ইউনিট ৮

সূচক ও লগারিদম

ভূমিকা

কলাম এবং সারিতে বর্গাকারে সাজানো কোন বস্তুর সংখ্যা নির্ণয় করতে হলে একই সংখ্যাকে বার বার গুণ করার প্রয়োজন হয়। এছাড়াও আরও অনেক ক্ষেত্রে একই সংখ্যার বহু গুণিতক প্রয়োজন। এ সকল সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সূচকের ধারণা এবং এর প্রতীক বিশেষভাবে উপযোগী। বড় বড় সংখ্যার গুণফল, ভাগফল বা মূলদ সূচকযুক্ত ঘাতের মান বের করতে হলে লগারিদমের ব্যবহার প্রয়োজন। এ ইউনিটে আপনারা সূচকের ধারণা, এর ব্যবহার এবং লগারিদমের নানা ব্যবহার সম্পর্কে অবহিত হবেন।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- সূচক সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- ঘাত বা শক্তি এবং ভিত্তি সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- সম ভিত্তির শক্তির গুণফল ও ভাগফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- ভিন্ন ভিত্তির একই শক্তির গুণফল ও ভাগফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সূচক নির্ণয় করতে পারবেন;
- লগারিদম সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করতে পারবেন;
- সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- লগ সারণি ব্যবহার করে সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ নির্ণয় করতে পারবেন।

পাঠ ১ সূচক, সূচকের ধর্ম ও নিয়মাবলি

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সূচক কি তা বলতে পারবেন;
- ঘাত বা শক্তি কি তা বলতে পারবেন;
- ভিত্তি কি তা বলতে পারবেন;
- একই সংখ্যার P সংখ্যক উৎপাদকের গুণফল কি তা বলতে পারবেন;
- সম ভিত্তির শক্তির গুণফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- সমভিত্তির শক্তির ভাগফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- শক্তির শক্তি কি এবং এর মান বলতে পারবেন;
- ভিন্ন ভিত্তির একই শক্তির গুণফল নির্ণয় করতে পারবেন;
- ভিন্ন ভিত্তির একই শক্তির ভাগফল নির্ণয় করতে পারবেন।

ধনাত্মক পূর্ণ সংখার সূচক

$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ বা, 32

$5 \times 5 \times 5 = 5^3$ বা, 125

অর্থাৎ n যদি একের চেয়ে বড় কোন পূর্ণ সংখ্যা হয়, তাহলে a^n দ্বারা n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণফল বুঝায়।

$a^n = a \times a \times \dots\dots\dots\dots \times a$ (n সংখ্যক a)

a^n কে a এর nতম ঘাত বা শক্তি বলা হয়।

যেমন, a^2 কে a এর দ্বিঘাত এবং a^3 কে a এর ত্রিঘাত বলা হয়। তবে প্রচলিত কথায় a^2কে a এর বর্গ এবং a^3 কে a এর ঘন বলা হয়ে থাকে।

a^n –এ n কে a এর সূচক এবং a কে ভিত্তি বলা যায়। সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সূচকের নিয়ম অর্থপূর্ণ করার জন্য a^1 কে a ধরা হয়।

a^n –এ n কে a এর সূচক এবং a কে ভিত্তি বলা হয়

যদি $p = q$ হয়, তবে $x^p = x^q$ হবে।

বিপরীতক্রমে $x^p = x^q$ হলে $p = q$ হলে।

আবার, যদি $x = y$ হয়, তাহলে $x^p = y^p$ হবে।

বিপরীতক্রমে x ও y উভয়েই ধনাত্মক সংখ্যা হলে,

যদি $x^2 = y^2$ হয়, তাহলে $x = y$ হবে।

সূচকের নিয়মাবলি

(1) একই ভিত্তির শক্তির গুণ

x যে কোন সংখ্যা এবং p ও q যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে $x^p \times x^q = x^{p+q}$

$$\boxed{x^p \times x^q = x^{p+q}}$$

প্রমাণ : $x^3.x^5 = (x.x.x)\ (x.x.x.x.x) = x.x.x.x.x.x.x.x = x^8 = x^{3+5}$

আবার, $x^2.x^4 = (x.x)\ (x.x.x.x) = x.x.x.x.x.x = x^6 = x^{2+4}$

$\therefore x^p.x^q = \dfrac{(x.x.x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x)}{p \text{ xÄUqT C“kJhT}} \quad \dfrac{(x.x.x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x)}{q \text{ xÄUqT C“kJhT}}$

$= x^{p+q}$ (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত : $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots, p_n$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে,

$x^{p_1}.x^{p_2}.x^{p_3}.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x^{p_n} = x^{p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots p_n}$

(2) একই ভিত্তির শক্তির ভাগ

x যে কোন অশূন্য সংখ্যা এবং p ও q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে,

$x^p \div x^q = x^{p-q}$

$$\boxed{x^p \div x^q = x^{p-q}}$$

প্রমাণ : $x^4 \div x^2 = \dfrac{x^4}{x^2} = \dfrac{x.x.x.x}{x.x} = x^2 = x^{4-2}$

আবার, $x^6 \div x^3 = \dfrac{x^6}{x^3} = \dfrac{x.x.x.x.x.x}{x.x.x} = x^3 = x^{6-3}$

$x^p \div x^q = \dfrac{x^p}{x^q} = \dfrac{x.x.x\ldots\ldots x\ (p \text{ xÄUqT } x)}{x.x.x\ldots\ldots x\ (q \text{ xÄUqT } x)}$

$= x^{p-q}$ (k´oJKef)

(3) শক্তির শক্তি

x যে কোন সংখ্যা এবং p ও q ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে,

$(x^p)^q = x^{pq}$

$$\boxed{(x^p)^q = x^{pq}}$$

প্রমাণ : $(x^p)^q = x^p.x^p.x^p.\ldots\ldots x^p$ (q xÄUqT x^p)

$= x^{p+p+p+\ldots\ldots\ldots+p}$ (q সংখ্যক)

$= x^{pq}$ (প্রমাণিত)

