্রসারণ

আমরা জানি $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$= (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)$$

এখন উভয় পক্ষের বিভিন্ন রাশির পক্ষান্তর করলে আমরা পাই,

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$$

অনুসিদ্ধান্ত এবং $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

উপরোক্ত অনুসিদ্ধান্ত প্রয়োগ করে আমরা বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারি।

উদাহরণ 6 : $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2 = 25$ হলে, $ab+bc+ca$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : পূর্ববর্তী অনুসিদ্ধান্ত হতে আমরা পাই,

$$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

এখন মান বসিয়ে আমরা পাই,

$2(ab+bc+ca) = (7)^2 - 25$

বা, $2(ab+bc+ca) = 49 - 25$

বা, $2(ab+bc+ca) = 24$

বা, $ab+bc+ca = \frac{24}{2}$ [বজ্রগুণন পদ্ধতিতে]

$\therefore ab+bc+ca = 12$

উদাহরণ 7 : $a+b+c = 10$ এবং $a^2+b^2+c^2 = 38$ হলে, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ এর মান কত?

সমাধান : $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

$= a^2-2ab+b^2 + b^2-2bc+c^2 + c^2-2ca+a^2$

$= 2a^2+2b^2+2c^2 - 2ab-2bc-2ca$

$= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca$

$= 3(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$

এখানে লক্ষণীয় যে প্রদত্ত মান অনুসারে রাশিমালাকে সূত্রে রূপান্তরিত করে নিতে হবে।

$= 3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2$

$= 3.38 - (10)^2$

$= 114 - 100$

$= 14$

উদাহরণ 8 : যদি $x + \frac{1}{x} = 4$ হয়, তবে $\frac{x}{x^2 - 3x + 1}$ এর মান কত?

সমাধান : এখানে $x \neq 0$ এবং $x + \frac{1}{x} = 4$

বা, $\frac{x^2+1}{x} = 4$

বা, $x^2 + 1 = 4x$

এখন, $\frac{x}{x^2-3x+1}$

$= \frac{x}{x^2+1-3x}$

$= \frac{x}{4x - 3x}$ [$\because x^2+1 = 4x$ এবং $x \neq 0$]

$= \frac{x}{x}$

$= 1$

অনুশীলনী ৩.২

1. $a+b = 12$ এবং $ab = 35$ হলে, a^2+b^2 এর মান কত?
2. $a + b = 15$ এবং $ab = 40$ হলে, a^2+b^2 এর মান কত?
3. $p - q = 3$ এবং $pq = 63$ হলে, p^2+q^2 এর মান কত?
4. $x-y=p$ এবং $xy = q$ হলে, x^2+y^2 এর মান নির্ণয় করুন।
5. $x + \frac{1}{x} = 6$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?
6. $x + \frac{1}{x} = 5$ হলে, $\frac{x}{x^2+x+1}$ এর মান নির্ণয় করুন।
7. $a+b+c=9,\ a^2+b^2+c^2 = 29$ হলে, $ab+bc+ca$ এর মান কত?
8. $x + \frac{1}{x} = 2$ হলে, $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় করুন।
9. $p = 3 + \frac{1}{p}$ হলে, দেখান যে, $p4 = 119 - \frac{1}{p4}$
10. $x+y+z = 15$ হলে, $xy+yz+zx=71$ হলে, $x^2+y^2+z^2$ এর মান কত?
11. $x+y+z = p$ এবং $xy+yz+zx = q$ হলে, $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ এর মান কত? $p=2,\ q=1$ হলে, উক্ত মান কত হবে?
12. $x - \frac{1}{x} = \sqrt{2}$ হলে, $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান কত?

পাঠ ৩ সূত্র ৫, সূত্র ৬ এবং সূত্র ৭

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বীজগণিতের তিনটি প্রধান সূত্র সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- গাণিতিক সমস্যার সমাধানে সূত্র তিনটির ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সূত্র ৫ : $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

সূত্র ৬ : $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

সূত্র ৭ : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

সূত্র ৫ : $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

সূত্র ১ হতে আমরা জানি,

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

বা, $(a+b)^2 = a^2+2ab+2ab-2ab+b^2$

বা, $(a+b)^2 = a^2+4ab-2ab+b^2$

বা, $(a+b)^2 = a^2-2ab+b^2+4ab$

বা, $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

লক্ষ করলে দেখতে পাবেন দ্বিতীয় লাইনে সমান (=) চিহ্নের ডানদিকে $2ab$ একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করা হয়েছে। এর ফলে সূত্র ১-এর মানের কোন পরিবর্তন হয়নি। শেষ লাইনে সূত্র ২ অর্থাৎ $(a-b)^2 = (a^2-2ab+b^2)$ ব্যবহার করা হয়েছে।

