ইউনিট ৬

অনুপাত ও সমানুপাত

ভূমিকা

অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা ব্যবহার করে অনেক সময় অনেক সমস্যা সহজে সমাধান করা যায়। মানচিত্র এবং নক্‌শা অঙ্কন, কোন বস্তুর চিত্র তৈরিকরণ, আকৃতির হ্রাস-বৃদ্ধি ইত্যাদিতে অনুপাতের ধারণা ব্যবহার করা হয়। ব্যবসা-বাণিজ্য, লাভ-লোকসান, শতকরা হিসাব, অংশ বণ্টন ইত্যাদিতে অনুপাতের ধারণা ব্যবহার করা হয়। সমানুপাত ও সাদৃশ্যের ধারণা ব্যবহার করেও অনেক সমস্যা সমাধান করতে হয়। তাই অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা স্পষ্ট থাকা প্রয়োজন। এই ইউনিটে আপনারা অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা লাভ করবেন।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি

- অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- অনুপাতের রূপান্তর সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা ও প্রয়োগ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কে বাস্তব জ্ঞান লাভ করবেন;

1 সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

অনুপাত (Ratio)

একই জাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে তুলনা হল অনুপাত। দুইটি একই জাতীয় রাশির একটি অপরটির তুলনায় কত গুণ বা অংশ তাই ঐ দুইটি রাশির অনুপাত। মনে করুন, একটি পরীক্ষায় গণিত বিষয়ে কবির 90 নম্বর পেল এবং তার বন্ধু পলাশ পেল 85। তাহলে কবির ও পলাশের নম্বরের অনুপাত

কবিরের নম্বর : পলাশের নম্বর = 90 : 85

অনুপাত একই জাতীয় দুইটি রাশির তুলনা

দুইটি ধনাত্মক সংখ্যা a ও b এর অনুপাত $a : b = \frac{a}{b}$ । একই জাতীয় দুইটি রাশির অনুপাত একই এককে তাদের পরিমাপের অনুপাত। অর্থাৎ একই এককে ১ম রাশির পরিমাপ a একক এবং ২য় রাশির পরিমাপ b একক হলে ১ম রাশি : ২য় রাশি $= a : b = \frac{a}{b}$ । অনুপাত বোঝাতে রাশিটির মধ্যে ':' প্রতীক ব্যবহার করা হয়। $a : b$ অনুপাতে a কে পূর্বরাশি (antecedent) এবং b কে উত্তর রাশি (consequent) বলা হয়। অনুপাত একটি প্রকৃত বা অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। সুতরাং ভগ্নাংশের সকল নিয়মই অনুপাতের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। অনুপাতের পূর্বরাশি ও উত্তর রাশিকে একই সংখ্যা (শূন্য ছাড়া) দ্বারা গুণ করলে অনুপাতের মানের কোন পরিবর্তন হয় না। অনুপাতের মান 1 অপেক্ষা বড় হলে তাকে গুরু অনুপাত এবং 1 অপেক্ষা ছোট হলে তাকে লঘু অনুপাত বলে।

বিভিন্ন প্রকার অনুপাত

(ক) ব্যস্ত অনুপাত : কোন অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর রাশিকে যথাক্রমে উত্তর ও পূর্ব রাশি ধরে যে অনুপাত হয় তাকে প্রথম অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত বলে। যেমন, $a : b$ এর ব্যস্ত অনুপাত $b : a$

(খ) দ্বিগুণানুপাত : কোন অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর রাশির বর্গের অনুপাতকে তার দ্বিগুণানুপাত বলে। যেমন $a : b$ এর দ্বিগুণানুপাত অনুপাত $a^2 : b^2$

(গ) দ্বিভাজিত অনুপাত : কোন অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর রাশির বর্গমূলের অনুপাতকে দ্বিভাজিত অনুপাত বলে। যেমন, $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ হল $a : b$ এর দ্বিভাজিত অনুপাত।

(ঘ) ত্রিগুণানুপাত : কোন অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর রাশির ঘনের অনুপাতকে তার ত্রিগুণানুপাত বলে। যেমন, $a^3 : b^3$ হল, $a : b$ এর ত্রিগুণানুপাত।