(4) ভিন্ন ভিত্তির গুণফলের শক্তি

x, y যে কোন সংখ্যা এবং p যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $(xy)^p = x^p\ y^p$

$$\boldsymbol{(xy)^p = x^p\ y^p}$$

প্রমাণ : $(xy)^p = (xy) \text{ X } (xy) \text{ X } \dots \dots \dots \text{ X } (xy)$ (p সংখ্যক xy)

$= (x \text{ X } x \text{ X } x \text{ X } x \text{ X } \dots\dots\dots\dots \text{ X } x).\ (y \text{ X } y \text{ X } y \text{ X } \dots \dots \dots\dots \text{ X } y)$

p সংখ্যক x p সংখ্যক y

$= x^p\ y^p$ (k´oJKef)

(5) ভিন্ন ভিত্তির ভাগফলের শক্তি

x যে কোন সংখ্যা, y যে কোন অশূন্য সংখ্যা এবং p ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}}$$

প্রমাণ : $\left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x}{y} \text{ X } \frac{x}{y} \text{ X } \dots\dots \text{ X } \frac{x}{y}\left(p \text{ xÄUqT } \frac{x}{y}\right)$

$$= \frac{x \text{ X } x \text{ X } x \text{ X } \dots. \dots \text{ X } x \ (p \text{ xÄUqT } x)}{y \text{ X } y \text{ X } y \text{ X} \dots \dots. \text{ X } y \ (p \text{ xÄUqT } y)}$$

$$= \frac{x^p}{y^p}$$

উদাহরণ 1 : 3^3 = কত?

সমাধান : $3^3 = 3 \text{ X } 3 \text{ X } 3$

$= 27$

উদাহরণ 2 : $2^4 \text{ X } 2^3$ = কত?

সমাধান : $2^4 \text{ X } 2^3 = 2^{4+3} = 2^7 = 128$

উদাহরণ 3 : $2^x = 64$ হলে, x= কত?

সমাধান : $64 = 2 \text{ X } 2 \text{ X } 2 \text{ X } 2 \text{ X } 2 \text{ X } 2 = 2^6$

$\therefore 2^x = 2^6$

সুতরাং $x = 6$

উদাহরণ 4 : $x^4 = 625$ হলে $x =$ কত?

সমাধান : $625 = 5 \text{ X } 5 \text{ X } 5 \text{ X } 5 = 5^4$

$\therefore x^4 = 5^4$

সুতরাং $x = 5$

উদাহরণ 5 : সরল করুন : $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

সমাধান : $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \text{ X } \frac{2}{3} \text{ X } \frac{2}{3}$

$= \frac{8}{27}$

উদাহরণ 6 : $3^5 + 3^2 =$ কত?

সমাধান : $3^5 \div 3^2 = \frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

উদাহরণ 7 : সরল করুন : $(\sqrt{2} \text{ X } \sqrt{3})^4$

সমাধান : $(\sqrt{2} \text{ X } \sqrt{3})^4 = (\sqrt{2})^4 \text{ X } (\sqrt{3})^4$

$= \{(\sqrt{2})^2\}^2 \text{ X } \{(\sqrt{3})^2\}^2$

$= (2)^2 \text{ X } (3)^2$

$= 4 \text{ X } 9 = 36$

উদাহরণ 8 : মান নির্ণয় করুন $\sqrt{7}\,(\sqrt{28} - \sqrt{7})$

সমাধান : $\sqrt{7}\,(\sqrt{28} - \sqrt{7})$

$= \sqrt{7}\,(\sqrt{7.2.2} - \sqrt{2})$

$= \sqrt{7}\,(2\sqrt{7} - \sqrt{7})$

$= 2.7 - 7$

$= 14 - 7$

$= 7$

উদাহরণ 9 : মান নির্ণয় করুন : $\frac{4^n - 1}{2^n - 1}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \frac{4^n - 1}{2^n - 1}$

$= \frac{(2^2)^n - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{2n} - 1}{2^n - 1} = \frac{(2^n)^2 - 1}{2^n - 1}$

$= \frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{(2^n - 1)} = 2^n + 1$

উদাহরণ 10 : $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} =$ কত?

সমাধান : $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{2}{3}$

অনুশীলনী ৮.১

1. $4^x = 256$ হলে, x এর মান কত?
2. $x^5 = 243$ হলে, x এর মান কত?
3. $x^4 = \frac{1}{81}$ হলে, x এর মান কত?
4. $x^p = x^3$ হলে, P এর মান কত?
5. $\frac{a^m}{a^n}$ = কত?
6. $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ = কত?
7. সত্য–মিথ্যা নির্ণয় করুন :

   (i) $3^4=4^3$ (ii) $2^6 = 4^3$ (iii) $5^3 = 3^5$

   (iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ (v) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

   (vi) $(2^2)^3 = 64$
8. x এর pতম ঘাত লিখুন।
9. $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}$ = কত?
10. মান নির্ণয় করুন :

    (i) $\sqrt{3}\,(\sqrt{108} - 3\sqrt{12})$

    (ii) $3^5 - 5^3 + 2^5 + 4^3$

পাঠ ২ ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সূচক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- যে কোন অশূন্য সংখ্যার ঘাত শূন্য হলে তার মান কি তা বলতে পারবেন;
- যে কোন অশূন্য সংখ্যার ঘাত ঋণাত্মক হলে তার মান কি তা বলতে পারবেন।

ইতোপূর্বে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার ক্ষেত্রে সূচকের নিয়মাবলির প্রয়োগ দেখান হয়েছে। কিন্তু ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা কিংবা শূন্যের বেলায় এর ব্যবহার কেমন হবে তা জানা নেই। সুতরাং ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা

এবং শূন্যের জন্যেও সূচক নিয়মাবলির প্রয়োগ করা আবশ্যক। অর্থাৎ p ও q যে কোন পূর্ণ সংখ্যা (ঋণাত্মক, ধনাত্মক এবং শূন্য, $p>q$, $p<q$ বা $p=q$) হলে পূর্বের সূচক নিয়মাবলি কার্যকর রাখার জন্য ঘাতের নতুন সংজ্ঞা দেওয়া প্রয়োজন।

শূন্য এবং ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার ক্ষেত্রে ঘাতের সংজ্ঞা নিচে দেওয়া হল :

