



এক চলক বিশিষ্ট গাণিতিক খোলা বাক্য

ভূমিকা

সাধারণ বাক্য গঠনের ন্যায় গণিতের বাক্য গঠনেও শব্দ, শব্দগুচ্ছ, ক্রিয়াপদ প্রভৃতি প্রয়োজন হয়। গণিতে শব্দ হিসেবে বিভিন্ন প্রতীক ব্যবহার করা হয়। যেমন, সেটের ক্ষেত্রে N, Z, Q, R প্রভৃতি অক্ষর প্রতীক হিসেবে, আবার রাশির ক্ষেত্রে সংখ্যা ও তাদের কার্যবিধিতে গঠিত $3+2, 4 \times 6$ প্রভৃতি। এইসব গাণিতিক শব্দাবলি ক্রিয়াপদ দিয়ে যুক্ত হলে গাণিতিক বাক্য গঠিত হয়। গণিতের ক্ষেত্রে ক্রিয়াপদ বলতে 'সমান হওয়া', 'বড় হওয়া', 'ছোট হওয়া' প্রভৃতি নির্দেশক প্রতীককে বুঝায়। যেমন : $3+6=9, 5 \times 4 > 12, 3 \times 5 < 20$ ইত্যাদি হল গাণিতিক বাক্য। যদি কোন সেট $A = \{x \in R : 1 \leq x \leq 10\}$ হয়, তবে $x \in R$ বলতে x এর মান 1 থেকে 10 পর্যন্ত যে কোন বাস্তব সংখ্যা বুঝায়। অর্থাৎ x এর বিচরণক্ষেত্র 1 থেকে 10 পর্যন্ত বিস্তৃত। তাহলে x কে বলা হবে চলক বা চল। অর্থাৎ চলক বলতে যে প্রতীক নির্দিষ্ট সেটের কোন সংখ্যাকে নির্দেশ করে তাকে বুঝায়। চলক যে সেট বা ক্ষেত্র থেকে মান গ্রহণ করে তাকে তার ডোমেন বলে। সাধারণত বাস্তব সংখ্যার সেট R কে x চলকের ডোমেন ধরা হয়। অনেক সময় মূলদ সংখ্যার সেট Q কে ডোমেন হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

যে গাণিতিক বাক্যে চল বিদ্যমান তাকে খোলা বাক্য বলে। কোন গাণিতিক বাক্যের সত্যাসত্য নিশ্চিত করে বলা সম্ভব হলে তাকে গাণিতিক উক্তি বলে। যেমন : $1+3=4, 6-2=4 \times$ প্রভৃতি গাণিতিক উক্তি; আবার, $x+5=8$ হল গাণিতিক খোলা বাক্য। এই ইউনিটে আমরা গাণিতিক খোলা বাক্য, সরল সমীকরণ, অসমতা, দ্বিঘাত সমীকরণ ও এদের ব্যবহার সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করব।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- 1 সমীকরণ, সরল সমীকরণ, অসমতা, দ্বিঘাত সমীকরণ, দ্বিঘাত অসমতা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- 1 সরল সমীকরণ, দ্বিঘাত সমীকরণ, অসমতা, দ্বিঘাত অসমতা সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- 1 সমীকরণ ও অসমতা ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

পাঠ ১ সমীকরণ ও সরল সমীকরণের ব্যবহার



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- 1 সমীকরণ এবং সরল সমীকরণ কি তা বলতে পারবেন;
- 1 সরল সমীকরণ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- 1 সমীকরণ ব্যবহার করে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।



গাণিতিক খোলা বাক্য সম্পর্কে আপনারা ইতোমধ্যেই অবগত হয়েছেন। যে খোলা বাক্যে সমান চিহ্ন বিদ্যমান তাকে সমীকরণ বলে। চলকের যে মানের জন্য বাক্যটি সত্য তাকে সমীকরণের মূল বলে।

সমীকরণের মূলকে সমীকরণের বীজও বলা হয় এবং মূলের সেটকে সমাধান সেট বলে।

যে গাণিতিক খোলা বাক্যে সমান চিহ্ন বিদ্যমান তাকে সমীকরণ বলে।

যেমন $x+5=8$ সমীকরণটির সমাধান সেট $\{3\}$, কারণ x -এর মান 3 হলে $x+5=8$ গাণিতিক বাক্যটি সত্য হয়। কোন সমীকরণের সমান চিহ্নের বামদিকের রাশিকে বামপক্ষ এবং ডান দিকের রাশিকে ডানপক্ষ বলে। যেমন : $3x+4=5x-6$ সমীকরণে $3x+4$ বামপক্ষ এবং $5x-6$ ডানপক্ষ। এখানে x হল চলক বা অজ্ঞাত রাশি। উপরের সমীকরণটিতে x এর ঘাত 1, তাই সমীকরণটি সরল সমীকরণ।