(ঙ) ত্রিভাজিত অনুপাত : কোন অনুপাতের পূর্ব ও উত্তর রাশির ঘনমূলের অনুপাতকে তার ত্রিভাজিত অনুপাত বলে। যেমন, $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ হল $a : b$ এর ত্রিভাজিত অনুপাত।

সমানুপাত

যদি চারটি রাশি এমন হয় যেন প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থটির অনুপাতের সমান হয় তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত গঠিত হয়। সমানুপাতের ক্ষেত্রে চারটি রাশি একই জাতীয় না হলেও চলে। প্রত্যেক অনুপাতের রাশি দুইটি এক জাতীয় হলেই চলে।

চারটি রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থটির অনুপাতের সমান হলে ঐ রাশি চারটি নিয়ে সমানুপাত গঠিত হয়।

যদি a, b, c, d এমন চারটি রাশি হয়, যেন $a : b = c : d$ হয়, তবে তাদের সমানুপাতী বলা হয়। প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে প্রান্তীয় রাশি, দ্বিতীয় ও তৃতীয়কে মধ্যক (mean) বলা হয়।

a, b, c, d সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি $ad=bc$ হয়। কেননা $a : b = c : d$ বা $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে উভয়পক্ষকে bd দিয়ে গুণ করলে ad = bc হয়। বিপরীতক্রমে ad = bc হলে উভয়পক্ষে bd দিয়ে ভাগ করলে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ পাওয়া যায়।

(ক) চারটি রাশি সমানুপাতী হলে প্রান্ত রাশি দুইটির গুণফল = মধ্য রাশি দুইটি গুণফল।

অর্থাৎ $a : b = c : d$ হলে $ad = bc$ হয়।

যেমন $2 : 3 = 6 : 9$ হলে $2*9 = 3*6$ হয়।

(খ) সমানুপাতী দুইটি অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাতও সমানুপাতী হয়। অর্থাৎ $a : b = c : d$ হলে $b : a = d : c$ হয়। একে বলে বিপরীত প্রক্রিয়া।

(গ) দুইটি অনুপাত সমান হলে ১ম ও ৩য় রাশির অনুপাত = ২য় ও ৪র্থ রাশির অনুপাত হয়। একে বলে একান্তর প্রক্রিয়া।

ক্রমিক সমানুপাত

a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে $a : b = b : c$ হয়। a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি $ac = b^2$ হয়। ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি একই জাতীয় হতে হবে।

a : b = b : c হলে a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ হলে b কে a ও c এর মধ্য সমানুপাতী এবং c কে a ও b এর তৃতীয় সমানুপাতী বলে। $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হলে a, b, c, d কে ক্রমিক ধারাবাহিক সমানুপাতী বলে।

উদাহরণ 1: এক ব্যক্তি মাসে p টাকা আয় করেন এবং q টাকা ব্যয় করেন। অপর এক ব্যক্তি মাসে r টাকা আয় করেন এবং s টাকা ব্যয় করেন। কেহই আয়ের বেশি ব্যয় করেন না। দুই ব্যক্তির আয় অনুযায়ী ব্যয়ের অনুপাতের তুলনা করুন।

সমাধান : ১ম ব্যক্তি p টাকা আয় করে q টাকা ব্যয় করেন

$\therefore$ 1 টাকা আয় করে $\frac{q}{p}$ টাকা ব্যয় করেন

২ম ব্যক্তি r টাকা আয় করে s টাকা ব্যয় করেন।

$\therefore$ 1 টাকা আয় করে $\frac{s}{r}$ টাকা ব্যয় করেন

অতএব তাদের ব্যয়ের অনুপাত $\frac{q}{p} : \frac{s}{r}$

$= \frac{q}{p} \div \frac{s}{r} = \frac{q}{p} * \frac{r}{s} = \frac{qr}{ps} = qr : ps$

$= qr : sp$

উদাহরণ 2 : A এবং B সমবেগে নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করেন যথাক্রমে t_1 ও t_2 মিনিটে। A ও B এর গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরুন A এর গতিবেগ a মিটার/মিনিট এবং B এর গতিবেগ b মিটার/মিনিট।