(1) $x^0 = 1 \ (x \neq 0)$

প্রমাণ : p ও q যে কোন পূর্ণ সংখ্যা হলে,

$$x^p \ \mathrm{X}\ x^q = x^{p+q}$$

$q = 0$ হলে,

$$x^p \ \mathrm{X}\ x^0 = x^p \quad [\therefore p + 0 = p]$$

বা, $x^0 = \frac{x^p}{x^p}$ [উভয়পক্ষে x^p দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \quad x^0 = 1$ (প্রমাণিত)

(2) $x^{-q} = \frac{1}{x^q}$ ($x \neq 0$, q ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)

প্রমাণ : p ও q যে কোন পূর্ণ সংখ্যা হলে,

$$x^p + x^q = x^{p-q}$$

$p = 0$ হলে,

$$x^0 \div x^q = x^{0-q}$$

বা $1 \div x^q = x^{-q}$

$$.. \frac{1}{x^q} = x^{-q}$$

$\therefore x^{-q} = \frac{1}{x^q}$ (প্রমানিত)

সুতরাং $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ ইত্যাদি।

n তম মূল

যদি p একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তাহলে p এর nতম মূল একটি বাস্তব সংখ্যা x, যখন $x^n = p$। প্রতিটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যারই একটি ধনাত্মক n তম মূল রয়েছে।

এই মূলটিকে $\sqrt[n]{p}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং $q = \sqrt[n]{p}$ এর অর্থ, $q > 0$ এবং $q^n = p$

আবার, যদি p একটি ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় এবং n বিজোড় সংখ্যা হয়, তাহলে p এর একটি ঋণাত্মক n তম মূল থাকবে এবং তাকে $\sqrt{p}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেমন : $\sqrt[3]{-8} = -2$, কারণ $(-2)^3 = -8$

আবার, যদি $p = 0$ হয় তাহলে p এর n তম মূলও 0 হবে।

অর্থাৎ $\sqrt[n]{p} = 0$

সুতরাং n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, প্রকৃত বা অপ্রকৃত যে কোন ভগ্নাংশ হোক না কেন, যদি $n = \frac{p}{q}$ যেখানে p,q পূর্ণ সংখ্যা এবং $q>0$ হয়, তাহলে $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

উদাহরণ 1 : $5^{\frac{2}{3}} \div 5^{\frac{1}{3}}$ = কত?

সমাধান : $5^{\frac{2}{3}} \div 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

উদাহরণ 2 : x ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং p, q, r মূলদ সংখ্যা হলে দেখান যে,

$$\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^r \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^p \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^q = 1$$

সমাধান : বামপক্ষ $= \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^r \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^p \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^q$

$$= \left(x^{p-q}\right)^r \left(x^{q-r}\right)^p \left(x^{r-p}\right)^q$$

$$= x^{rp-qr} . x^{pq-rp} . x^{qr-pq}$$

$$= x^{rp-qr+pq-rp+qr-pq}$$

$= x^0$

$= 1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3 : সরল করুন, $\dfrac{2^{a+1}}{\left(2^a\right)^{a-1}}$ ☼ $\dfrac{4^{a+1}}{\left(2^{a-1}\right)^{a+1}}$

সমাধান : $\dfrac{2^{a+1}}{\left(2^a\right)^{a-1}} + \dfrac{4^{a+1}}{\left(2^{a-1}\right)^{a+1}}$

$= \dfrac{2^{a+1}}{2^{a^2-a}} + \dfrac{(2^2)^{a+1}}{2^{a^2-1}}$

$= \dfrac{2^{a+1}}{2^{a^2-a}} \div \dfrac{2^{2a+2}}{2^{a^2-1}}$

$= 2^{a+1-a^2+a} + 2^{2a+2-a^2+1}$

$= 2^{2a+1-a^2} + 2^{2a-a^2+3}$

$= 2^{2a+1-a^2-2a+a^2-3}$

$= 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

উদাহরণ 4 : $\left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-1}$ = কত?

সমাধান : $\left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-1}$

$= \dfrac{1}{x^{-1} + y^{-1}} = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

$= \dfrac{1}{\frac{y+x}{xy}} = \dfrac{xy}{x+y}$

উদাহরণ 5 : সরল করুন : $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

সমাধান : $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$

$= 3 - 2$

$= 1$

উদাহরণ 6 : যদি $x^y = y^x$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}-1}$

সমাধান : বামপক্ষ $= \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$

$= \frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}} = \frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{x.\frac{1}{y}}}$

$= \frac{x^{\frac{x}{y}}}{(x^y)^{\frac{1}{y}}}$ $[\therefore y^x = x^y]$

$= \frac{x^{\frac{x}{y}}}{x} = x^{\frac{x}{y}-1}$

=ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 7 : মান নির্ণয় করুন $(27)^{\frac{2}{3}} + (64)^{\frac{2}{3}}$

সমাধান : $(27)^{\frac{2}{3}} + (64)^{\frac{2}{3}}$

$= (3^3)^{\frac{2}{3}} + (4^3)^{\frac{2}{3}}$

$= 3^{3.\frac{2}{3}} + 4^{3.\frac{2}{3}}$

$= 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16$

$= 25$

অনুশীলনী ৮.২

1. $x^{p} \times x^{q} = x^{p}$ হলে, q এর মান কত?

2. $x^{a} \times x^{-b} = 1$ হলে প্রমাণ করুন যে, $a = b$

3. $x^{-5} = 1$ হলে, x এর মান কত?