সূত্র ৬ : $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

সূত্র ২ হতে আমরা জানি,

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

বা, $(a-b)^2 = a^2-2ab-2ab+2ab+b^2$

বা, $(a-b)^2 = a^2-4ab+2ab+b^2$

বা, $(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2-4ab$

বা, $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

লক্ষ করলে দেখতে পাবেন দ্বিতীয় লাইনে সমান (=) চিহ্নের ডানদিকে $2ab$ একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করা হয়েছে। এর ফলে সূত্র ২-এর মানের কোন পরিবর্তন হয়নি। শেষ লাইনে সূত্র ১ অর্থাৎ $(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)$ ব্যবহার করা হয়েছে।

উপরোক্ত সূত্র দুইটি ব্যবহার করে আমরা এখন বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে চেষ্টা করবো।

উদাহরণ 1 : $x-y = 2$ এবং $xy = 3$, হলে $x+y$ এর মান কত?

সমাধান : $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ সূত্রটি ব্যবহার করে $x+y$ এর মান বাহির করা যায়। a এর স্থলে x এবং b এর স্থলে y কল্পনা করলে আমরা পাই,

$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$

$= (2)^2 + 4.3$ [মান বসিয়ে]

$= 4 + 12$

$= 16$

$\therefore x+y = \pm\sqrt{16}$

$= \pm 4$

কোন সংখ্যার বর্গমূল করতে হলে সংখ্যাটির পূর্বে ± চিহ্ন ব্যবহার করতে হয়।

উদাহরণ 2 : $a+b = 8$ এবং $ab= 15$ হলে, $a-b$ এর মান কত?

সমাধান : সূত্র ৬ হতে আমরা পাই,

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$= (8)^2 - 4.15$ [মান বসিয়ে]

$= 64-60$

$= 4$

$\therefore a-b = \pm\sqrt{4}$

$= \pm 2$

সূত্র ৭ : $\boldsymbol{a^2-b^2 = (a+b)(a-b)}$

$(a+b)$ এবং $(a-b)$ গুণ করলে আমরা সূত্র ৭ এর প্রমাণ পাই।

$(a+b)(a-b)$

$= a(a-b) + b(a-b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

অর্থাৎ $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

উদাহরণ- 3 : $a-b = 6$ এবং $ab = 40$ হলে, a^2-b^2 এর মান কত?

সমাধান : আমরা জানি,

$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

এখানে লক্ষ করুন $a-b$ এর মান দেয়া আছে, কিন্তু $a+b$ এর কোন মান দেওয়া নাই। তাহলে সূত্রের সাহায্য নিয়ে $a+b$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সূত্র ৫ হতে আমরা জানি,

$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

$= (6)^2 + 4.40$

$= 36 + 160$

$= 196$

$\therefore a+b = \pm\sqrt{196}$

$= \pm 14$

$\therefore a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

$= (\pm 14)(6)$

$= \pm 84$

সূত্র ১ এবং সূত্র ২ ব্যবহার করে আমরা আরও দুইটি সূত্র পাই। সূত্র দুইটি নিম্নরূপ :

অনুসিদ্ধান্ত

$$a^2+b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

অনুসিদ্ধান্ত ১ : $a^2+b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$

সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে আমরা পাই–

সূত্র ১ : $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$

সূত্র ২ : $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$

যোগ করে $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2+(a-b)^2$

বা, $2(a^2+b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$

বা, $a^2+b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$

অর্থাৎ, $a^2+b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$

অনুসিদ্ধান্ত ২ : ab কে দুটি বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ করুন।

সমাধান : সূত্র ১ ও সূত্র ২ হতে আমরা পাই

সূত্র ১ : $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$

সূত্র ২ : $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$

$\quad - \quad + \quad - \quad -$

বিয়োগ করে $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

বা, $ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$

বা, $ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$

বা, $ab = \frac{(a+b)^2}{(2)^2} - \frac{(a-b)^2}{(2)^2}$

বা, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$\therefore ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

এখন উপরোক্ত সূত্র দুইটি ব্যবহার করে আমরা বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে চেষ্টা করবো।

উদাহরণ 4 : $a+b = 8, a-b=2$ হলে, a^2+b^2 এবং ab এর মান কত?