সুতরাং নির্দিষ্ট দূরত্ব x মিটার হলে

$x = at_1$ (A এর ক্ষেত্রে)

$x = bt_2$ (B এর ক্ষেত্রে)

$\therefore at_1 = bt_2$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{t_2}{t_1}$

$\therefore$ A এর গতিবেগ : B এর গতিবেগ $= \frac{a}{b} = \frac{t_2}{t_1}$

অনুশীলনী ৬.১

1. অনুপাতের ধারণা ব্যাখ্যা করুন।
2. চারটি রাশির সমানুপাতী হওয়ার শর্ত কি?
3. ক্রমিক সমানুপাতী হওয়ার শর্ত কি?
4. দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার ও b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?
5. এক ব্যক্তি মাসে q টাকা আয় করে এবং r টাকা ব্যয় করেন। অপর ব্যক্তি মাসে s টাকা আয় করে t টাকা ব্যয় করেন। কেহই আয়ের বেশি ব্যয় করেন না। তাদের আয় অনুযায়ী ব্যয়ের অনুপাতের তুলনা করুন।

   $q = 5500$, $r = 4400$, $s = 6000$, $t = 5000$ হলে আয় অনুযায়ী ব্যয়ের অনুপাতের তুলনা করুন।

পাঠ ২ সংখ্যার অনুপাতের রূপান্তর

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 সংখ্যার অনুপাতের রূপান্তর সম্পর্কে জানতে পারবেন;

1 সংখ্যার অনুপাতের রূপান্তর প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

অনুপাতের রূপান্তর

1. ব্যস্তকরণ (Invertendo)

$a : b = c : d$ হলে $b : a = d : c$

প্রমাণ : দেওয়া আছে $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \quad bc = ad$

বা $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ [উভয় পক্ষকে ac দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \quad b : a = d : c$

2. একান্তকরণ (Alternendo)

$a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \quad ad = bc$

বা $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ [উভয় পক্ষকে cd দ্বারা ভাগ করে]

বা $a : c = b : d$

3. যোজন (Componendo)

$a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{b} : \frac{c+d}{d}$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

4. বিয়োজন (Dividendo)

$$a : b = c : d \text{ হলে, } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ [উভয় পক্ষ হতে 1 বিয়োগ করে]

বা, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

5. যোজন-বিয়োজন (Componedo-dividendo)

$$a : b = c : d \text{ হলে, } \frac{a+b}{a\text{-}b} = \frac{c+d}{c\text{-}d}, (a \neq b \text{ এবং } c \neq d)$$

প্রমাণ $a : b = c : d$

যোজন করে পাই, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

আবার, $a : b = c : d$

বিয়োজন করে পাই, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

সুতরাং, $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-a}$

অতএব, $\frac{a+b}{b} * \frac{b}{a-b} = \frac{c+d}{d} * \frac{d}{c-d}$

$\therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

6. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}} = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}$ হলে, প্রত্যেকটির অনুপাত $= \frac{a+c+\mathrm{e}+\mathrm{g}}{b+d+\mathrm{f}+\mathrm{h}}$

প্রমাণ : মনে করুন, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}} = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}} = k$

তাহলে, $a=bk, c=dk, \mathrm{e=f}k, \mathrm{g=h}k$

এখন, $\frac{a+c+\mathrm{e}+\mathrm{g}}{b+d+\mathrm{f}+\mathrm{h}} = \frac{bk+dk+\mathrm{f}k+\mathrm{h}k}{b+d+\mathrm{f}+\mathrm{h}}$

$= \frac{k(b+d+\mathrm{f}+\mathrm{h})}{b+d+\mathrm{f}+\mathrm{h}}$

$=k$

কিন্তু k প্রদত্ত সমানুপাতের প্রত্যেকটি অনুপাতের সমান

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}} = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}} = \frac{a+c+\mathrm{e}+\mathrm{g}}{b+d+\mathrm{f}+\mathrm{h}}$$