সরল করুন (4–9 পর্যন্ত)

4. $\sqrt{x^{-1}y} \,.\, \sqrt{y^{-1}z} \,.\, \sqrt{z^{-1}x}$ [x, y, z প্রত্যেকে > 0]

5. $\dfrac{3.2^{n}-4.2^{n-2}}{2^{n}-2^{n-1}}$

6. $m-\left\{m^{-1}+(n^{-1}-m)^{-1}\right\}^{-1}$ [$mn \neq 1$]

7. $\left(\dfrac{x^{p+q}}{x^{2r}}\right)\left(\dfrac{x^{q+r}}{x^{2p}}\right)\left(\dfrac{x^{r+p}}{x^{2q}}\right)$

8. $\dfrac{2^{m}\,(2^{m-1})^{m}\,.\,2^{2m}}{(2^{m+1}).\,2^{m-1}\,(2^{m})^{m}}$

9. যদি $x = m^{p}$, $y = m^{q}$ এবং $m^{2} = \left(x^{q}y^{p}\right)^{r}$ হয় তবে দেখান যে, $pqr = 1$

পাঠ ৩ লগারিদম ও লগারিদমের সূত্রাবলী

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- লগারিদমের সংজ্ঞা বলতে পারবেন;
- লগারিদম কত প্রকার তা বলতে পারবেন;
- লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক বের করতে পারবেন;
- লগারিদমের সূত্রগুলো বলতে পারবেন;
- লগারিদমের সূত্র ব্যবহার করে এর যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ বের করতে পারবেন;
- সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ লিখতে পারবেন;
- বৈজ্ঞানিক রূপে লিখিত সংখ্যাকে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারবেন।

লগারিদমের ধারণা

গণিতে আমরা বিভিন্ন রকমের সংখ্যা নিয়ে কাজ করি। যখন কোন সংখ্যা অনেক বড় হয়, তখন তার গুণফল, ভাগফল বা মূলদ সূচক যুক্ত ঘাতের মান বের করার জন্য লগারিদমের ব্যবহার করা হয়।

মনে করুন $a>0$, $a\neq 1$ হলে এবং ধনাত্মক সংখ্যা।

$x\in R$ হলে যদি $a^x = n$ হয়, তাহলে x কে n এর a ভিত্তিক লগারিদম (বা লগ) বলা হয়।

অর্থাৎ $a^x = n$ হলে, $x = \log_a n$ হবে এবং একে n-এর a ভিত্তিক লগ পড়তে হবে।

সুতরাং $a^x = n$ এবং $x = \log_a n$ একই অর্থ প্রকাশ করে।

$x\in R$ হলে যদি $a^x = n$ হয়, তাহলে x কে n এর a ভিত্তিক লগারিদম বলে। অর্থাৎ $a^x = n$ হলে, $x = \log_a n$

লগারিদমের প্রকারভেদ

গণিতে দুই ধরনের লগারিদমের প্রচলন দেখা যায়। যথা: প্রাকৃতিক লগারিদম এবং সাধারণ লগারিদম। প্রাকৃতিক লগারিদমের প্রবর্তন করেন জন নেপিয়ার। এটি একটি e ভিত্তিক লগ। e একটি অমূলদ সংখ্যা এবং এর আসন্ন মান 2.71828। আর সাধারণ লগারিদম হল 10 ভিত্তিক লগ। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সাধারণত সাধারণ লগারিদমই প্রচলিত।

প্রাকৃতিক লগারিদমকে প্রকাশ করা হয় $\log_e x$ দ্বারা। একে আবার $\ln x$ ও লেখা হয়।

এবং সাধারণ লগারিদম প্রকাশ করা হয় $log_{10} x$ দ্বারা।

লগারিদম দুই প্রকার। যথা : (১) প্রাকৃতিক লগারিদম এবং (২) সাধারণ লগারিদম।

এই দুই লগারিদমের মধ্যে আবার একটি সম্পর্কও বিদ্যমান। সম্পর্কটি হল, $0.4343\ lnx = log_{10} x$

$$\log_{10} x = 0.4343 \ln x$$

সাধারণ লগারিদমের ব্যপক ব্যবহারের কারণ হল এর ভিত্তি 10 হওয়ায় তার যে কোন ঘাত নির্ণয় করা সহজ। সাধারণ লগারিদমের বহুল ব্যবহারের ফলে সাধারণত এর ভিত্তি উহ্য রাখা হয়। অর্থাৎ $\log_{10}N$ কে $\log N$ লেখা হয়। বৈজ্ঞানিক কাজে অনেক বড় এবং অনেক ছোট সংখ্যার ব্যবহার আছে। এই সব সংখ্যা ব্যবহারের সুবিধাতে সংখ্যাগুলোকে $a \times 10^n$ আকারে লেখা হয়। এক্ষেত্রে a এর মান এক বা একের চেয়ে বড় কিন্তু দশের চেয়ে ছোট অর্থাৎ $1 \le a < 10$।

সংখ্যার এই রূপকে সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ বলা হয়। একে সংখ্যার আদর্শ রূপও বলে।

যেমন : 10000 এর আদর্শ রূপ 10^4;

0.0001 এর আদর্শ রূপ 10^{-4} ;

উপরের দুটি ক্ষেত্রে a এর মান 1.

অনুরূপভাবে, 34,00,000 এর বৈজ্ঞানিক রূপ 3.4×10^6 এবং 0.000052 এর বৈজ্ঞানিক রূপ 5.2×10^{-5}

সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক

যদি N এর বৈজ্ঞানিক রূপ $a \times 10^n$ হয়, তাহলে

$\log N = \log (a \times 10^n) = \log a + \log 10^n$

$= \log a + n$

লক্ষ করুন কোন ধনাত্মক সংখ্যা N এর সাধারণ লগারিদমে দুইটি অংশ থাকে। একটি অংশে পূর্ণসংখ্যা (ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য) এবং অপর অংশ শূন্য বা শূন্য এবং 1 এর মধ্যবর্তী কোন সংখ্যা।

অর্থাৎ উক্ত পূর্ণ সংখ্যাটিকে $\log N$ এর পূর্ণক এবং অপর অংশটিকে $\log N$ এর অংশক বলে।

নিচের উদাহরণটি লক্ষ করলে সহজেই লগারিদমের পূর্ণক নির্ণয় করা যাবে।

সূচক পদ্ধতির ক্ষেত্রে	লগারিদমের পদ্ধতির ক্ষেত্রে
$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
$10^2 = 100$	$\log 100 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log 1000 = 3$

উপরের উদাহরণ থেকে বুঝা যায় যে 1 থেকে 10 পর্যন্ত সংখ্যার লগারিদম 0 এবং 1 এর মাঝের কোন ভগ্নাংশ, 10 এবং 100 পর্যন্ত সংখ্যার লগারিদম 1 এর সাথে কিছু ভগ্নাংশ যোগ। অনুরূপভাবে, 100 থেকে 1000 পর্যন্ত সংখ্যার লগারিদম হবে 2 যোগ কিছু ভগ্নাংশ। অর্থাৎ সহজভাবে বলতে গেলে কোন সংখ্যার লগারিদমের পূর্ণক হবে সংখ্যাটির অঙ্ক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম।