সমাধান : আমরা জানি, $a^2+b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$

এখানে লক্ষ করুন a^2-b^2 এর মান নির্ণয় করতে হলে $(a+b)^2$ এবং $(a-b)^2$ এর মান জানা প্রয়োজন। প্রদত্ত সমস্যাতে $a+b$ এবং $a-b$ এর মান দেওয়া আছে। তাহলে প্রদত্ত মান a^2+b^2 সূত্রে বসিয়ে আমরা পাই–

$a^2+b^2 = \frac{1}{2}\{(8)^2 + (2)^2\}$

$= \frac{1}{2}(64+4)$

$= \frac{1}{2} * 68$

$= 34$

আবার, অনুসিদ্ধান্ত ২ হতে জানি,

$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

এখানেও লক্ষ করুন ab এর মান নির্ণয় করতে হলে $a+b$ এবং $a-b$ এর মান জানা প্রয়োজন। প্রদত্ত সমস্যাতে উক্ত মান দুইটি দেয়া আছে।

$\therefore ab = \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$= (4)^2 - (1)^2$

$= 16 - 1$

$= 15$

উদাহরণ 5 : $a+b = 20, a-b = 4$ হলে, a^2+b^2 এবং ab এর মান কত?

সমাধান : আমরা জানি, $a^2+b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$

$= \frac{1}{2}\{(20)^2 + (4)^2\}$

$= \frac{1}{2}(400+16)$

$= \frac{1}{2} * 416$

$= 208$

আবার, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{20}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$

$= (10)^2 - (2)^2$

$= 100-4$

$= 96$

উদাহরণ 6 : $(x+6)\ (x+4)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করুন।

সমাধান : মনে করুন $x+6 = a$ এবং $x+4 = b$

এখন, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$\therefore (x+6)\ (x+4) = \left(\frac{x+6+x+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+6-x-4}{2}\right)^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \left(\frac{2x+10}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2$

$= \left\{\frac{2(x+5)}{2}\right\}^2 - (1)^2$

$= (x+5)^2 - (1)^2$

অনুশীলনী ৩.৩

1. $(a+b)^2 = 144$ এবং $(a-b)^2 = 4$ হলে, a^2+b^2 এবং ab এর মান কত?
2. $a-b=3,$ এবং $ab=108$ হলে, a^2-b^2 এর মান কত?
3. $x+y=8,\ xy=15$ হলে, $x-y$ এর মান কত?
4. $a+b=\sqrt{3}$ এবং $a-b=\sqrt{2}$ হলে, প্রমাণ করুন $8ab(a^2+b^2) = 5$
5. $a+b = 13$ এবং $ab = 40$ হলে, a^2+b^2 এবং $(a-b)^2$ এর মান নির্ণয় করুন।
6. দেখান যে, $\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\}^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2$
7. দুইটি বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ করুন :

   (i) 45, $(ii)\ (x+7)\ (x-9)$

পাঠ ৪ সূত্র ৮ ও সূত্র ৯

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বীজগণিতের দুইটি প্রধান সূত্র সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক সমস্যা সমাধানে সূত্র দুইটি ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সূত্র ৮ : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

সূত্র ৯ : $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

সূত্র ৮ : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

লক্ষ করুন সূত্রটিতে a ও b দুইটি রাশি। অতএব, উপরোক্ত সূত্রকে আমরা বর্ণনার মাধ্যমে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করতে পারি।

> *দুইটি রাশির যোগফলের ঘন = প্রথম রাশির ঘন + 3 * প্রথম রাশির বর্গ * দ্বিতীয় রাশি + 3 * প্রথম রাশি * দ্বিতীয় রাশির বর্গ + দ্বিতীয় রাশির ঘন।*

নিচে লক্ষ করুন :

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

বা, $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

বা, $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

বা, $a^3+b^3+3ab(a+b) = (a+b)^3$

বা, $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

অতএব, সূত্র ৮ কে আমরা নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করতে পারি।

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ ....(i)

এবং $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ ....(ii)

সূত্র ৯ : $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

লক্ষ করুন সূত্রটিতে a ও b দুইটি রাশি। অতএব, উপরোক্ত সূত্রটিকে আমরা বর্ণনার মাধ্যমে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করতে পারি।

দুইটি রাশির বিয়োগফলের ঘন = প্রথম রাশির ঘন– 3 * প্রথম রাশির বর্গ * দ্বিতীয় রাশি + 3 * প্রথম রাশি * দ্বিতীয় রাশির বর্গ – দ্বিতীয় রাশির ঘন।

নিম্নে লক্ষ করুন :