উদাহরণ 1 : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ দেখান যে, $\frac{3a+7c}{5a+9c} = \frac{3b+7d}{5b+9d}$

সমাধান : মনে করুন, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

বা, $\frac{a}{b} = k, \frac{c}{d} = k$

$\therefore \quad a = bk, c = dk$

বামপক্ষ $= \frac{3a + 7c}{5a + 9c}$

$= \frac{3.bk + 7.dk}{5.bk + 9.dk}$

$= \frac{k(3b + 7d)}{k(5b + 9d)}$

$= \frac{3b + 7d}{5b + 9b}$

= ডানপক্ষ

উদাহরণ 2 : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ হলে প্রমাণ করুন $\frac{a^3 + b^3}{(a + b)(a - b + c)} = a$

সমাধান : ধরুন, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

তাহলে, $a = bk, b = ck$

$= ck.k$

$= ck^2$

বামপক্ষ $= \frac{a^3 + b^3}{(a + b)(a - b + c)}$

$= \frac{(ck^2)^3 + (ck)^3}{(ck^2 + ck)(ck^2 - ck + c)}$

$= \frac{c^3k^6 + c^3k^3}{ck(k + 1).\ c(k^2 - k + 1)}$

$= \frac{c^3k^3(k^3 + 1)}{c^2k(k + 1)(k^2 - k + 1)}$

$= \frac{ck^2(k^3+1)}{k^3+1}$

$= ck^2$

ডানপক্ষ $= a = ck^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 3 : a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে দেখান যে,

$$\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}$$

সমাধান : যেহেতু a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী অতএব, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

ধরুন, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$

তাহলে, $b = ck,\ ab = k = ck.k = ck^2$

বামপক্ষ $= \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$

$= \frac{(ck^2)^2 + (ck)^2}{(ck)^2 + c^2}$

$= \frac{c^2k^4 + c^2k^2}{c^2k^2 + c^2}$

$= \frac{c^2k^2(k^2+1)}{c^2(k^2+1)}$

$= k^2$

ডানপক্ষ $= \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}$

$= \frac{(ck^2)^2 - (ck)^2}{(ck)^2 - c^2}$

$= \frac{c^2k^4 - c^2k^2}{c^2k^2 - c^2}$

$= \frac{c^2k^2(k^2-1)}{c^2(k^2-1)}$

$= k^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 4 : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হলে প্রমাণ করুন, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

সমাধান : ধরুন, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$\frac{a}{b} = k$	$\frac{b}{c} = k$	$\frac{c}{d} = k$
$a = bk$	$b = ck$	$c = dk$
$= dk^2.k$	$= dk.k$	
$= dk^3$	$= dk^2$	

বামপক্ষ $= (a^2 + b^2 + c^2)\,(b^2 + c^2 + d^2)$

$=\{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\}\ \{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$

$=(d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2)\,(d^2k^4 + d^2k^2 + d^2)$

$= \mathrm{d^2k^2\,(k^4 + k^2 + 1).\ d^2\,(k^4 + k^2 + 1)}$

$=d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

ডানপক্ষ $=(ab + bc + cd)^2$

$=(dk^3.dk^2 + dk^2.dk + dk.d)^2$

$=(d^2k^5 + d^2k^3 + d^2k)^2$

$=\{d^2k(k^4 + k^2 + 1)\}^2$

$=d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 5 : যদি $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয় তবে দেখান যে, $\frac{p-q}{q} = \frac{p+q}{a}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a+q}{a-q}$ [উভয় পক্ষ বর্গ করে]

বা, $\frac{p}{q} = \frac{a+q}{a-q}$ [দেওয়া আছে, $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{(a+q+a-q)}{(a+q-a+q)}$ [যোজন -বিয়োজন করে]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{2a}{2q}$

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a}{q}$

বা, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ [একান্তর করে]

সুতরাং $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$

উদাহরণ 6 : $\frac{x+2y}{a+3b} = \frac{y+3x}{a+4b}$ হলে প্রমাণ করুন, $\frac{x}{y} = \frac{a+5b}{2a+5b}$