কোন সমীকরণে যদি প্রথম ঘাত বিশিষ্ট একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাহলে তাকে প্রথম ঘাতের সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলে।

কোন সমীকরণে এক ঘাত বিশিষ্ট একটি অজ্ঞাত রাশি থাকলে তাকে সরল সমীকরণ বলে।

আবার $x^2+5x+6=0$ সমীকরণে x এর সর্বোচ্চ ঘাত দুই, তাই এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং কোন সমীকরণে যদি সর্বোচ্চ দ্বিতীয় ঘাত বিশিষ্ট একটি চলক থাকে, তাহলে তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

সমীকরণ সমাধান করতে হলে কতকগুলো স্বতঃসিদ্ধের সাহায্য নিতে হয়। যথা :

স্বতঃসিদ্ধ 1 : সমান সমান রাশির সংগে সমান সমান রাশি যোগ করলে যোগফলগুলো পরস্পর সমান হয়।

স্বতঃসিদ্ধ 2 : সমান সমান রাশি থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলো পরস্পর সমান হয়।

স্বতঃসিদ্ধ 3 : সমান সমান রাশিকে সমান সমান সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে গুণফল সমান হয়।

স্বতঃসিদ্ধ 4 : সমান সমান রাশিকে সমান সমান অশূন্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল সমান হয়।

উপরিউক্ত স্বতঃসিদ্ধগুলো ছাড়াও সমীকরণের অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করতে আরও কয়েকটি নিয়ম অনুসরণ করতে হয়।

- (i) সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিটিকে সাধারণত বামপক্ষে রাখতে হয়।
- (ii) কোন রাশিকে পক্ষান্তর করলে অর্থাৎ বামপক্ষ থেকে ডানপক্ষে অথবা ডানপক্ষ থেকে বামপক্ষে আনতে হলে চিহ্নের পরিবর্তন করতে হয়।
- (iii) সমীকরণটির আকার যদি $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হয়, তাহলে $ad = bc$ হয় [উভয়পক্ষে bd দ্বারা গুণ করে] অর্থাৎ এক পক্ষের লবের সাথে অন্য পক্ষের হরের গুণফল দুইটি সমান হয়। একে আড়গুণন বলা হয়।

উপরিউক্ত নিয়মগুলো এক বা একাধিকবার ব্যবহার করে একটি সমীকরণকে অপর সমীকরণে রূপান্তরিত করলে শেষোক্ত সমীকরণকে প্রথমটির সমতুল বলে।

উপরের প্রক্রিয়ায় প্রত্যেক সরল সমীকরণকে $px=q$ আকারে প্রকাশ করা যায় এবং এর বীজ $x = \frac{q}{p}$ [এখানে $p \neq 0$] রূপে পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1 : সমাধান করুন : $8x+5 = 3x+10$

সমাধান : দেওয়া আছে, $8x + 5 = 3x + 10$

$$\text{বা, } 8x - 3x = 10 - 5 \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } 5x = 5$$

$$\therefore x = \frac{5}{5}$$

$$= 1$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান : } x = 1$$

উদাহরণ 2 : সমাধান করুন : $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+7}$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+7}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5+x+3}{(x+3)(x+5)} = \frac{x+7+x+1}{(x+1)(x+7)}$$

$$\text{বা, } \frac{2x+8}{x^2+8x+15} = \frac{2x+8}{x^2+8x+7}$$

ভগ্নাংশ দুইটির মান সমান; এদের লব সমান কিন্তু হর অসমান।

$$\text{সুতরাং } 2x+8 = 0$$

$$\text{বা, } 2x = -8$$

$$\therefore x = -\frac{8}{2}$$

$$= -4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান : } x = -4$$

উদাহরণ 3 : সমাধান করুন : $3x+\sqrt{2} = 4x-3-2\sqrt{2}$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$3x+\sqrt{2} = 4x-3-2\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } 3x-4x = -3-2\sqrt{2} -\sqrt{2} \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } -x = -3-3\sqrt{2}$$

$$\text{বা, } -x = -3(1+\sqrt{2})$$

$$\therefore x = 3(1+\sqrt{2}) \text{ [উভয়পক্ষকে } -1 \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

এস এস সি প্রোগ্রাম

∴ নির্ণেয় সমাধান : $x = 3(1+\sqrt{2})$.