কোন সংখ্যার লগারিদমের পূর্ণক হবে সংখ্যাটির অঙ্ক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম।

উপরের আলোচনা থেকে বুঝা যায় সাধারণ লগের ক্ষেত্রে কোন সংখ্যার আদর্শরূপে 10 এর শক্তির সূচকই ঐ সংখ্যার লগের পূর্ণক।

অতএব, log3.75 এর পূর্ণক 0, কারণ $3.75 = 3.75 \times 10^0$

log 375 এর পূর্ণক 2, কারণ $375 = 3.75 \times 10^2$

log0.000375 এবং পূর্ণক – 4, কারণ, $0.000375 = 3.75 \times 10^{-4}$

সুতরাং সংখ্যাটি যদি 1 অপেক্ষা বড় ধনাত্মক সংখ্যা হয় তাহলে তার আদর্শরূপে 10 এর শক্তির সূচক শূন্য অথবা কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হবে এবং তা সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর বামের অঙ্ক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম।

আর সংখ্যাটি যদি 1 অপেক্ষা ছোট ধনাত্মক সংখ্যা হয় তাহলে তার বৈজ্ঞানিকরূপে 10 এর শক্তির সূচক ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হবে এবং এর পরমমান সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু এবং দশমিকের ডানে প্রথম অশূন্য অঙ্কের মাঝে অবস্থিত শূন্যের সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি।

যে কোন লগারিদমের অংশক হবে একটি অমূলদ সংখ্যা এবং এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয়।

অংশক নির্ণয়ের প্রক্রিয়াটি বেশ জটিল। কিন্তু সাধারণত অংশক নির্ণয়ের প্রয়োজন পড়ে না। কেননা অংশক নির্ণয় করার জন্য লগ সারণি পাওয়া যায়। লগ সারণি ব্যবহার করে অংশক নির্ণয়ের পদ্ধতি পরবর্তী পাঠে শিখতে পারবেন।

যে কোন লগারিদমের অংশক হবে একটি অমূলদ সংখ্যা এবং এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ 1 : 45320 এর লগের পূর্ণক নির্ণয় করুন।

সমাধান : 45320 সংখ্যাটি 1 অপেক্ষা বড় এবং এর দশমিক বিন্দুর বামে 5টি অঙ্ক রয়েছে। কারণ 45320 কে 45320.0 লেখা যায়।

সুতরাং log45320 এর পূর্ণক 5–1 =4

উদাহরণ 2 : 122.35 এর লগের পূর্ণক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ 122.35 সংখ্যাটি 1 অপেক্ষা বড়। এর দশমিক বিন্দুর বামে 3টি অঙ্ক রয়েছে।

সুতরাং log122.35 এর পূর্ণক 3–1 = 2

উদাহরণ 3 : 0.00325 এর লগের পূর্ণক নির্ণয় করুন।

সমাধান : 0.00325 সংখ্যাটি 1 অপেক্ষা ছোট। এর দশমিক বিন্দুর ডানে প্রথম সার্থক সংখ্যা বা অশূন্য সংখ্যা হল 3 এবং দশমিক বিন্দু ও 3 এর মাঝে শূন্য রয়েছে 2টি।

সুতরাং log 0.00325 এর পূর্ণকের পরমমান হল 2 + 1 = 3

অতএব log0.00325 এর পূর্ণক হল –3.

উদাহরণ 4 : $\log_5 25$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $25 = 5^2$

$\therefore \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

উদাহরণ 5 : $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{-3}$

$\therefore \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$

উদাহরণ 6 : $\log_3 3\sqrt{3}$ এর মান কত?

সমাধান : $3\sqrt{3} = 3.3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \log_3 3\sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}$

উদাহরণ 7 : $\log_{3\sqrt{2}} 324 = x$ হলে x এর মান কত?

সমাধান : প্রশ্নমতে, $(3\sqrt{2})^x = 324 = 81 * 4 = 3^4 * 2^2$

$= 3^4 * (\sqrt{2})^4 = (3\sqrt{2})^4$

$\therefore x = 4$

লগারিগমের সূত্রাবলি

লগারিদমের ব্যবহারিক প্রয়োগের জন্য কতকগুলো সূত্রের সাহায্য নেওয়া হয়। সূত্রগুলো নিম্নরূপ :

যখন $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তখন

1. M ধনাত্মক এবং r যে কোন বাস্তব সংখ্যা হলে

   $\log_a M^r = r \log_a M$

2. $\text{Log}_a MN = \log_a M + \log_a N$

3. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

যদি লগের ভিত্তি উহ্য থাকে তাহলে সর্বত্র একই ভিত্তি ধরতে হবে।

$$\log_a M^r = r \log_a M$$
$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$
$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

উদাহরণ 8 : দেখান যে, $\log 15 = \log 3 + \log 5$

সমাধান : $\log 15 = \log (3 \text{ X } 5) = \log 3 + \log 5$

উদাহরণ 9: দেখান যে, $\log 8 = 5\log 2 - \log 4$

সমাধান : $\log 8 = \log(\frac{32}{4}) = \log 32 - \log 4$

$= \log 2^5 - \log 4$

$= 5 \log 2 - \log 4$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 10 : সরল করুন : $2 \log \frac{16}{9} + 3\log \frac{27}{4} - \log \frac{243}{4}$

সমাধান : $2 \log \frac{16}{9} + 3 \log \frac{27}{4} - \log \frac{243}{4}$

$= \log (\frac{16}{9})^2 + \log(\frac{27}{4})^3 - \log \frac{243}{4}$

$= \log\left\{(\frac{16}{9})^2 \text{ X } (\frac{27}{4})^2 + \frac{243}{4}\right\}$

$= \log \left\{\left(\frac{2^4}{3^2}\right)^2 \text{ X} \left(\frac{3^3}{2^2}\right)^3 + \frac{3^5}{2^2}\right\}$