সমাধান : $\frac{x+2y}{a+3b} = \frac{y+3x}{a+4b}$

বা, $(x + 2y)\,(a + 4b) = (y + 3x)\,(a + 3b)$

বা, $x(a + 4b) + 2y(a + 4b) = y(a + 3b) + 3x(a + 3b)$

বা, $x(a+4b)+y(2a+8b)=y(a+3b)+x(3a+9b)$

বা, $y(2a+8b)-y(a+3b)=x(3a+9b)-x(a+4b)$

বা, $y(2a+8b-a-3b)=x(3a+9b-a-4b)$

বা, $y(a+5b)=x(2a+5b)$

বা, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a+5b}{2a+5b}$

উদাহরণ 7 : সমানুপাতের ধর্ম ব্যবহার করে দেখান যে,

$x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হলে, $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}=2$

সমাধান : দেওয়া আছে $x=\dfrac{4ab}{a+b}$

বা, $\dfrac{x}{2a}=\dfrac{4ab}{2a(a+b)}$

বা, $\dfrac{x}{2a}=\dfrac{2b}{a+b}$

বা, $\dfrac{x+2a}{x-2a}=\dfrac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{x+2a}{x-2a}=\dfrac{a+3b}{b-a}$

আবার, $x=\dfrac{4ab}{a+b}$

$\therefore \dfrac{x}{2b}=\dfrac{4ab}{2b(a+b)}$

বা, $\dfrac{x}{2b}=\dfrac{2a}{a+b}$

বা, $\dfrac{x+2b}{x-2b}=\dfrac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{x+2b}{x-2b}=\dfrac{3a+b}{a-b}$

$\therefore \dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}=\dfrac{a+3b}{b-a}+\dfrac{3a+b}{a-b}$

$=\dfrac{a+3b}{b-a}-\dfrac{3a+b}{b-a}$

$=\dfrac{a+3b-3a-b}{b-a}$

$=\dfrac{-2a+2b}{b-a}$

$=\dfrac{2(b-a)}{b-a}$

$=2$

$\therefore \dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}=2$

উদাহরণ 8 : $\dfrac{x}{2a-b-c} = \dfrac{y}{2b-c-a} = \dfrac{z}{2c-a-b}$ হলে প্রমাণ করুন, $x+y+z=0$

সমাধান : মনে করুন, $\dfrac{x}{2a-b-c} = \dfrac{y}{2b-c-a} = \dfrac{z}{2c-a-b} = k$

$$\therefore \quad \frac{x}{2a-b-c} = k, \frac{y}{2b-c-a} = k, \frac{z}{2c-a-b} = k$$

$$\therefore \quad x = k(2a-b-c), y = k\,(2b-c-a), z = k(2c-a-b)$$

এখন, $x+y+z$

$$= k(2a-b-c) + k(2b-c-a) + k(2c-a-b)$$
$$= k(2a-b-c+2b-c-a+2c-a-b)$$
$$= k(2a-2a+2b-2b+2c-2c)$$
$$= k * 0$$
$$= 0$$

অনুশীলনী-৬.২

1. b ধনাত্মক সংখ্যা এবং $\dfrac{4}{b} = \dfrac{b}{9}$ হলে, b এর মান কত?

2. $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ হলে প্রমাণ করুন, $a : b = c : d$

3. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ হলে প্রমাণ করুন

   (i) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \dfrac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

   (ii) $\dfrac{ma^2+nc^2}{mb^2+nd^2} = \dfrac{a^2}{b^2}$

   (iii) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{ac+bd}{ac-bd} = \dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

4. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ হলে প্রমাণ করুন

   (i) $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{a+b+c}{a-b+c}$

   (ii) $\dfrac{(a+b)^2}{(b+c)^2} = \dfrac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

5. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হলে, প্রমাণ করুন

(i) $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

(ii) $\frac{a^3 + b^3}{b^3 + c^3} = \frac{b^3 + c^3}{c^3 + d^3}$

6. $\frac{x}{b + c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ করুন $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z + x - y} = \frac{c}{x + y - z}$

7. $\frac{x}{b - c} = \frac{y}{c - a} = \frac{z}{a - b}$ হলে, প্রমাণ করুন $x + y + z = 0$