উদাহরণ 4 : সমাধান সেট নির্ণয় করুন : $\frac{3x+1}{5} - \frac{x+3}{2x-1} = \frac{3x+4}{5}$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\frac{3x+1}{5} - \frac{x+3}{2x-1} = \frac{3x+4}{5}$$

$$\text{বা, } \frac{3x+1}{5} - \frac{3x+4}{5} = \frac{x+3}{2x-1} \quad [\text{পক্ষান্তর করে}]$$

$$\text{বা, } \frac{3x+1-3x-4}{5} = \frac{x+3}{2x-1}$$

$$\text{বা, } \frac{-3}{5} = \frac{x+3}{2x-1}$$

$$\text{বা, } 5x+15 = -6x+3$$

$$\text{বা, } 5x+6x = 3-15$$

$$\text{বা, } 11x = -12$$

$$\therefore x = \frac{-12}{11}$$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\left\{-\frac{12}{11}\right\}$

উদাহরণ 5 : সমাধান সেট নির্ণয় করুন : $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x}$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x}$$

$$\text{বা, } \frac{x-1+2x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{3}{x}$$

$$\text{বা, } \frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{3}{x}$$

$$\text{বা, } 3x^2+x = 3x^2-3 \quad [\text{আড়গুণন করে}]$$

$$\text{বা, } 3x^2+x-3x^2=-3$$

$$\text{বা, } x = -3$$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট : $\{-3\}$

উদাহরণ 6 : সমাধান করুন : $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{2x+3} = \frac{25}{5x+2}$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\frac{3}{x+2} + \frac{4}{2x+3} = \frac{25}{5x+2}$$

$$\text{বা, } \frac{3}{x+2} + \frac{4}{2x+3} = \frac{15}{5x+3} + \frac{10}{5x+2}$$

$$\text{বা, } \frac{3}{x+2} - \frac{15}{5x+2} = \frac{10}{5x+2} - \frac{4}{2x+3} \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{15x+6-15x-30}{(x+2)(5x+2)} = \frac{20x+30-20x-8}{(5x+2)(2x+3)}$$

$$\text{বা, } \frac{-24}{(x+2)(5x+2)} = \frac{22}{(5x+2)(2x+3)}$$

$$\text{বা, } \frac{-12}{x+2} = \frac{11}{2x+3} \text{ [উভয়পক্ষকে } \frac{5x+2}{2} \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } -24x-36 = 11x+22 \text{ [আড়গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } -24x - 11x = 22+36$$

$$\text{বা, } -35x = 58$$

$$\text{বা, } 35x = -58 \text{ [উভয়পক্ষকে } -1 \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\therefore x = -\frac{58}{35}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান : } x = -\frac{58}{35}$$

লক্ষ্য করণ : যেহেতু $\frac{3*5}{1} = 15$ এবং $\frac{4*5}{2} = 10$ সেহেতু ডানপাশের লব 25 কে 15+10 ধরা হয়েছে।



অনুশীলনী ৯.১ (ক)

সমাধান করণ :

1. $3x + 5 = 4x+3$
2. $ax + bx = a+b$
3. $\frac{px}{q} - \frac{qx}{p} = p^2 - q^2$
4. $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3}$
5. $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4}$
6. $\sqrt{2} x - 1 = 2\sqrt{2} + 3$
7. $(3+\sqrt{3}) x + 2 = 5+3\sqrt{3}$
8. $\frac{x-2a}{b} + \frac{x-2b}{a} + \frac{x-6a-6b}{a+b} = 0$
9. $\frac{9}{3x+2} + \frac{16}{4x+3} = \frac{49}{7x+3}$
10. $\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} = \frac{a+b}{x-a-b}$

ইউনিট নয়

এস এস সি প্রোগ্রাম

সমাধান সেট নির্ণয় করুন :

11. $\frac{x+b}{x-a} = \frac{x+b}{x+c}$ [$a+c \neq 0$]

12. $\frac{x-b}{b^2-c^2} = \frac{x-c}{c^2-b^2}$

13. $\frac{x+3}{x-3} = 5$

14. $\frac{x-4}{x-2} = 3 - \frac{1}{x-2}$

15. $\frac{x+p^2+2r^2}{q+r} + \frac{x+q^2+2p^2}{r+p} + \frac{x+r^2+2q^2}{p+q} = 0$

