ইউনিট
৪

উৎপাদকে বিশেষণ

ভূমিকা

কোন রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হলে, শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক (factor) বলা হয়। কোন বীজগাণিতিক রাশিমালার সম্ভাব্য উৎপাদকগুলো নির্ণয় করে, তারপর লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফলরূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশেষণ করা বলা হয়। বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক সমস্যা বীজগণিতীয় সূত্রের সাহায্যে উৎপাদকে বিশেষণ করে সমাধান করা হয়। এই ইউনিটে আপনারা বীজগণিতের বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশেষণ করতে শিখবেন।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলের উৎপাদক নির্ণয় করতে পারবেন;
- দুইটি রাশির ঘন'র যোগফল ও বিয়োগফলের উৎপাদক নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন আকারের রাশির উৎপাদক নির্ণয় করতে পারবেন।

পাঠ পূর্ব পুনরালোচনা

উৎপাদক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রথমে সাধারণ অংশগুলোকে একত্র করতে হয় পরবর্তীতে সাধারণ অংশগুলোকে গুণফল আকারে প্রকাশ করা হয়। নিম্নের উদাহরণগুলো লক্ষ করুন।

উদাহরণ 1 : $(a+b+c)(x+y) + (a+b+c)(y+z)+(a+b+c)(z+x)$ এর উৎপাদক নির্ণয় করুন।

সমাধান : লক্ষ করুন রাশিটিতে $(a+b+c)$ সাধারণ অংশ। অতএব, সাধারণ অংশকে আলাদা করলে আমরা পাই,

$$(a+b+c)(x+y)+(a+b+c)(y+z)+(a+b+c)(z+x)$$
$$= (a+b+c)(x+y+y+z+z+x)$$
$$= (a+b+c)(2x+2y+2z)$$
$$= 2(a+b+c)(x+y+z)$$

উদাহরণ 2 : উৎপাদকে বিশেষণ করুন, $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2+c^2x^2+c^2y^2$

সমাধান : $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2+c^2x^2+c^2y^2$

$$= a^2(x^2+y^2) + b^2(x^2+y^2) +c^2(x^2+y^2)$$
$$= (x^2+y^2)(a^2+b^2+c^2)$$

অনুশীলন করুন

উৎপাদকে বিশেষণ করুন

1. $a^2-ab-ac+bc$
2. $(ax+by)(mx+ny)+(ax+by)$
3. $a(x+y) - (x+y)$

পাঠ ১ দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলের উৎপাদক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

l $a^2 - b^2$ সূত্র ব্যবহার করে বিভিন্ন প্রকার রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশেষণ করতে পারবেন;

l বিভিন্ন ক্ষেত্রে $a^2 - b^2$ সূত্রটিকে ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করবেন।

অনেক সময় বিভিন্ন রাশিকে দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করে তারপর $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ সূত্রটি প্রয়োগের মাধ্যমে রাশিটির উৎপাদকে বিশেষণ করতে হয়। নিম্নের উদাহরণগুলো লক্ষ করলে আপনারা স্পষ্ট ধারণা লাভ করবেন।

উদাহরণ 1 : $ax^2 - 144ay^2$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : এখানে লক্ষ করুন প্রত্যেক রাশির মধ্যেই a আছে। তাহলে প্রদত্ত রাশিটিকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় :

$ax^2 - 144ay^2$

$= a(x^2 - 144y^2)$

এখন রাশিটিকে দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করুন।

$a(x^2 - 144y^2)$

$= a\{(x)^2 - (12y)^2\}$

এখন, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$= a(x+12y)(x-12y)$

উদাহরণ 2 : $pm^2 - 169pn^2$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $pm^2 - 169pn^2$

$= p(m^2 - 169n^2)$

$= p\{(m)^2 - (13n)^2\}$

$= p(m+13n)(m-13n)$

উদাহরণ 3 : $(2p-3q+r)^2 - 16(p-q)^2$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $(2p-3q+r)^2 - 16(p-q)^2$