8. $\frac{2x - y}{x - 2y} = \frac{a}{b}$ হলে, প্রমাণ করুন $\frac{x}{y} = \frac{2a - b}{a - 2b}$

9. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রমাণ করুন

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$$

পাঠ ৩ : বিবিধ সমস্যার সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পূর্বের পাঠগুলোতে অনুপাত, সমানুপাতের ধারণা, অনুপাতের রূপান্তর ইত্যাদি সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করেছেন। বর্তমান পাঠে অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান দেখানো হল।

উদাহরণ 1 : $\dfrac{b+x+\sqrt{b^2-x^2}}{b+x-\sqrt{b^2-x^2}} = \dfrac{b}{x}$ হলে x এর মান কত?

সমাধান : $\dfrac{b+x+\sqrt{b^2-x^2}}{b+x-\sqrt{b^2-x^2}} = \dfrac{b}{x}$

বা, $\dfrac{b+x+\sqrt{b^2-x^2}+b+x-\sqrt{b^2-x^2}}{b+x+\sqrt{b^2-x^2}-b-x+\sqrt{b^2-x^2}} = \dfrac{b+x}{b-x}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2b+2x}{2\sqrt{b^2\text{-}x^2}} = \dfrac{b+x}{b-x}$

বা, $\dfrac{2(b+x)}{2\sqrt{b^2-x^2}} = \dfrac{b+x}{b-x}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{b^2-x^2}} = \dfrac{1}{b-x}$ [উভয়পক্ষকে $b+x$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $b-x=\sqrt{b^2-x^2}$

বা, $(b-x)^2 = (\sqrt{b^2-x^2}\ )^2$ [বর্গ করে]

বা, $b^2-2bx+x^2=b^2-x^2$

বা, $x^2+x^2-2bx=b^2-b^2$

বা, $2x^2-2bx=0$

বা, $2x(x-b)=0$

বা, $x(x-b)=0$

বা, $x-b=0$ [উভয়পক্ষকে x দ্বারা ভাগ করে, কারণ $\dfrac{b}{x}$ শর্তে $x{\neq}0$]

বা, $x=b$

লক্ষণীয় : $b + x \neq 0$ কারণ $b + x = 0$ হলে প্রদত্ত শর্তে বামপক্ষে ভগ্নাশংটি হয় $\frac{0}{0}$ যা অর্থহীন। আবার $x \neq 0$, কারণ ডানপক্ষে $\frac{b}{x}$ হতে বুঝা যায় x (হর) শূন্য নয়।

উদাহরণ 2 : $\frac{a+b}{x+y} = \frac{b+c}{y+z} = \frac{c+a}{z+x}$ হলে প্রমাণ করুন যে প্রত্যেকটির অনুপাত $\frac{a+b+c}{x+y+z}$

সমাধান : ধরুন, $\frac{a+b}{x+y} = \frac{b+c}{y+z} = \frac{c+a}{z+x} = k$

$\therefore \quad \frac{a+b}{x+y} = k, \frac{b+c}{y+z} = k, \frac{c+a}{z+x} = k$

$\therefore \quad a + b = k(x+y), b + c = k(y+z), c + a = k(z+x)$

বা, $a + b + b + c + c + a = k(x+y) + k(y+z) + k(z+x)$

বা, $2a + 2b + 2c = k(2x + 2y + 2z)$

বা, $2(a+b+c) = 2k(x+y+z)$

বা, $a + b + c = k\,(x+y+z)$

$\therefore \quad \frac{a+b+c}{x+y+z} = k$

$\therefore \frac{a+b}{x+y} = \frac{b+c}{y+x} = \frac{c+a}{z+x} = k$ হলে তাদের প্রত্যেকটির অনুপাত $\frac{a+b+c}{x+y+z}$

উদাহরণ 3 : $\frac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$ হলে প্রমাণ করুন a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান : $\frac{a^3+b^3}{a-b+c} = a(a+b)$