16. $\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} = \frac{a+b}{a+b-x}$

17. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1}$

18. $\frac{3y-2}{3y+2} = \frac{4y-1}{4y+3}$

19. $\sqrt{3x-5} + 3 = 1$

সরল সমীকরণের ব্যবহার

সমীকরণে আমরা যে চলক ব্যবহার করে থাকি তা সাধারণত সংখ্যা বুঝাবার জন্য, রাশি বুঝাতে নয়। যেমন : আমরা বলে থাকি, “মনে করি, ঢাকা থেকে কুষ্টিয়ার দূরত্ব x কিলোমিটার অথবা ঝিনাইদহ জেলার শৈলকুপা থানার লোক সংখ্যা x ।” আমরা কখনই এরূপ বলি না যে, মনে করি, ঢাকা থেকে কুষ্টিয়ার দূরত্ব x ।

বীজগণিতে সমস্যা সমাধান করতে হলে প্রক্রিয়াটিকে কয়েকটি স্তরে ভাগ করতে হয়। যেমন :

- প্রয়োজনীয় সংখ্যা বুঝাতে চলক ধরে নিতে হয়।
- যদি সম্ভব হয় তাহলে প্রশ্নমতে প্রতিটি উক্তিতে সংশ্লিষ্ট অক্ষর সংযুক্ত করতে হয়।
- প্রশ্নের বিভিন্ন অংশ সংযোগ করে সমীকরণ তৈরি করতে হয়। এই সমীকরণ একঘাত বা দ্বিঘাত হতে পারে।

সমীকরণ সমাধান করার পরে এর সঠিক উত্তর পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 7 : দুই অঙ্ক বিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 3। অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 9 কম। সংখ্যাটি কত?

সমাধান : এখানে একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানে বসলে সংখ্যাটির মান বেড়ে যায় বলে একক স্থানীয় অঙ্ক, দশক স্থানীয় অঙ্কের চেয়ে বড়।

মনে করুন, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

$$\therefore \text{একক স্থানীয় অঙ্ক} = x+3$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10x+(x+3) = 11x + 3$$

অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি হয় $10(x+3)+x=11x+30$

$$\text{প্রশ্নমতে, } 11x+30 = 2(11x+3)-9$$

$$\text{বা, } 11x + 30 = 22x+6-9$$

$$\text{বা, } 22x - 11x = 30+3$$

$$\text{বা, } 11x = 33$$

$$\text{বা, } x = \frac{33}{11}$$

$$\therefore x = 3$$

\therefore সংখ্যাটির দশকের অঙ্ক 3 এবং সংখ্যাটির এককের অঙ্ক $3+3=6$

অতএব, সংখ্যাটি 36

উদাহরণ 8 : পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের তিনগুণ। পাঁচ বৎসর পরে পিতা-পুত্রের বয়সের সমষ্টি, পাঁচ বৎসর পূর্বে উভয়ের বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ অপেক্ষা 30 বৎসর কম হলে, পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত?

সমাধান : মনে করুন, পুত্রের বর্তমান বয়স x বৎসর

$$\therefore \text{পিতার বর্তমান বয়স } 3x \text{ বৎসর}$$

$$\text{পাঁচ বৎসর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল } (x-5) \text{ বৎসর}$$

$$\text{এবং পাঁচ বৎসর পূর্বে পিতার বয়স ছিল } (3x-5) \text{ বৎসর}$$

এস এস সি প্রোগ্রাম

আবার, পাঁচ বৎসর পরে পুত্রের বয়স হবে $(x+5)$ বৎসর

এবং পাঁচ বৎসর পরে পিতার বয়স হবে $(3x+5)$ বৎসর

প্রশ্নমতে, $(x+5) + (3x+5) = 2\{(x-5)+(3x-5)\}-30$

$$\text{বা, } 4x+10 = 2(4x-10)-30$$

$$\text{বা, } 4x+10 = 8x-20-30$$

$$\text{বা, } 4x-8x = -50-10$$

$$\text{বা, } -4x = -60$$

$$\text{বা, } -x = \frac{-60}{4}$$

$$\text{বা, } -x = -15$$

$$\therefore x = 15 \text{ [উভয় পক্ষকে } -1 \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\therefore \text{পুত্রের বর্তমান বয়স } 15 \text{ বৎসর এবং পিতার বর্তমান বয়স } 3*15 \text{ বা } 45 \text{ বৎসর।}$$