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

বা, $(a-b)^3 = a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

বা, $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

বা, $a^3-b^3-3ab(a-b) = (a-b)^3$

বা, $a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$

অতএব, সূত্র ৯ কে আমরা নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করতে পারি।

$(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$ ....*(iii)*

এবং $a^3-b^3 = (a-b)^3 +3ab(a-b)$ ....*(iv)*

সূত্র (*ii*) ও সূত্র (*iv*) আমরা মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ব্যবহার করবো।

উদাহরণ 1 : $a+2b$ এর ঘন নির্ণয় করুন।

সমাধান ও ব্যাখ্যা : $a+2b$ এর ঘন

$=(a+2b)^3$

লক্ষ করুন সমস্যাটিতে দুইটি রাশি আছে। প্রথম রাশি a এবং দ্বিতীয় রাশি $2b$। তাহলে আপনারা বুঝতে পারছেন দুইটি রাশির যোগফলের ঘন নির্ণয় করতে হবে। দুইটি রাশির যোগফলের ঘন নির্ণয়ের সূত্র $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ প্রয়োগ করে পাই–

$$(a+2b)^3= (a)^3 + 3.(a)^2.2b+3.a.(2b)^2+(2b)^3$$
$$= a^3 + 3a^2.2b+3.a.4b^2 + 8b^3$$
$$= a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$$

উদাহরণ 2 : $3x-4y$ এর ঘন নির্ণয় করুন।

সমাধান ও ব্যাখ্যা : $3x-4y$ এর ঘন

$=(3x-4y)^3$

লক্ষ করুন সমস্যাটিতে দুইটি রাশি আছে। প্রথম রাশি $3x$ এবং দ্বিতীয় রাশি $4y$। তাহলে আপনারা বুঝতে পারছেন দুইটি রাশির বিয়োগফলের ঘন নির্ণয় করতে হবে। দুইটি রাশির বিয়োগফলের ঘন নির্ণয়ের সূত্র $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ প্রয়োগ করে পাই–

$$(3x-4y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2.4y+3.3x(4y)^2-(4y)^3$$
$$= 27x^3-3.9x^2.4y+9x.16y^2-64y^3$$
$$= 27x^3 - 108x^2y+144xy^2-64y^3$$

উদাহরণ 3 : $x+4a^2$ এর ঘন নির্ণয় করুন।

সমাধান ও ব্যাখ্যা : $x+4a^2$ এর ঘন

$$=(x+4a^2)^3$$

লক্ষ করুন সমস্যাটিতে দুইটি রাশি আছে। প্রথম রাশি x এবং দ্বিতীয় রাশি $4a^2$। তাহলে আপনারা বুঝতে পারছেন দুইটি রাশির যোগফলের ঘন নির্ণয় করতে হবে। দুইটি রাশির যোগফলের ঘন নির্ণয়ের সূত্র $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ প্রয়োগ করে পাই–

$$(x+4a^2)^3 = (x)^3 + 3(x)^2.4a^2+3.x(4a^2)^2+(4a^2)^3$$
$$= x^3 +3.x^2.4a^2+3.x.16a^4+64a^6$$
$$= x^3 +12a^2x^2+48a^4x+64a^6$$

উদাহরণ 4 : $2a–b–3c$ এর ঘন নির্ণয় করুন।

সমাধান : $2a–b–3c$ এর ঘন

$$= (2a–b–3c)^3$$
$$= \{(2a–b) – 3c\}^3$$
$$= (2a–b)^3–3.(2a–b)^2.3c+3(2a–b).(3c)^2–(3c)^3$$
$$= (2a)^3–3.\ (2a)^2.b+3.2a.(b)^2–(b)^3–3\{(2a)^2–2.2a.b+b^2\}\ .3c$$
$$+3(2a–b).9c^2–27c^3$$
$$=8a^3–3.4a^2.b+3.2a.b^2–b^3–3(4a^2–4ab+b^2).3c+27c^2(2a–b)–27c^3$$
$$= 8a^3–12a^2b+6ab^2–b^3–9c(4a^2–4ab+b^2)+54ac^2–27bc^2–27c^3$$
$$=8a^3–12a^2b+6ab^2–b^3–36a^2c+36abc–9b^2c+54ac^2–27bc^2–27c^3$$
$$=8a^3–b^3–27c^3–12a^2b–36a^2c+6ab^2+54ac^2–9b^2c–27bc^2+36abc$$