$= (2p-3q+r)^2 - \{4(p-q)\}^2$

$= (2p-3q+r)^2 - (4p-4q)^2$

$= \{(2p-3q+r)+(4p-4q)\}\{(2p-3q+r)-(4p-4q)\}$

$= (2p-3q+r+4p-4q)(2p-3q+r-4p+4q)$

$= (6p-7q+r)(-2p+q+r)$

$= (6p-7q+r)(q+r-2p)$

উদাহরণ 4: $a^2–b^2–c^2–2bc+a–b–c$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : অনেক সময় লক্ষ করলে দেখা যায় রাশিটি $a^2–b^2$ আকারে থাকে না, এলোমেলোভাবে সাজানো থাকে। এক্ষেত্রে ইউনিট ৩ এর সূত্র ১ অথবা সূত্র ২ প্রয়েগের মাধ্যমে রাশিটিকে দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করা যায়। লক্ষ করুন :

$a^2–b^2–c^2–2bc+a–b–c$

$= a^2–(b^2+2bc+c^2)+a–b–c$

এখানে 2bc এর সাথে b^2 ও c^2 একত্র করে সূত্রের মধ্যে নেয়া হয়েছে।

$= a^2–(b+c)^2+(a–b–c)$

$=\{a+(b+c)\}\{a–(b+c)\}+(a–b–c)$

$= (a+b+c)(a–b–c)+(a–b–c)$

$= (a–b–c)(a+b+c+1)$

উদাহরণ 5 : $(a^2–b^2)(x^2–y^2)+4abxy$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $(a^2–b^2)(x^2–y^2)+4abxy$

$= a^2(x^2–y^2)–b^2(x^2–y^2)+4abxy$

$= a^2x^2–a^2y^2–b^2x^2+b^2y^2+2abxy+2abxy$

$= a^2x^2+2abxy+b^2y^2–a^2y^2+2abxy–b^2x^2$

$= (a^2x^2+2ax.by+b^2y^2)–(a^2y^2-2ay.bx+b^2x^2)$

$= (ax+by)^2 – (ay–bx)^2$

$=\{((ax+by)+(ay–bx)\}\{(ax+by)–(ay–bx)\}$

$= (ax+by+ay–bx)(ax+by–ay+bx)$

উদাহরণ 6 : $x^4–a^4$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $(x^4–a^4)$

$= \{(x^2)^2–(a^2)^2\}$

$= (x^2+a^2)(x^2–a^2)$

এখানে লক্ষ করলে দেখা যায় উপরের লাইনের ডান দিকের রাশিটি $x^2–a^2$। সুতরাং পুনরায় $a^2–b^2=(a+\mathrm{b})\ (a–\mathrm{b})$ সূত্রটি প্রয়োগ করা যায়।

$\therefore\ x^4–a^4 \quad = (x^2+a^2)(x^2–a^2)$

$= (x^2+a^2)(x+a)(x–a)$

উদাহরণ 7 : $a^4+a^2b^2+b^4$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $a^4+a^2b^2+b^4$

$=(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2$

এখানে লক্ষ করলে দেখা যায় a^2b^2 এর সাথে 2 গুণ করলে উপরের রাশিটি $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ আকারে প্রকাশিত হয়। কিন্তু $2a^2b^2$ হওয়াতে উপরের রাশিটিকে সঠিক রাখতে হলে a^2b^2 আবার বিয়োগ করতে হবে। অর্থাৎ,

$a^4+a^2b^2+b^4$

$= (a^2)^2 + 2a^2b^2+(b^2)^2 - a^2b^2$

$= (a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$= (a^2 +b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$ [$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ সূত্র প্রয়োগ করে]

$= (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

উদাহরণ 8 : $4x^4+8a^2x^2+9a^4$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $4x^4+8a^2x^2+9a^4$

$= (2x^2)^2+8a^2x^2+(3a^2)^2$

ধরুন $2x^2=a$ এবং $(3a^2) =b$। এখন যদি $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ সূত্রের আকারে প্রকাশ করতে হয় তবে মাঝের রাশি হবে $2.2x^2.3a^2=12a^2x^2$। কিন্তু প্রদত্ত রাশিতে দেয়া আছে $8a^2x^2$। অতএব প্রদত্ত রাশির সাথে মিল রাখতে হলে $4a^2x^2$ বিয়োগ করতে হবে।

$\therefore\ 4x^4+8a^2x^2+9a^4$

$= (2x^2)^2+2.(2x^2)(3a^2) +(3a^2)^2-4a^2x^2$

$= (2x^2+3a^2)^2-(2ax)^2$

$= (2x^2+3a^2+2ax)(2x^2+3a^2-2ax)$

$= (2x^2+2ax+3a^2)(2x^2-2ax+3a^2)$

উদাহরণ 9 : $81a^5+4ax^4$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $81a^5+4ax^4$