$= \log \left(\frac{2^8}{3^4} \text{ X} \frac{3^9}{2^6} + \frac{3^5}{2^2}\right)$

$= \log \left(2^8 .3^{-4} . 3^9 .2^{-6} .2^2 .3^{-5}\right)$

$= \log \left(2^4\right)$

$= \log 16$

অনুশীলনী ৮.৩

1. মান নির্ণয় করুন :

 (i) $\log_3 27$ (ii) $\log_4 \frac{1}{64}$ (iii) $\log_5 25\sqrt{5}$ (iv) $\log_a a^2$

 (v) $\log_9 3$ (vi) $\log_2 16\sqrt[3]{2}$

2. x এর মান নির্ণয় করুন :

 (i) $\log_3 x = 3$ (ii) $\log_5 x = -4$ (iii) $\log_2 x = 5$ (iv) $\log_x 36 = 2$

 (v) $\log_x \frac{16}{25} = -2$ (vi) $\log_{2\sqrt{3}} 144 = x$

3. লগের পূর্ণক নির্ণয় করুন :

 (i) 7532 (ii) 23.329 (iii) 4.235

 (iv) 0.435 (v) 0.00061

দেখান যে (4–8 পর্যন্ত)

4. $\log 18 = \log 6 + \log 3$
5. $\log 400 = \log 25 + \log 16$
6. $\log 20 = \log 60 - \log 3$
7. $\log\frac{54}{25} = 3\log 3 + 3\log 4 - 5\log 2 - 2\log 5$
8. $\log\frac{500}{243} = 2\log 2 + 3\log 5 - 5\log 3$
9. বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করুন :

 (i) 225 (ii) 0.00375 (iii) 432,000,000

 (iv) 0.625 (v) 0.0000000456

10. সাধারণ দশমিক আকারে প্রকাশ করুন :

 (i) 10^5 (ii) 10^{-3} (iii) 2.23×10^6 (iv) 3.78×10^{-4}

 (v) 6.532×10^2 (vi) 1.65×10^{-8}

সরল করুন :

11. $5\log\frac{2}{3} - 3\log\frac{2}{5} + 2\log\frac{3}{4}$
12. $3\log 4 + 2\log\frac{3}{5} - \log\frac{1}{4}$

পাঠ ৪ লগ সারণি

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- লগ সারণি কি তা বলতে পারবেন;
- লগ সারণি থেকে লগের অংশক বের করতে পারবেন;
- লগ সারণি থেকে কোন সংখ্যার লগারিদমের মান বের করতে পারবেন;
- চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে মুনাফা বের করতে পারবেন;
- চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে তার সবৃদ্ধি মূল বের করতে পারবেন।

লগ সারণি

কোন সংখ্যার সাধারণ লগের ক্ষেত্রে দুইটি অংশ পূর্ণক ও অংশক থাকে তা পূর্বের পাঠেই জেনেছেন। পূর্ণক নির্ণয় আপনারা পূর্বের পাঠেই শিখেছেন। কোন সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক 1 অপেক্ষা ছোট ধনাত্মক সংখ্যা। এই অংশক সাধারণত অমূলদ সংখ্যা এবং এটি বের করা বেশ জটিল। তবে এই জটিল পদ্ধতিতে হিসাব করে অংশক নির্ণয় করার প্রয়োজন হয় না। বড় বড় গুণ, ভাগ, শক্তি নির্ণয় প্রভৃতি সহজে করার জন্য সাধারণ লগারিদম ব্যবহার করা যায়। অংশকের জন্য আসন্ন মান ব্যবহার করা যায়। আর অংশকের আসন্ন মানের জন্য আগে থেকেই একটি তালিকা প্রস্তুত করা রয়েছে। এই তালিকাকে লগ সারণি বলে। এই সারণিতে অংশকের অঙ্কগুলোর মাত্রা দেওয়া থাকে এবং তা ব্যবহারের সময় দশমিক বিন্দু হিসাব করে বসাতে হবে।

যে কোন সারণি ব্যবহার করলে আপনারা দেখতে পাবেন, লগ সারণির বামদিক থেকে প্রথম কলামে 10, 11, 12, ..., 99 পর্যন্ত সংখ্যা আছে। এর ডানে পরবর্তী দশটি কলামে আছে মূল লগ সারণি। এই দশটি কলামের শীর্ষভাগে বাম থেকে ডানে যথাক্রমে 0, 1, 2, ... , 9 লেখা রয়েছে। এই দশটি কলামের ডানে আরও নয়টি পৃথক কলাম রয়েছে। এদের শীর্ষে 1, 2, ..., 9 লেখা রয়েছে। এই অংশটিকে অন্তর সারণি বলা হয়।

নিচের উদাহরণ থেকে বিষয়টি ভালভাবে বুঝা যাবে।

উদাহরণ 1 : লগ সারণি থেকে 2345 এর অংশক নির্ণয় করুন।

সমাধান : লগ সারণির সর্ব বামের কলামে 23 লিখিত সারি বরাবর 4 শীর্ষক কলামে পাওয়া যায় 36922 যার অর্থ 2340 এর লগের অংশক হল 0.36922। কিন্তু log2345 এর অংশক বের করতে হলে সারণির ডান দিকের অন্তর সারণির 5 শীর্ষক কলাম দেখতে হবে। এই কলামে 23 সারি বরাবর 93 রয়েছে। যার অর্থ সংখ্যাটি 2340 থেকে 2345–এ বৃদ্ধি পেলে লগের অংশকের বৃদ্ধির পরিমাণ দাঁড়ায় 0.00093.