উদাহরণ 5 : $a+b = 3$ এবং $ab=2$ হলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে লক্ষ করুন $a+b$ এবং ab এর মান দেয়া আছে। অতএব a^3+b^3 এর মান নির্ণয় করতে হলে নিম্নলিখিত সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।

$$a^3+b^3 = (a+b)^3–3ab(a+b)$$

এখন মান বসিয়ে পাই–

$$a^3+b^3 = (3)^3–3.2.3$$
$$= 27 – 18$$
$$= 9$$

উদাহরণ 6 : $a–b = 2$ এবং $ab=80$ হলে, $a^3–b^3$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি,

$$a^3–b^3 = (a–b)^3+3ab(a–b)$$

এখন মান বসিয়ে পাই–

$$a^3- b^3 = (2)^3+3.80.2$$
$$= 8+480$$
$$= 488$$

উদাহরণ 7 : $m+\frac{1}{m}=a$ হলে, $m^3+\frac{1}{m^3}$ এর মান কত?

সমাধান : আমরা জানি

$$m^3+\frac{1}{m^3}$$
$$=\left(m+\frac{1}{m}\right)^3-3.m.\frac{1}{m}\left(m+\frac{1}{m}\right)$$
$$=\left(m+\frac{1}{m}\right)^3-3\left(m+\frac{1}{m}\right)$$
$$=(a)^3-3.a$$
$$=a^3-3a$$

উদাহরণ 8 : $x-y=7$ এবং $xy=15$ হলে, $(x^2+y^2)(x^3-y^3)$ এর মান কত?

সমাধান : আমরা জানি :

$x^2+y^2 = (x-y)^2+2xy$

$=(7)^2+2.15$

$= 49 + 30$

$= 79$

আবার, $x^3-y^3 = (x-y)^3+3xy(x-y)$

$= (7)^3+3.15.7$

$= 343+315$

$= 658$

এখন, $(x^2+y^2)(x^3-y^3)$

$= 79 * 658$

$= 51982$

উদাহরণ 9 : $a+b=c$ হলে দেখান যে, $a^3+b^3+3abc=c^3$

সমাধান : a^3+b^3+3abc

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+3abc$

$=(c)^3-3ab.c+3abc$

$=c^3-3abc+3abc$

$=c^3$

উদাহরণ 10 : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 3$ হলে, দেখান যে, $x^3+\frac{1}{x^3} = 0$

সমাধান : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 3$

$$\therefore \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore x+\frac{1}{x} = \sqrt{3}$$

এখন, $x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$= (\sqrt{3})^3 - 3.(\sqrt{3})$

$= (\sqrt{3})^2 .(\sqrt{3}) - 3\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

$= 0$

উদাহরণ 11 : যদি $a+b=m$, $a^2+b^2=n$ এবং $a^3+b^3=p^3$ হয়, তবে দেখান যে, $m^3+2p^3=3mn$

সমাধান : m^3+2p^3

$= (a+b)^3 + 2(a^3+b^3)$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+2a^3+2b^3$

$= 3a^3+3b^3+3a^2b+3ab^2$

$= 3(a^3+b^3+a^2b+ab^2)$

$= 3\{a^2(a+b)+b^2(a+b)\}$

$= 3(a+b)(a^2+b^2)$

$= 3mn$ [$\because a+b=m, a^2+b^2=n$]

অনুশীলনী ৩.৪

1. সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় করুন।
   (i) $a+3b$ *(ii)* $3-2a$ *(iii)* $2p^2-3r^2$ *(iv)* $x+y+z$ *(v)* $2m+3n-5p$ *(vi)* 997
2. $x+\frac{1}{x} = 3$ হলে, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান কত?
3. $a-\frac{1}{a} = 1$ হলে, $a^3-\frac{1}{a^3}$ এর মান কত?
4. $a^3-b^3 = 513$ এবং $a-b = 3$ হলে, ab এর মান কত?
5. $a+b=m$ এবং $ab=n$ হলে, a^3+b^3 এর মান কত?
6. $a+\frac{1}{a} = 2$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right) = 4$
7. $a = x+\frac{1}{x}$ এবং $b = x-\frac{1}{x}$ হলে, $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$ এর মান কত?
8. $x+y+z = 0$ হলে, প্রমাণ করুন, $x^3+y^3+z^3 = 3xyz.$
9. $a+b=m,\ a^2+b^2=n^2$ এবং $a^3+b^3=p^3$ হলে, দেখান যে $m^3+2p^3=3mn^2$

পাঠ ৫ সূত্র ১০ ও সূত্র ১১

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বীজগণিতের দুইটি প্রধান সূত্র সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- বিভিন্ন ধরনের গাণিতিক সমস্যা সমাধানে সূত্র দুইটি প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সূত্র ১০ : $(x+a)\ (x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