উদাহরণ 9 : একটি কারখানায় দৈনিক মজুরি প্রতি দক্ষ শ্রমিকের 100 টাকা এবং অদক্ষ শ্রমিকের 80 টাকা।

মোট শ্রমিকের সংখ্যা 200 এবং দৈনিক মজুরি 19,000 টাকা হলে, দক্ষ শ্রমিকের সংখ্যা নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, দক্ষ শ্রমিকের সংখ্যা x

অদক্ষ শ্রমিকের সংখ্যা $(200-x)$

দক্ষ শ্রমিকের দৈনিক মজুরি $100x$ টাকা

অদক্ষ শ্রমিকের দৈনিক মজুরি $80(200-x)$ টাকা

প্রশ্নমতে, $100x+80(200-x) = 19000$

$$\text{বা, } 100x+16000-80x = 19000$$

$$\text{বা, } 20x = 19000-16000$$

$$\text{বা, } 20x = 3000$$

$$\text{বা, } x = \frac{3000}{20}$$

$$\therefore x = 150$$

অতএব, দক্ষ শ্রমিকের সংখ্যা 150 জন।

উদাহরণ 10 : এক ব্যক্তি গাড়ি যোগে ঘণ্টায় 50 কি.মি. বেগে কিছুদূর অতিক্রম করে ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে

অবশিষ্ট পথ অতিক্রম করে 7 ঘণ্টায় 300 কি.মি. গমন করেন। 50 কি.মি. বেগে কতদূর গিয়েছিলেন?

সমাধান : মনে করুন, ঘণ্টায় 50 কি.মি. বেগে গিয়েছিলেন x কি.মি.।

তাহলে ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে গিয়েছিলেন $(300-x)$ কি.মি.।

যেহেতু ঘণ্টায় 50 কি.মি. বেগে x কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{x}{50}$ ঘণ্টা

এবং ঘণ্টায় 40 কি.মি. বেগে $(300-x)$ কি.মি. যেতে সময় লাগে $\frac{300-x}{40}$ ঘণ্টা

সুতরাং, প্রশ্নমতে,

$$\frac{x}{50} + \frac{300-x}{40} = 7$$

$$\text{বা, } \frac{4x+1500-5x}{200} = 7$$

$$\text{বা, } \frac{-x+1500}{200} = 7$$

$$\text{বা, } -x+1500 = 1400$$

$$\text{বা, } -x = 1400-1500$$

$$\text{বা, } -x = -100$$

$$\therefore x = 100 \text{ [উভয়পক্ষকে } -1 \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

অতএব, ব্যক্তিটি ঘণ্টায় 50 কি.মি. বেগে 100 কি.মি. গিয়েছিলেন।



অনুশীলনী ৯.১ (খ)

- একটি সংখ্যা অপর একটি সংখ্যার 3 গুণ। সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 60 হলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করুন।
- একটি ভগ্নাংশের লবের সাথে 3 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান দ্বিগুণ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করুন।
- একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের অন্তর 2। লব থেকে 1 বিয়োগ করলে এবং হরের সাথে 5 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{5}$ এর সমান হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করুন।
- দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা এক বেশী। অঙ্কদয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্ক সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?
- দুই অঙ্ক বিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদয়ের সমষ্টি 7। সংখ্যাটির অঙ্কদয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে 27 কম। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।
- ABC ত্রিভুজে B কোণ অপর দুই কোণের সমষ্টির সমান। B কোণ ও C কোণের অনুপাত 9 : 5 হলে, A কোণের পরিমাণ কত?
- 100টি পঁচিশ পয়সার মুদ্রা এবং দশ পয়সার মুদ্রা একত্রে 22 টাকা হলে, কোন প্রকার মুদ্রার সংখ্যা কত?
- একটি লম্বা যাত্রী সংখ্যা 50। মাথাপিছু কেবিনের ভাড়া ডেকের ভাড়ার দ্বিগুণ। ডেকের ভাড়া মাথাপিছু 40 টাকা। মোট ভাড়া প্রাপ্তি 2400 টাকা হলে কেবিনের যাত্রী সংখ্যা কত?
- একটি শ্রেণীর প্রতি বেঞ্চ 4 জন করে ছাত্র বসলে 4 খানা বেঞ্চ খালি থাকে। কিন্তু প্রতিবেঞ্চ 3 জন করে বসলে 6 জন ছাত্রের দাঁড়িয়ে থাকতে হয়। ঐ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা কত?
- দুইটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের অন্তর 99 হলে, বড় সংখ্যাটি কত?
- গাড়িযোগে ক স্থান থেকে খ স্থানে পৌঁছতে এক ব্যক্তির সময় লাগল দেড় ঘণ্টা। স্থান দুইটির মধ্যে দূরত্ব 110 কি.মি.। গতিপথে রাস্তার কতকংশ ঢালু ছিল; সেখানে গাড়ির গতিবেগ ছিল ঘণ্টায় 80 কি.মি., বাকি পথে গতি ছিল 60 কি.মি.। ঐ পথের কত কি.মি. ঢালু ছিল?
- এক ব্যক্তি 4000 টাকার কিছু অংশ বিনিয়োগ করেন 8% সরল মুনাফায় এবং অবশিষ্ট অংশ 6% সরল মুনাফায়। বছর শেষে তিনি 300 টাকা মুনাফা পেলেন। তিনি 6% হারে কত টাকা বিনিয়োগ করেছেন?