সুতরাং log2345 এর অংশক $= 0.36922 + 0.00093 = 0.37015$

লক্ষণীয়, লগ সারণির 4 শীর্ষক কলামে প্রাপ্ত 36922 এবং অন্তর সারণির 5 শীর্ষক কলামে প্রাপ্ত 93 সংখ্যা দুইটিকে আগে যোগ করে পরবর্তীতে দশমিক বসিয়েও অংশকের মান বের করা যায় এবং উভয় ক্ষেত্রে মান একই থাকে।

অর্থাৎ $36922 + 93 = 37015$

$\therefore$ log2345 এর অংশক $= 0.37015$

উদাহরণ 2 : log0.00625 এর মান নির্ণয় করন।

সমাধান : 0.00625 সংখ্যাটি 1 অপেক্ষা ছোট। এর দশমিক বিন্দুর ডানে প্রথম অশূন্য সংখ্যা 6. দশমিক বিন্দু এবং 6 এর মাঝে শূন্য রয়েছে 2টি।

$\therefore$ log0.00625 এর পূর্ণক 3

আবার লগ সারণির সর্ব বামের 62 সারিতে সারণির 5 শীর্ষক কলামে 79588 লিখিত আছে।

$\therefore$ log 0.00625 এর অংশক 0.79588

$\therefore \; \log 0.00625 = \bar{3} + 0.79588 = \bar{3}.79588$

পূর্ণকের – চিহ্নটি পূর্ণকের উপরে লিখিত হয়েছে,

কেননা – 3.79588 লিখলে –3 – 0.79588 বোঝায়।

প্রতিলগ সারণি

লগারিদম ব্যবহার করে সমাধান করতে কখনও কখনও কোন জ্ঞাত সংখ্যা কোন্ সংখ্যার লগ তা জানার প্রয়োজন হয় এবং এজন্য প্রতিলগ ব্যবহার আবশ্যক। প্রতিলগ ব্যবহার করার জন্যও লগ সারণির অনুরূপ প্রতিলগ সারণি প্রস্তুত করা হয়েছে। কোন সংখ্যার লগের অংশক জানা থাকলে প্রতিলগ সারণি থেকে সংখ্যাটি বের করা যায়।

প্রতিলগ সারণির সর্ববামের কলামে অংশকের প্রথম দুটি অঙ্ক, পরবর্তী দশটি কলামে অংশকের তৃতীয় অঙ্ক এবং অন্তর সারণির নয়টি কলামে চতুর্থ অঙ্ক পাওয়া যাবে। লগ সারণির ন্যায় প্রতিলগ সারণিতেও দশমিক বিন্দু উহ্য থাকে।

নিচের উদারহরণ থেকে প্রতিলগ সারণির ব্যবহার বোঝা যাবে।

উদাহরণ 3 : কোন সংখ্যার লগারিদম 0.3429 হলে সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন সংখ্যাটি x

$\therefore \log x = 0.3429 \;\; \therefore x = \text{Anti} \log 0.3429$

এখানে $\log x$ এর পূর্ণক 0 এবং অংশক 0.3429

অংশকের প্রথম দুটি অঙ্ক 34. প্রতিলগ সারণির সর্ববামের কলামে 34 সারি বরাবর 2 শীর্ষক কলামে 21979 দেখতে পাই এবং ঐ সারিতেই অন্তর সারণির 9 শীর্ষক কলামে দেখতে পাই 46.

21979 + 46 = 22025

$\therefore$ Anti log 0.3429 = 2.2025

$\therefore x = 2.2025$

উদাহরণ 4 : $\log x = -3.4235$ হলে, x –এর মান কত?

সমাধান : $\log x = -3.4235 \; \therefore x = \text{Anti} \log (-3.4235)$

এখানে লগারিদরে পূর্ণক –3 এবং অংশক .4235। প্রতিলগ সারণির সর্ববামের কলামে অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক 42 লক্ষ করি।

42 সারি বরাবর লগ সারণির 3 শীর্ষক কলামে দেখতে পাই 26485 এবং একই সারি বরাবর 5 শীর্ষক কলামে অন্তর সারণিতে দেখতে পাই 31

26485 + 31 = 26516

পূর্ণক –3 সুতরাং দশমিক এবং 26516 এর মাঝে 2 টি শূন্য হবে।

$\therefore x = 0.002652$ (প্রায়)

উদাহরণ 5 : লগ সারণির সাহায্যে 22.35 ∞ 5.345 এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\log (22.35 \infty 5.345) = \log 22.35 + \log 5.345$

$= 1.34927 + 0.72798 = 2.07725$

$\therefore 22.35 \infty 5.345 = \text{Anti} \log 2.07725 = 119.46$

উদাহরণ 6 : বার্ষিক 5% হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 2000 টাকার 5 বছরের সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি, $C = P(1+r)^n$

এখানে, C সবৃদ্ধিমূল, $P = 2000$; $r = \frac{5}{100}$, $n = 5$

$\therefore \log C = \log P(1+r)^n$

$= \log P + n\log(1+r)$

$= \log 2000 + 5\log(1+.05)$

$= \log 2000 + 5\log 1.05$

$= 3.30103 + 5 \infty 0.02119$

$= 3.30103 + 0.10595$

$= 3.40698$

$\therefore C = \text{Anti} \log 3.40698$

$= 2552.70$ টাকা

অনুশীলনী ৮.৪

1. লগ সারণি ব্যবহার করে নিচের সংখ্যাগুলোর লগের অংশক নির্ণয় করুন :

   (i) 5423　　(ii) 43.25

2. লগ সারণি থেকে নিচের সংখ্যাগুলোর লগ নির্ণয় করুন

   (i) 456　　(ii) 42.36　　(iii) 6.27　　(iv) 0.06352

3. নিচের সমীকরণগুলো থেকে x এর মান নির্ণয় করুন :

   (i) $\log x = 0.7631$　　(ii) $\log x = 3.79$　　(iii) $\log x = \bar{3}.2439$

4. লগ সারণি ব্যবহার করে গুণফল নির্ণয় করুন :

   (i) 3.25 ∞ 2.38 (ii) 6.39 ∞ 4.28　　(iii) 5.48 ∞ 2.64

5. লগ সারণি ব্যবহার করে ভাগফল নির্ণয় করুন :

   (i) 6.94 ÷ 2.68 (ii) 5.29 ÷ 2.24　　(iii) 4.35 ÷ 1.25

6. 10% চক্রবৃদ্ধি মুনাফার 500 টাকার 6 বছরে সবৃদ্ধিমূল কত?

7. কত বছরে কোন মূলধন 5% চক্রবৃদ্ধি মুনাফার তিনগুণ হবে?