$= a(81a^4+4x^4)$

$= a\{(9a^2)^2+(2x^2)^2\}$

$= a\{(9a^2)^2+2.9a^2.2x^2+(2x^2)^2-36a^2x^2\}$

$= a\{(9a^2+2x^2)^2-(6ax)^2\}$

$= a\{(9a^2+2x^2+6ax)(9a^2+2x^2-6ax)$

$= a(9a^2+6ax+2x^2)(9a^2-6ax+2x^2)$

উদাহরণ 10 : $x^2+2xy-2yz-z^2$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $x^2+2xy-2yz-z^2$

$=(x^2-z^2)+2xy-2yz$

$=(x+z)(x-z)+2y(x-z)$

$=(x-z)(x+z+2y)$

$=(x-z)(x+2y+z)$

উদাহরণ 11 : $a^2+6a+8-y^2+2y$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $a^2+6a+8-y^2+2y$

$= a^2+2.a.3+(3)^2-y^2+2.y.1 -(1)^2$

$= (a+3)^2-(y-1)^2$

$$= \{(a+3)+(y-1)\}\{(a+3)-(y-1)\}$$
$$= (a+3+y-1)(a+3-y+1)$$
$$= (a+y+2)\ (a-y+4)$$

অনুশীলনী ৪.১

উৎপাদকে বিশেষণ করুন

1. $16x^2-(3x-2y)^2$
2. $a^2-b^2+4bc-4c^2$
3. $(a+b-3c)^3-a-b+3c$
4. xa^8-x^9
5. m^2-4n^2+4n-1
6. a^4+a^2+1
7. $64x^4+a^4$
8. ax^4+4a^5
9. $9a^4-34a^2x^2+25x^4$
10. $x^4y^4+x^2y^2z^2+z^4$
11. $9x^2-16y^2-6xz+8yz$

পাঠ ২ দুইটি রাশির ঘনর যোগফল ও বিয়োগফলের উৎপাদক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- দুইটি রাশির ঘনর যোগফল ও বিয়োগফলের উৎপাদক নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ইউনিট ৩ এর সূত্র ৮ ও সূত্র ৯ হতে আমরা জানি–

$a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$

নিম্নে এদের উৎপাদকে বিশেষণ দেখানো হল :

(i) $a^3+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)$
$= (a+b)\{(a+b)^2-3ab)\}$
$= (a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$
$= (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$\therefore\ a^3+b^3 = (a+b)\ (a^2-ab+b^2)$

(ii) $a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$
$= (a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$
$= (a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab)$
$= (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$\therefore\ a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

অতএব, কোন রাশিকে দুইটি রাশির ঘনর যোগফল ও বিয়োগফলরূপে প্রকাশ করে উপরোক্ত নিয়মের সাহায্যে উৎপাদকে বিশেষণ করা যায়।

উদাহরণ 1 : $8a^3+27b^3$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : প্রথমে প্রদত্ত রাশিটিকে a^3+b^3 আকারে প্রকাশ করুন। তারপর $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ সূত্রটি প্রয়োগ করুন।

$8a^3+27b^3$
$= (2a)^3+(3b)^3$
$= (2a+3b)\{(2a)^2-2a.3b+(3b)^2\}$
$= (2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

উদাহরণ 2 : $216ax^4-axy^3$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $216ax^4 - axy^3$
$= ax(216x^3-y^3)$
$= ax\{(6x)^3-(y)^3\}$

$= ax(6x-y)\{(6x)^2+6x.y+(y)^2)\}$
$= ax(6x-y)(36x^2+6xy+y^2)$

উদাহরণ 3 : $8x^3-27(x-y)^3$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $8x^3-27(x-y)^3$
$= (2x)^3-\{3(x-y)\}^3$
$= (2x)^3-(3x-3y)^3$
$=\{2x-(3x-3y)\}\{(2x)^2+2x(3x-3y)+(3x-3y)^2\}$
$= (2x-3x+3y)\{4x^2+6x^2-6xy+(3x)^2-2.3x.3y+(3y)^2\}$
$= (-x+3y)(4x^2+6x^2-6xy+9x^2-18xy+9y^2)$
$= (3y-x)(19x^2-24xy+9y^2)$