পাঠ ২ অসমতা ও তার ব্যবহার



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- 1 অসমতা কি তা বলতে পারবেন;
- 1 অসমতার ব্যবহার জানতে পারবেন;
- 1 অসমতা সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- 1 সমাধান সেট সংখ্যারেখার সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবেন।



অসমতা

লক্ষ্য করুন,

(i) $a < b$ হলে $a + c < b + c$

(ii) $a < b$ হলে $a - c < b - c$

অর্থাৎ অসমতার উভয়পক্ষে যে কোন সংখ্যা যোগ করা যায়।

(iii) $a < b$ এবং $c > 0$ হলে $ac < bc$

(iv) $a < b$ এবং $c < 0$ হলে $ac > bc$

(v) $a < b$ এবং $c > 0$ হলে $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

(vi) $a < b$ এবং $c < 0$ হলে $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

অর্থাৎ অসমতার উভয়পক্ষকে ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার পরিবর্তন হয় না। কিন্তু ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে, অসমতার দিক পরিবর্তন হয়ে যায়।

উদাহরণস্বরূপ

$$3 < 6,$$

$$3+3 < 6+3,$$

$$3-3 < 6-3,$$

$$3 \times 3 < 6 \times 3,$$

$$\frac{3}{3} < \frac{6}{3},$$

$$3(-3) > 6(-3),$$

$$\frac{3}{-3} > \frac{6}{-3} \text{ সত্য।}$$

উদাহরণ 1 : সমাধান করুন এবং সমাধান সেটটি সংখ্যারেখায় দেখান : $2x+5 > 11$

সমাধান : $2x+5 > 11$

বা, $2x+5-5 > 11-5$ [উভয়পক্ষ থেকে 5 বিয়োগ করে]

$$\text{বা, } 2x > 6$$

$$\text{বা, } \frac{2x}{2} > \frac{6}{2} \text{ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } x > 3$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান : $x > 3$

\therefore সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x > 3\}$

সমাধান সেটটি নিচের সংখ্যারেখায় দেখানো হল। 3 অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান এবং সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x > 3\}$



উদাহরণ 2 : সমাধান করুন এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান : $x - 6 > 2x - 2$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$x - 6 > 2x - 2$$

$$\text{বা, } x - 6 + 6 > 2x - 2 + 6 \text{ [উভয়পক্ষে 6 যোগ করে]}$$

$$\text{বা, } x > 2x + 4$$

$$\text{বা, } x - 2x > 2x + 4 - 2x \text{ [উভয় পক্ষ থেকে } 2x \text{ বিয়োগ করে]}$$

$$\text{বা, } -x > 4$$

$$\text{বা, } \frac{-x}{-1} < \frac{4}{-1} \text{ [উভয় পক্ষকে } -1 \text{ দ্বারা ভাগ করায় অসমতার দিক বদলে গেছে]}$$

$$\text{বা, } x < -4$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান : $x < -4$

\therefore সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x < -4\}$

অর্থাৎ -4 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা।

সমাধান সেটটি নিচের সংখ্যারেখায় দেখানো হল :



উদাহরণ 3 : সমাধান করুন : $p(x+q) < r$ [$p \neq 0$]