পাঠ ৫ বিবিধ সমস্যার সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি –

- সূচক সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন;
- লগারিদম সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

বর্তমান পাঠে সূচক ও লগারিদম সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান দেখানো হয়েছে।

উদাহরণ 1 : সরল করুন: $\left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-2}$

সমাধান : $\left(x^{-2}+y^{-2}\right)^{-2}$

$=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)^{-2}$

$=\frac{1}{\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)^2}$

$=\frac{(x^2y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}$

$=\frac{(x^4y^4)}{(x^2+y^2)^2}$

উদাহরণ 2 : দেখান যে, $\left(\frac{a^l}{a^m}\right)^{l+m-n} . \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^{m+n-l} . \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^{n+l-m} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \left(\frac{a^l}{a^m}\right)^{l+m-n} . \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^{m+n-l} . \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^{n+l-m}$

$=\left(a^{l-m}\right)^{l+m-n} . \left(a^{m-n}\right)^{m+n-l} . \left(a^{n-l}\right)^{n+l-m}$

$= a^{l^2+lm-nl-lm-m^2+mn} . a^{m^2+mn-lm-mn-n^2+ln} .$
$a^{n^2+nl-mn-nl-l^2+lm}$

$= a^{l^2-m^2+mn-nl} . a^{m^2-n^2-lm+ln} . a^{n^2-l^2-mn+lm}$

$= a^{l^2-m^2+mn-nl+m^2-n^2-lm+nl+n^2-l^2-mn+lm}$

$=a^0 = 1$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3 : সরল করুন: $\left(a^{2^{m-1}}+b^{2^{m-1}}\right)\left(a^{2^{m-1}}-b^{2^{m-1}}\right)$

সমাধান : $\left(a^{2^{m-1}}+b^{2^{m-1}}\right)\left(a^{2^{m-1}}-b^{2^{m-1}}\right)$

$=\left(a^{2^{m-1}}\right)^2-\left(b^{2^{m-1}}\right)^2$

$=a^{2^{m-1}.2}-b^{2^{m-1}.2}$

$=a^{2^{m-1+1}}-b^{2^{m-1+1}}$

$=a^{2^m}-b^{2^m}$

উদাহরণ 4 : যদি $a=b^x$, $b=c^y$ এবং $c=a^z$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $xyz=1$

সমাধান : দেওয়া আছে

$a=b^x$

বা, $a=(c^y)^x$ $[\because b=c^y]$

বা, $a=c^{xy}$

বা, $a=(a^z)^{xy}$ $[\because c=a^z]$

বা, $a^1=a^{xyz}$

$\therefore xyz=1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 5 : সরল করুন: $\dfrac{3^{x+4}-9.3^{x+1}}{3^{x+2}}$

সমাধান : $\dfrac{3^{x+4}-9.3^{x+1}}{3^{x+2}}$

$=\dfrac{3^{x+4}-3^2.3^{x+1}}{3^{x+2}}$

$=\dfrac{3^{x+4}-3^{x+3}}{3^{x+2}}$

$$= \frac{3^{x+3}(3-1)}{3^{x+2}}$$

$= 3^{x+3-x-2} . 2$

$= 3. 2$

$= 6$

উদাহরণ 6 : প্রমাণ করুন, $\log 35 = \log 7 + \log 5$

সমাধান :

বামপক্ষ $= \log 35$

$= \log (7 \infty 5)$

$= \log 7 + \log 5$ [$\because$ $\log MN = \log M + \log N$]

উদাহরণ 7 : সরল করুন : $4 \log 2 + 2 \log\frac{3}{5} - \log\frac{4}{25}$

সমাধান : $4 \log 2 + 2 \log\frac{3}{5} - \log\frac{4}{25}$

$= \log 2^4 + \log (\frac{3}{5})^2 - \log\frac{4}{25}$

$= \log 16 + \log\frac{9}{25} - \log\frac{4}{25}$

$= \log\left(16 \infty \frac{9}{25} \div \frac{4}{25}\right)$

$= \log\left(16 \infty \frac{9}{25} \infty \frac{25}{4}\right)$

$= \log (36)$

$= \log (6^2)$

$= 2 \log 6$

অনুশীলনী – ৮.৫

1. সরল করুন : $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}$

2. $\left(x^{m-n}\right)^{m+n} . \left(x^{n-1}\right)^{n+1} . \left(x^{1-m}\right)^{1+m}$

3. $\dfrac{1}{1+x^{q-p}+x^{r-p}} + \dfrac{1}{1+x^{p-q}+x^{r-q}} + \dfrac{1}{1+x^{p-r}+x^{q-r}}$

4. $\left(\dfrac{x^{a}}{x^{b}}\right)^{a^2+ab+b^2} . \left(\dfrac{x^{b}}{x^{c}}\right)^{b^2+bc+c^2} . \left(\dfrac{x^{c}}{x^{a}}\right)^{c^2+ca+a^2}$

5. $\dfrac{(p^2-\frac{1}{q^2})^{p}\ (p-\frac{1}{q})^{q-p}}{(q^2-\frac{1}{p^2})^{q}\ (q+\frac{1}{p})^{p-q}}$

6. দেখান যে,

$$\left(\frac{x^{(a+b)^2}}{x^{ab}}\right)^{a-b} \left(\frac{x^{(b+c)^2}}{x^{bc}}\right)^{b-c} \left(\frac{x^{(c+a)^2}}{x^{ca}}\right)^{c-a} = 1$$

7. সমাধান করুন : $9.3^{x-1} = 27^{x}$

8. মান নির্ণয় করুন :

$(i)\ 4-(64)^{\frac{1}{3}}$ $(ii)\ \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} - (8)^{-\frac{1}{3}}$

9. সরল করুন :

$$\frac{\log\sqrt{27}+\log 5-\log\sqrt{500}}{\log 2.5}$$

10. সরল করুন :

$$\log\frac{x^2y^2}{z^2} + \log\frac{y^2z^2}{x^2} + \log\frac{z^2x^2}{y^2} - \log x^2\ y^2\ z^2$$

11. সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্ব প্রায় 15,00,00,000 কি.মি.। এই দূরত্বকে বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ করুন।

12. $\log_x 46656 = 6$ হলে, x এর মান কত?

13. $\log_{\sqrt{3}} 27 = x$ হলে, x–এর মান কত?