উদাহরণ 4 : $x^3-6x^2y+12xy^2-9y^3$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $x^3-6x^2y+12xy^2-9y^3$
$= (\mathrm{x})^3 - 3(x)^2.2y + 3.x.(2y)^2-(2y)^3-y^3$
$= (x-2y)^3-y^3$
$=\{(x-2y)-y\}\{(x-2y)^2+(x-2y).y+y^2\}$
$= (x-2y-y)\ \{ (x)^2-2x.2y+(2y)^2+xy-2y^2+y^2\}$
$= (x-3y)(x^2-4xy+4y^2+xy-2y^2+y^2)$
$= (x-3y)(x^2-3xy+3y^2)$

উদাহরণ 5 : $m^3-n^3-m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$ কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : $m^3-n^3-m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$
$= (m^3-n^3) -m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$
$= (m-n)(m^2+mn+n^2)-m(m+n)(m-n)+n(m-n)(m-n)$
$= (m-n)\ \{(m^2+mn+n^2)-m(m+n)+n(m-n)\}$
$= (m-n)(m^2+mn+n^2-mn-m^2+mn-n^2)$
$= (m-n)(mn)$
$= mn(m-n)$

উদাহরণ 6 : a^6-64 কে উৎপাদকে বিশেষণ করুন।

সমাধান : a^6-64
$= (a^3)^2-(8)^2$
$= (a^3+8)(a^3-8)$
$= \{(a)^3+(2)^3\}\{(a)^3-(2)^3\}$
$= (a+2)(a^2-2.a+2^2)(a-2)(a^2+a.2+2^2)$
$= (a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$

অনুশীলনী ৪.২

উৎপাদকে বিশেষণ করুন

1. xy^3+64x 2. $27+8a^3b^3c^3$

3. $a^3+\frac{1}{8}$ 4. $(a+b)^3+(a-b)^3$

5. $(a^2+b^2)^3+8a^3b^3$ 6. $a^3-\frac{1}{27}$

7. $24x^4-3x$ 8. $\frac{a^6}{27}-b^6$

9. $1-125a^3b^3$ 10. ab^3-8a

11. $64(a-b)^3-27(a+b)^3$ 12. $8a^3+12a^2+6a-63$

13. $a^3-6a^2+12a-9$ 14. $a^3-9b^3+(a+b)^3$

পাঠ ৩ x^2+px+q আকারের রাশির উৎপাদক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

l x^2+px+q আকারের রাশিকে উৎপাদকে বিশেষণ করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

x^2+px+q আকারের রাশির উৎপাদকে বিশেষণ

x^2+px+q রাশিটিতে তিনটি পদ আছে। প্রথম পদটি x^2 যার সহগ 1(এক), দ্বিতীয় পদটি অর্থাৎ মধ্যপদটি x যার সহগ p এবং তৃতীয় পদটি q যা x বর্জিত।

যেহেতু রাশিটি দ্বিতীয় ঘাতের অর্থাৎ রাশিটির সর্বোচ্চ ঘাত 2, অতএব রাশিটির দুইটি উৎপাদক থাকবে।

ধরুন $(x+a)$ এবং $(x+b)$ রাশিটির দুইটি উৎপাদক। সুতরাং উৎপাদক দুটির গুণফল হবে x^2+px+q

অর্থাৎ $x^2+px+q = (x+a)(x+b)$

বা, $x^2+px+q = x^2+ax+bx+ab$

বা, $x^2+px+q = x^2+(a+b)x+ab$

ফলে, $p=a+b$ এবং $q=ab$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে x^2+px+q আকারের রাশির উৎপাদক $(x+a)$ ও $(x+b)$ যেখানে $p = a+b$ এবং $q=ab$

সুতরাং x^2+px+q আকারের রাশির উৎপাদক নির্ণয় করতে হলে q কে এমন দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে যাদের বীজগণিতীয় যোগফল p হয়। লক্ষণীয় রাশিটিকে ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম বা অধ:ক্রম অনুসারে সাজাতে হবে।

এখন আসুন আমরা একটি উদাহরণের মাধ্যমে পদ্ধতিটিকে বিশ্লেষণ করি।

$(x+2)(x+3) = x^2+3x+2x+6$

$= x^2+(3+2)x+6$

$= x^2+5x+6$

অর্থাৎ $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$

এখানে $p=5$, $q=6$ এবং $a=3$, $b=3$

এখন $ab=2.3 = 6$

আবার, $a+b = 2+3 = 5$

অর্থাৎ 6 কে দুইটি উৎপাদক 2 এবং 3 কে ভাগ করা হল যাদের যোগফল = 2+3=5

উদাহরণ 1 : $x^2+18x+56$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $x^2+18x+56$