সূত্র ১১ : $(x+a)(x+b)(x+c)= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

সূত্র ১০ : $(x+a)\ (x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

এখানে $(x+a)$ ও $(x+b)$ দুইটি দ্বিপদী রাশি। এই দ্বিপদী রাশিগুলোর প্রথম পদগুলো একই কিন্তু দ্বিতীয় পদগুলো ভিন্ন। দ্বিপদী রাশি দুইটিকে গুণ করলে সূত্র ১০-এর প্রমাণ পাওয়া যায়।

প্রমাণ : $(x+a)\ (x+b)$

$= (x+a)x + (x+a)b$

$= x^2+ax+bx+ab$

$= x^2+(a+b)x+ab$

সূত্র ১০ কে বর্ণনার মাধ্যমে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

> ***দুইটি দ্বিপদী রাশির প্রথম পদ একই হলে তাদের গুণফল = প্রথম পদের বর্গ + প্রথম পদ * দ্বিতীয় পদদ্বয়ের যোগফল + দ্বিতীয় পদদ্বয়ের গুণফল।***

চিহ্ন পরিবর্তন সাপেক্ষে সূত্র ১০ এর মত আরও তিনটি সূত্র পাওয়া যায়। সূত্র তিনটি নিম্নরূপ :

অনুসিদ্ধান্ত ১ : $(x+a)(x-b) = x^2+(a-b)x-ab$

অনুসিদ্ধান্ত ২ : $(x-a)(x+b) = x^2-(a-b)x - ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৩ : $(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab$

উদাহরণ 1 : $(a+2)$ ও $(a+8)$ এর গুণফল কত?

সমাধান ও ব্যাখ্যা : লক্ষ করুন এখানে $(a+2)$ ও $(a+8)$ দুইটি দ্বিপদী রাশি। দ্বিপদী রাশি দুইটির প্রথম পদ একই অর্থাৎ a এবং দ্বিতীয় পদগুলি ভিন্ন অর্থাৎ 2 এবং 8। অতএব সূত্র ১০ অর্থাৎ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ সূত্রটি ব্যবহার করে আমরা সমস্যাটির সমাধান করতে পারি।

$(a+2)(a+8)$

$= (a)^2 + (2+8)a + 2.8$

$= a^2+10a+16$

উদাহরণ 2 : $(2x+3)$ ও $(2x-4)$ এর গুণফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : $(2x+3)(2x-4)$

$= (2x)^2+(3-4).2x-3 * 4$ [*অনুসিদ্ধান্ত : ১ ব্যবহার করে*]

$= 4x^2+(-1)2x-12$

$= 4x^2-2x-12$

উদাহরণ 3 : $(3x-4)$ এবং $(3x+8)$ এর গুণফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : $(3x-4)(3x+8)$

$= (3x)^2-(4-8).3x-4.8$ [*অনুসিদ্ধান্ত : ২ ব্যবহার করে*]

$= 9x^2-(-4).3x-32$

$= 9x^2+12x-32$

উদাহরণ 4 : $\left(m-\frac{5}{m}\right)$ ও $\left(m-\frac{1}{m}\right)$ এর গুণফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\left(m-\frac{5}{m}\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)$

$= (m)^2-\left(\frac{5}{m}+\frac{1}{m}\right).m+\frac{5}{m}\cdot\frac{1}{m}$ [অনুসিদ্ধান্ত : ৩ ব্যবহার করে]

$= m^2-\left(\frac{5+1}{m}\right).m+\frac{5}{m^2}$

$= m^2-\frac{6}{m}.m+\frac{5}{m^2}$

$= m^2-6+\frac{5}{m^2}$

$= m^2+\frac{5}{m^2}-$

সূত্র ১১ : $\boldsymbol{(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc}$

প্রমাণ : $(x+a)(x+b)(x+c)$

$= \{(x+a)(x+b)\}(x+c)$

$= \{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c)$

$= \{x^2.x+(a+b)x.x+abx+x^2.c+(a+b)x.c+ab.c$

$= x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(a+b)cx+abc$

$= x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc$

$= x^3+ax^2+bx^2+cx^2+abx+bcx+cax+abc$

$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

চিহ্ন পরিবর্তন সাপেক্ষে আমরা সূত্র ১১-এর মত আরও একটি সূত্র পাই। সূত্রটি নিম্নরূপ :

অনুসিদ্ধান্ত : $(x–a)(x–b)(x–c) = x^2–(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x–abc$

সূত্র ১০ এবং সূত্র ১১-এর অনুকরণকে অনুরূপ যে কোন সংখ্যক রাশির গুণফল নির্ণয় করা যায়। যেমন,

অনুসিদ্ধান্ত : $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+ bc+ bd+cd)x^2+$
$(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$

উদাহরণ 5 : $(x+2)(x+3)(x+4) =$ কত?