সমাধান : দেওয়া আছে, $p(x+q) < r$

$$p \text{ ধনাত্মক হলে, } \frac{p(x+q)}{p} < \frac{r}{p} \text{ [উভয় পক্ষ } p \text{ দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } x+q < \frac{r}{p}$$

$$\text{বা, } x+q - q < \frac{r}{p} - q \text{ [উভয় পক্ষ থেকে } q \text{ বিয়োগ করে]}$$

$$\text{বা, } x < \frac{r}{p} - q$$

$$p \text{ ঋণাত্মক হলে, } \frac{p(x+q)}{p} > \frac{r}{p} \text{ [উভয় পক্ষকে } p \text{ দ্বারা ভাগ করে]}$$

এস এস সি প্রোগ্রাম

$$\text{বা, } x+q > \frac{r}{p}$$

$$\text{বা, } x > \frac{r}{p} - q \text{ [উভয় পক্ষ থেকে } q \text{ বিয়োগ করে]}$$

∴ নির্ণেয় সমাধান, (i) $x < \frac{r}{p} - q$, যখন p ধনাত্মক

$$(ii) x > \frac{r}{p} - q, \text{ যখন } p \text{ ঋণাত্মক}$$



অনুশীলনী ৯.২ (ক)

অসমতাগুলো সমাধান করুন এবং সমান সেট সংখ্যারেখায় দেখান :

1. $x+4 < 7$

2. $2x-3 < 5$

3. $4x-3 < 3x-2$

4. $2(x-3) > 2$

5. $y \geq \frac{2y}{3} + 1$

6. $7 \leq 3-2x$

7. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > \frac{5}{3}$

8. $3(2-3x) \leq 2(6-5x)$

9. $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} < \frac{37}{60}$

অসমতার ব্যবহার

সমীকরণ ব্যবহার করে যেমন সমস্যার সমাধান করা যায়, তেমনিভাবে একই প্রক্রিয়ায় অসমতা সম্পর্কিত সমস্যারও সমাধান করা যায়।

উদাহরণ 4 : একটি পরিবারে প্রতিদিন $2x$ কেজি চাল এবং $(x-1)$ কেজি ডাল লাগে এবং চাল ও ডাল মিলে ৪ কেজির বেশি লাগে না। x এর সম্ভাব্য মান অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

সমাধান : প্রশ্নমতে,

$$2x+(x-1) \leq 8$$

$$\text{বা, } 3x-1 \leq 8$$

$$\text{বা, } 3x-1+1 \leq 8+1 \text{ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]}$$

$$\text{বা, } 3x \leq 9$$

$$\text{বা, } \frac{3x}{3} \leq \frac{9}{3} \text{ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } x \leq 3$$

আবার, $x-1 \geq 0$ অর্থাৎ $x \geq 1$.

$$\therefore 1 \leq x \leq 3$$

উদাহরণ 5 : কোন পরীক্ষায় ইংরেজি ১ম ও ২য় পত্রে রোমেল পেয়েছে যথাক্রমে $3x$ ও $4x$ নম্বর এবং সোহেল পেয়েছে যথাক্রমে $2x$ ও 55 নম্বর। ইংরেজি বিষয়ে সোহেল রোমেলের চেয়ে বেশি পেয়েছে। x এর সম্ভাব্য মান অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

সমাধান : রোমেলের মোট নম্বর $3x + 4x$

এবং সোহেলের মোট নম্বর $2x + 55$

প্রশ্নমতে, $3x+4x < 2x+55$

$$\text{বা, } 7x < 2x+55$$

$$\text{বা, } 7x-2x < 2x+55-2x \text{ [উভয় পক্ষ থেকে } 2x \text{ বিয়োগ করে]}$$

$$\text{বা, } 5x < 55$$

$$\text{বা, } \frac{5x}{5} < \frac{55}{5}$$

$$\text{বা, } x < 11$$

কিন্তু $x \geq 0$

অতএব $0 \leq x < 11$

উদাহরণ 6 : তানিম 3 টাকা দরে x টি কলম এবং 6 টাকা দরে $(x+2)$ টি খাতা কিনেছে। মোট মূল্য অনূর্ধ্ব 93 টাকা হলে, সর্বাধিক কয়টি কলম কিনেছে?