$= x^2+8x+7x+56$

$= x(x+8)+7(x+8)$

$= (x+8)(x+7)$

উদাহরণ 2 : x^4+4x^2-12 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : x^4+4x^2-12

$= x^4+6x^2-2x^2-12$

$= x^2(x^2+6)-2(x^2+6)$

$= (x^2+6)(x^2-2)$

উদাহরণ 3 : $570-11x-x^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $570-11x-x^2$

$= 570-30x+19x-x^2$

$= 30(19-x)+x(19-x)$

$= (19-x)(30+x)$

উদাহরণ 4 : x^4+x^2-2550 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : x^4+x^2-2550

$= x^4+51x^2-50x^2-2550$

$= x^2(x^2+51)-50(x^2+51)$

$= (x^2+51)(x^2-50)$

উদাহরণ 5 : $(x^2-3x)^2-38(x^2-3x)-80$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $(x^2-3x)^2-38(x^2-3x)-80$

ধরুন $x^2-3x=a$ অতএব, প্রদত্ত রাশিটি হবে,

$a^2-38a-80$

$= a^2-40a+2a-80$

$= a(a-40)+2(a-40)$

$= (a-40)(a+2)$

$= (x^2-3x-40)(x^2-3x+2)$ [a এর মান বসিয়ে]

$= (x^2-8x+5x-40)(x^2-2x-x+2)$

$= \{x(x-8)+5(x-8)\}\{x(x-2)-1(x-2)\}$

$= (x-8)(x+5)(x-2)(x-1)$

$= (x-1)(x-2)(x+5)(x-8)$

উদাহরণ 6 : $x^2-x-(a^2+5a+6)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $x^2-x-(a^2+5a+6)$

$=x^2-x-(a^2+3a+2a+6)$

$= x^2-x-\{a(a+3)+2(a+3)\}$

$= x^2-x-(a+3)(a+2)$

$= x^2-(a+3)x+(a+2)x-(a+3)(a+2)$

$= x\{x-(a+3)\}+(a+2)\{x-(a+3)\}$

$= \{x-(a+3)\}\{x-(a+2)\}$
$= (x-a-3)(x-a-2)$

উদাহরণ 7 : $x^2-\left(\frac{2}{a}-3a\right)x-6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $x^2-\left(\frac{2}{a}-3a\right)x-6$

$= x^2-\frac{2}{a}x+3ax-6$

$= x\left(x-\frac{2}{a}\right)+3a\left(x-\frac{2}{a}\right)$

$= \left(x-\frac{2}{a}\right)(x+3a)$

অনুশীলনী ৪.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ **করুন**

1. $x^2+20x+96$
2. $a^2-51a+650$
3. $x^2-19x-20$
4. $5-4x-x^2$
5. $a^2b^2-8ab-105$
6. $(x^2+2x)^2+12(x^2+2x)-45$
7. $(a^2+b^2)^2-18(a^2+b^2)-88$
8. $(x^2+6x)^2-5(x^2+6x)-84$
9. $x^2-x-(a+1)(a+2)$
10. $x^2+ax-(3a-2)(4a-2)$
11. $x^2+(ab+c)x+abc$
12. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$

পাঠ ৪ px^2+qx+r আকারের রাশির উৎপাদক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 px^2+qx+r আকারের রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

px^2+qx+r আকারের রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ

মনে করুন p^2+qx+r এর উৎপাদক $(ax+b)$ এবং $(cx+d)$। সুতরাং $(ax+b)$ এবং $(cx+d)$ এর গুণফল px^2+qx+r এর সমান হবে।

অর্থাৎ $px^2+qx+r = (ax+b)(cx+d)$

$= ax(cx+d)+b(cx+d)$

$=acx^2+adx+bcx+bd$

$= acx^2 + (ad+bc)x+bd$

এখানে, $p=ac$, $q=(ad+bc)$ এবং $r=bd$

$\therefore p \times r = ac \times bd = ad \times bc$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে px^2+qx+r এর উৎপাদক $(ax+b)$ এবং $(cx+d)$, যেখানে $q=ad+bc$ এবং $p*q=ad*bc$. অর্থাৎ px^2+qx+r আকারের রাশির উৎপাদক নির্ণয় করতে হলে x^2 এর সহগ ও x বর্জিত পদের গুণফলকে অর্থাৎ pr এর এমন দুইটি উৎপাদক নির্ণয় করতে হবে যাদের বীজগণিতীয় যোগফল (যোগফল অথবা বিয়োগফল) x এর সহগ অর্থাৎ q এর সমান হবে।