সমাধান : $(x+2)(x+3)(x+4)$

$= x^3+(2+3+4)x^2+(2.3+3.4+4.2)x+2.3.4$ [*সূত্র ১১ ব্যবহার করে*]

$= x^3+9x^2+(6+12+8)x+24$

$= x^3+9x^2+26x+24$

উদাহরণ 6 : $(x–2)(x–3)(x–4) =$ কত?

সমাধান : $(x–2)(x–3)(x–4)$

$= x^3–(2+3+4)x^2+(2.3+3.4+4.2)x–2.3.4$ [*অনুসিদ্ধান্ত ব্যবহার করে*]

$= x^3–9x^2+(6+12+8)x–24$

$= x^3–9x^2+26x–24$

অনুশীলনী ৩.৫

সূত্র ব্যবহার করে গুণফল নির্ণয় করুন।

1. $(x+6)(x+10)$
2. $(x+5)(x+15)$
3. $(2x+3)(2x+5)$
4. $(x+7)(x–8)$
5. $(x+5)(x–3)$
6. $(8+a)(8–2b)$
7. $(7x–4)(7x+5)$
8. $(5–x)(5–y)$
9. $(x+a)(x–b)(x–c)$
10. $(x+4)(x+5)(x+6)$
11. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$

পাঠ ৬ সূত্র ১২

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বীজগণেতের একটি বিশেষ ও প্রয়োজনীয় সূত্র সম্পর্কে জানতে ও বর্ণনা করতে পারবেন;
- বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক সমস্যা সমাধানে সূত্রটি প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সূত্র ১২ : $\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

সূত্র ১২ : $\boldsymbol{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$

লক্ষ করুন সূত্রটিতে তিনটি রাশি আছে। রাশি তিনটি a,b,c। সূত্র ৮ প্রয়োগ করে উপরোক্ত সূত্রটিকে আমরা সহজেই প্রমাণ করতে পারি। সূত্র ৮ হতে আমরা জানি $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

এখন আসুন আমরা সূত্র ১২ প্রমাণের চেষ্টা করি।

প্রমাণ : $a^3+b^3+c^3-3abc$

$= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$= \{(a+b)+c\}\ \{(a+b)^2-(a+b).c+c^2\}-3ab(a+b+c)$ $\quad [a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ ]$

$= (a+b+c)\ (a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)\ (a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$= (a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-3ab+2ab-bc-ca)$

$= (a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ....(i)

আবার, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\ .\ 2\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}\ (2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\ \{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\ \{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

অতএব, $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ .... (i)

$=\frac{1}{2}\ (a+b+c)\ \{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ ...(ii)

অর্থাৎ সূত্র ১২ কে *(i)* এবং *(ii)* এই দুইভাবেই প্রকাশ করা যায়।

ব্যাখ্যা : সূত্র ৮-এ আপনারা দুইটি রাশির ঘন নির্ণয় করার নিয়ম শিখেছেন। লক্ষ করুন সূত্র **১২** তিনটি রাশির ঘন। প্রথমে প্রথম দুইটি রাশির ঘন এর সমষ্টির সূত্র অর্থাৎ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a-b)$ ব্যবহার করা হয়েছে। তারপর ঘন নির্ণয়ের আরেকটি সূত্র $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ব্যবহার করা হয়েছে। পরবর্তীতে সম্পূর্ণ অংশ থেকে সাধারণ অংশটুকু আলাদা করা হয়েছে। সাধারণ অংশ এবং দ্বিতীয় অংশের একত্রিত রূপই সূত্র **১২**-এর প্রমাণ।

পরবর্তীতে দ্বিতীয় অংশটিকে অন্যভাবে দেখানো হয়েছে। প্রথমে $\frac{1}{2} * 2$ দ্বারা দ্বিতীয় অংশটিকে গুণ করা হয়েছে। পরবর্তীতে 2 দ্বারা ভিতরের অংশকে গুণ করে সূত্র ২ অর্থাৎ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ ব্যবহার করা হয়েছে। পরে সাধারণ অংশ এবং দ্বিতীয় অংশ একত্র করে **১২** নং সূত্র প্রমাণ করা হয়েছে।

এখন আসুন আমরা সূত্র **১২** প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধানের চেষ্টা করি।