বা, $\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a-b+c} = a(a+b)$

বা, $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b+c} = a$

বা, $a^2 - ab + b^2 = a(a-b+c)$

বা, $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + ac$

বা, $a^2 - ab + b^2 - a^2 + ab = ac$

বা, $b^2 = ac$

বা, $ac = b^2$

বা, $ac = b.b$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

অতএব, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতি

উদাহরণ 4 : যদি $ax = by = cz$ হয় তবে দেখান যে, $\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$

সমাধান : ধরুন, $ax = by = cz = k$

$$\therefore\ ax = k, \quad by = k \quad\quad cz = k$$

বা, $x = \frac{k}{a}$ $\quad \therefore\ y = \frac{k}{b}$ $\quad \therefore\ z = \frac{k}{c}$

এখন, $\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

$$= \frac{\frac{k}{b}\cdot\frac{k}{c}}{\left(\frac{k}{a}\right)^2} + \frac{\frac{k}{c}\cdot\frac{k}{a}}{\left(\frac{k}{b}\right)^2} + \frac{\frac{k}{a}\cdot\frac{k}{b}}{\left(\frac{k}{c}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{k^2}{bc}}{\frac{k^2}{a^2}} + \frac{\frac{k^2}{ca}}{\frac{k^2}{b^2}} + \frac{\frac{k^2}{ab}}{\frac{k^2}{c^2}}$$

$$= \left(\frac{k^2}{bc} * \frac{a^2}{k^2}\right) + \left(\frac{k^2}{ca} * \frac{b^2}{k^2}\right) + \left(\frac{k^2}{ab} * \frac{c^2}{k^2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$$

উদাহরণ 5 : $x = \frac{3}{5}$ হলে, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ এর মান কত?

সমাধান : $x = \frac{3}{5}$

অতএব, $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{\frac{5+3}{5}}{\frac{5-3}{5}} = \frac{8}{2} = 4$

$$\therefore\ \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{4} = 2$$

বা, $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = 2$

বা, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{2+1}{2-1}$

বা, $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = 3$

এখানে শুধু ধনাত্মক বর্গমূল নেয়া হয়েছে। কারণ | চিহ্ন দ্বারা প্রচলিত রীতি অনুযায়ী ধনাত্মক বর্গমূল বুঝায়।

উদাহরণ 6 : $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$ এবং $x + y + z = 0$ হলে দেখান যে, প্রত্যেকটির অনুপাত $= 1$

সমাধান : ধরুন, $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y} = k$

$\therefore \frac{x}{3x-y-z} = k, \frac{y}{3y-z-x} = k, \frac{z}{3z-x-y} = k$

$\therefore x = k(3x-y-z), y = k(3y-z-x), z = k(3z-x-y)$

এখন, $x+y+z = k(3x-y-z) + k(3y-z-x) + k(3z-x-y)$

$= k(3x-y-z+3y-z-x+3z-x-y)$

$= k(3x-2x+3y-2y+3z-2z)$

$= k(x+y+z)$

$\therefore k = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$

$\therefore$ প্রত্যেকটির অনুপাত $= 1$

অনুশীলনী ৬.৩

1. $\frac{2x+3y}{3x+2y} = \frac{5}{6}$ হলে, x ও y এর অনুপাত কত?
2. $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে প্রমাণ করুন, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।
3. $x = \frac{4}{5}$ হলে $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ এর মান কত?
4. $x = \frac{\sqrt[3]{m+1}+\sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1}-\sqrt[3]{m-1}}$ হলে, প্রমাণ করুন $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$
5. $a>b>0$ এবং $x = \frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ হলে, প্রমাণ করুন $bx^2 - 2ax + b = 0$
6. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = p$ হলে, প্রমাণ করুন $p^2 - \frac{2p}{x} + 1 = 0$
7. $lx = my = nz$ হলে, প্রমাণ করুন $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$
8. $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ হলে, $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z$ এর মান কত?
9. $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z \neq 0$ হলে, প্রমাণ করুন প্রত্যেকটি অনুপাতের মান $= \frac{1}{a+b+c}$
10. A ও B সমবেগে নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করে যথাক্রমে t_1, ও $(t_1 + t_2)$ মিনিটে। A ও B এর গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় করুন।