এখন আসুন আমরা একটি উদাহরণের মাধ্যমে পদ্ধতিটিকে বিশ্লেষণ করি

$(3x+11)(4x+7) = 3x(4x+7)+11(4x+7)$

$= 12x^2 +21x+44x+77$

$= 12x^2+(21+44)x+77$

$= 12x^2+65x+77$

অর্থাৎ $12x^2 +65x+77 = (3x+11)(4x+7)$

এখানে $p=12$, $q=65$, $r=77$ এবং $a=3$, $b=11$, $c=4$, $d=7$

এখন $p = ac$ অর্থাৎ $12=3 \times 4$

$q = ad+bc$ অর্থাৎ $65 = 3 \times 7+11 \times 4$

এবং $r=bd$ অর্থাৎ $77=11 \times 7$

আবার $p \times r=ac \times bd = bc \times ad$

অর্থাৎ $12 \times 77 = (11 \times 4) (3 \times 7)=924$

এবং $q=ad+bc$

অর্থাৎ $65 = 3 \times 7+11 \times 4=21+44$

অতএব, লক্ষ করুন এখানে $p.\mathrm{r}$ এর গুণফল 924 এর দুইটি উৎপাদক 21 ও 24 নির্ণয় করা হয়েছে যাদের যোগফল 65 অর্থাৎ x এর সহগ q এর সমান।

উদাহরণ 1 : $8x^2+6xy+y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $8x^2+6xy+y^2$

লক্ষ করুন এখানে $p=8$, $q=6$, $\mathrm{r}=1$

$\therefore\ p.\mathrm{r} = 8.1 = 8 = 4 \times 2,\ q = 4+2$

$\therefore\ 8x^2+6xy+y^2$

$= 8x^2+4xy+2xy+y^2$

$= 4x(2x+y)+y(2x+y)$

$= (2x+y)(4x+y)$

উদাহরণ 2 : $4x^2y+16xy+15y$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $4x^2y+16xy+15y$

$= y(4x^2+16x+15)$

$= y(4x^2+10x+6x+15)$

$= y\ \{2x(2x+5)+3(2x+5)\}$

$= y(2x+5)(2x+3)$

মন্তব্য : প্রথমে প্রদত্ত রাশিমালা থেকে সাধারণ উৎপাদক নির্ণয় করার পর রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হয়েছে।

উদাহরণ 3 : $9x^2+18x-40$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $9x^2+18x-40$

$= 9x^2+30x-12x-40$

$= 3x(3x+10)-4(3x+10)$

$= (3x+10)(3x-4)$

উদাহরণ 4 : $-4x^2+23x+6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $-4x^2+23x+6$

$= -4x^2+24x-x+6$

$= -4x(x-6)-1(x-6)$

$= (x-6)(-4x-1)$

$= -(x-6)(4x+1)$

$= (6-x)(4x+1)$

উদাহরণ 5 : $3(x^2+2x)^2-22(x^2+2x)+40$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $3(x^2+2x)^2-22(x^2+2x)+40$

ধরুন $x^2+2x=a$ অতএব প্রদত্ত রাশিমালা হবে–

$= 3a^2 - 22a + 40$

$= 3a^2-12a-10a+40$

$= 3a(a-4)-10(a-4)$
$= (a-4)(3a-10)$
$= (x^2+2x-4)\{3(x^2+2x)-10\}$ [a এর মান বসাইয়া]
$= (x^2+2x-4)(3x^2+6x-10)$

উদাহরণ 6 : $(a+b)x^2-2ax+(a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $(a+b)x^2-2ax+(a-b)$
$= (a+b)x^2-(a+b)x-(a-b)x+(a-b)$
$= (a+b)x(x-1)-(a-b)(x-1)$
$= (x-1)\{(a+b)x-(a-b)\}$
$= (x-1)(ax+bx-a+b)$

উদাহরণ 7 : $ax^2+(ab-1)x-b$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $ax^2+(ab-1)x-b$
$= ax^2+abx-x-b$
$= ax(x+b)-1(x+b)$
$= (x+b)(ax-1)$