উদাহরণ 1 : $a=330$, $b=334$, $c=336$ হলে $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\ \{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(330+334+336)\ \{(330-334)^2+(334-336)^2$$
$$+(336-330)^2\}$$
$$= \frac{1}{2} * 1000 * \{(-4)^2+(-2)^2+(6)^2\}$$
$$= 500\ (16+4+36)$$
$$= 500 * 56$$
$$= 28000$$

উদাহরণ 2 : $a+b+c=12$, $a^2+b^2+c^2=50$ এবং $abc=60$ হলে $a^3+b^3+c^3$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি,

$$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)$$
বা, $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$
$$= (12)^2 - 50$$
$$= 144 - 50$$
$$= 94$$
বা, $ab+bc+ca = \frac{94}{2}$

$\therefore ab+bc+ca = 47$

এখন, $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

বা, $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)\}+3abc$
$$= 12.(50-47) + 3.60$$
$$= 12.3 + 180$$
$$= 36 + 180$$
$$= 216$$

উদাহরণ 3 : $a^2+b^2+c^2 = 89$ এবং $ab+bc+ca = 68$ হলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান কত?

সমাধান : আমরা জানি,

$$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)$$
$$= 89+2.68$$
$$= 89 + 136$$
$$= 225$$
$$\therefore a+b+c = \pm 15$$

এখন, $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$

$$= (\pm 15) . (89-68)$$
$$= (\pm 15). 21$$
$$= \pm 315$$

উদাহরণ 4 : $x+3y+4z=0$ হলে, প্রমাণ করুন $x^3+27y^3+64z^3 = 36xyz$

সমাধান : $x^3+27y^3+64z^3-36xyz$

$$= (x)^3+(3y)^3+(4z)^3-3.x.3y.4z$$
$$= (x+3y+4z)\{(x)^2+(3y)^2+(4z)^2-x.3y-3y.4z-4z.x\}$$
$$= 0\ \{(x)^2+(3y)^2+(4z)^2-x.3y-3y.4z-4z.x\}$$
$$= 0$$

$\therefore x^3+27y^3+64z^3-36xyz=0$

$\therefore x^3+27y^3+64z^3 = 36xyz$

উদাহরণ 5 : $a=y+z-x,\ b=z+x-y,\ c=x+y-z$ হলে দেখান যে, $a^3+b^3+c^3-3abc=4(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

সমাধান : আমরা জানি,

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\ \{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(y+z-x+z+x-y+x+y-z)\ [\{(y+z-x)-(z+x-y)\}^2 + \{(z+x-y)-$$
$$(x+y-z)\}^2 + \{(x+y-z) - (y+z-x)\}^2]$$
$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\ \{(y+z-x-z-x+y)^2 + (z+x-y-x-y+z)^2$$
$$+ (x+y-z-y-z+x)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\ \{(2y-2x)^2 + (2z-2y)^2 + (2x-2z)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\ [4\{(y-x)^2 + (z-y)^2 + (x-z)^2\}]$$
$$= 4.\frac{1}{2}(x+y+z)\ \{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$
$$= 4\ (x^3+y^3+z^3 - 3xyz)$$

অনুশীলনী ৩.৬

1. $x=225, y=215$ এবং $z=204$ হলে, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান কত?
2. $a+b+c=6, a^2+b^2+c^2=30$ এবং $a^3+b^3+c^3=198$ হলে, abc এর মান নির্ণয় করুন।
3. $a+b+c=15, a^2+b^2+c^2=89$ হলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান নির্ণয় করুন।
4. $x^2+y^2+z^2=49, xy+yz+zx=36$ হলে, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান নির্ণয় করুন।
5. $x+y+z=20, x^2+y^2+z^2=60$ এবং $xyz=90$ হলে, $x^3+y^3+z^3$ এর মান নির্ণয় করুন।
6. $a+b+c=0$ হলে, প্রমাণ করুন $a^3+b^3+c^3=3abc$
7. $x+2y=3z$ হলে, প্রমাণ করুন $x^3+8y^3-27z^3+18xyz=0$
8. $a=p(x-y), b=q(y-z), c=r(z-x)$ হলে, প্রমাণ করুন
   $\frac{a^3}{p^3}+\frac{b^3}{q^3}+\frac{c^3}{r^3}=\frac{3abc}{pqr}, (pqr\neq 0)$
9. $a+b+c=3s$ হলে, প্রমাণ করুন $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$
10. $a+b+c=p, a^2+b^2+c^2=q^2$ এবং $abc=r^3$ হলে, $a^3+b^3+c^3$ এর মান p, q এবং r এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।