অনুশীলনী ৪.৪

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন

1. $12x^2+35x+18$
2. $12x^2-38x+20$
3. $-12x^2+8xy+7y^2$
4. $9x^2y^2-5xy^2-14y^2$
5. $4a^4-27a^2-81$
6. $-12x^2-10x+8$
7. $\frac{x^2}{2}+\frac{7x}{2}+5$
8. $a(x+y)^2+(a-b)(x^2-y^2)-b(x-y)^2$
9. $(a-m)x^2-(n-a)xy+(m-n)y^2$
10. $(a+b)x^2+2bxy-(a-b)y^2$
11. $ax^2+(a^2+1)x+a$
12. $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$

পাঠ ৫ $a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারের রাশির উৎপাদক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বীজগণিতে $a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারের রাশিগুলোকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবেন;
- $a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারের রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

$a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারের রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

$a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারের রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে, $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ সূত্র ব্যবহার করতে হয়। অনেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত রাশিটি $a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারে থাকে না, সেক্ষেত্রে আমাদেরকে রাশিমালটিকে $a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারে প্রকাশ করে নিতে হবে। তারপর নির্দিষ্ট সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে।

উদাহরণ 1 : $a^3-8b^3-27c^3-18abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $a^3-8b^3-27c^3-18abc$

$= (a)^3+(-2b)^3+(-3c)^3-3.a.(-2b)(-3c)$

$=\{a+(-2b)+(-3c)\}\{a^2+(-2b)^2+(-3c)^2-a.(-2b)-(-2b)(-3c)-(-3c).a\}$

$= (a-2b-3c)(a^2+4b^2+9c^2-2ab-6bc+3ca)$

উদাহরণ 2 : $x^3-8y^3-1-6xy$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $x^3-8y^3-1-6xy$

$= (x)^3+(-2y)^3+(-1)^3-3.x.(-2y).(-1)$

$= \{x+(-2y)+(-1)\}\{(x)^2+(-2y)^2+(-1)^2-x.(-2y)-(-2y)(-1)-(-1).x\}$

$= (x-2y-1)(x^2+4y^2+1+2xy-2y+x)$

উদাহরণ 3 : x^6+5x^3+8 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : x^6+5x^3+8

$= (x^2)^3+(-x)^3+(2)^3-3(x)^2.(-x)(2)$

$= \{(x)^2+(-x)+2\}\{(x^2)^2+(-x)^2+(2)^2-x^2.(-x)-(-x).2-2.x^2\}$

$= (x^2-x+2)(x^4+x^2+4-x^3+2x-2x^2)$

$= (x^2-x+2)(x^4-x^3-x^2+2x+4)$

উদাহরণ 4 : $a^3+\frac{1}{a^3}-2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : $a^3+\frac{1}{a^3}-2$

$$=(a)^3+\left(\frac{1}{a}\right)^3+(1)^3-3.a.\frac{1}{a}.1$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}+1\right)\left\{(a)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2+(1)^2-a.\frac{1}{a}-\frac{1}{a}.1.-1.a\right\}$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}+1\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}+1-1-\frac{1}{a}-a\right)$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}+1\right)\left(a^2-a-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)$$

উদাহরণ 5 : $(ax-by)^3+(by-cz)^3+(cz-ax)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান : ধরুন $ax-by=p$, $by-cz=q$, $cz-ax=r$

$\therefore p+q+r = ax-by+by-cz+cz-ax=0$

সুতরাং প্রদত্ত রাশিমালা $= (ax-by)^3+(by-cz)^3+(cz-ax)^3$

$= p^3+q^3+r^3$

$= p^3+q^3+r^3-3pqr+3pqr$

$= (p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)+3pqr$

$= 0.(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)+3pqr$

$= 3pqr$

$= 3(ax-by)(by-cz)(cz-ax)$ [p, q, r এর মান বসিয়ে]

অনুশীলনী ৪.৫

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন

1. $a^3-b^3-c^3-3abc$
2. $27x^3+y^3-1+9xy$
3. $8x^3-125y^3+27z^3+90xyz$
4. $x^3-\frac{y^3}{8}+\frac{z^3}{27}+\frac{xyz}{2}$
5. $a^3+\frac{b^3}{27}-\frac{c^3}{64}+\frac{abc}{4}$
6. $8x^6-17x^3+27$
7. $a^3-\frac{1}{a^3}+36$
8. $a^3-\frac{1}{a^3}+4$
9. $(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$
10. $(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$