সমাধান : x টি কলমের দাম $3x$ টাকা

$(x+2)$ টি খাতার দাম $6(x+2)$ টাকা

প্রশ্নমতে,

$$3x+6(x+2) \leq 93$$

এস এস সি প্রোগ্রাম

$$\text{বা, } 3x + 6x + 12 \leq 93$$

$$\text{বা, } 9x + 12 \leq 93$$

$$\text{বা, } 9x + 12 - 12 \leq 93 - 12 \text{ [উভয় পক্ষ থেকে 12 বিয়োগ করে]}$$

$$\text{বা, } 9x \leq 81$$

$$\text{বা, } \frac{9x}{9} \leq \frac{81}{9} \text{ [উভয়পক্ষকে 9 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } x \leq 9$$

অতএব তানিম সর্বাধিক 9 টি কলম কিনেছে।



অনুশীলনী ৯.২ (খ)

- একটি ট্রেন 3 ঘণ্টায় যায় x কি.মি. এবং 4 ঘণ্টায় যায় $(x+80)$ কি.মি.। ট্রেনটির গড় গতিবেগ 90 কি.মি. এর বেশি নয়। সমস্যাটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করুন এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করুন।
- 10 টাকা কেজি দরে স্বপন x কেজি আলু কিনে দোকানিকে 500 টাকার একখানা নোট দিল। দোকানি 10 টাকার x খানা নোটসহ বাকি টাকা ফেরত দিলেন। সমস্যাটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করুন এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করুন।
- এক ব্যক্তি ঘণ্টায় x কি.মি. বেগে 2 ঘণ্টা হাঁটলেন এবং ঘণ্টায় $(x+3)$ কি.মি. বেগে 1 ঘণ্টা দৌড়ালেন। তাঁর অতিক্রান্ত পথ 18 কি.মি. এর কম। সমস্যাটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করুন এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করুন।
- একখন্ড কাঠের ক্ষেত্রফল 32 বর্গ সে.মি.। তা থেকে x সে.মি. দীর্ঘ এবং 4 সে.মি. প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তাকার কাঠ কেটে নেওয়া হল। x এর সম্ভাব্য মান অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করুন।
- পুত্রের বয়স মায়ের বয়সের এক-তৃতীয়াংশ। পিতা মায়ের চেয়ে 8 বছরের বড়। তিনজনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 78 বছর হলে পিতার বয়স অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করুন।
- সাগর 16 বছর বয়সে এস.এস.সি পরীক্ষা দিয়েছিল। সে 18 বছর বয়সে এইচ.এস.সি পরীক্ষা দিবে। তার বর্তমান বয়স অসমতায় প্রকাশ করুন।
- একটি গাড়ির গতি প্রতি সেকেন্ড 20 মিটার। গাড়িটি 10 কি.মি. যাওয়ার প্রয়োজনীয় সময় অসমতায় প্রকাশ করুন।
- ঢাকা থেকে চট্টগ্রামের বিমান পথে দূরত্ব 250 কি.মি.। একটি বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ ঘণ্টায় 600 কি.মি.। কিন্তু ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম যাওয়ার পথে প্রতিকূল দিকে ঘণ্টায় 100 কি.মি. বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখিন হয়। ঢাকা থেকে চট্টগ্রামের একটানা উড্ডয়নের জন্য প্রয়োজনীয় সময় অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করুন।
- কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার 4-গুণ, এর 2গুণ এবং 12 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট। সংখ্যাটির সম্ভাব্য মানগুলি কি কি হতে পারে?

10. উপরের ৪নং প্রশ্নে চট্টগ্রাম থেকে বিমানটির ঢাকা ফেরার সম্ভাব্য সময় অসমতায় প্রকাশ করুন।

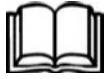
পাঠ ৩ দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার ব্যবহার



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি—

- 1 দ্বিঘাত সমীকরণ কি তা বলতে পারবেন;
- 1 দ্বিঘাত সমীকরণ সম্পর্কিত সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- 1 দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার জানতে পারবেন;
- 1 দ্বিঘাত সমীকরণ ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।



দ্বিঘাত সমীকরণ

পূর্ববর্তী পাঠসমূহে আপনারা ইতোমধ্যেই সমীকরণ সম্পর্কে ধারণা লাভ করেছেন। এ পাঠে আমরা দ্বিঘাত সমীকরণ নিয়ে আলোচনা করব। দ্বিঘাত সমীকরণ বলতে সাধারণত $ax^2+bx+c=0$ আকারের সমীকরণকেই বুঝায়, যেখানে $a \neq 0$ । আপনারা নিশ্চয় লক্ষ করেছেন সমীকরণের ডানপক্ষ শূন্য ধরা হয়েছে। এর বামপক্ষ হল একটি দ্বিঘাত বহুপদী।

এখন, $f(x) = ax^2+bx+c$ রাশিতে x এর স্থলে α বসালে যদি $f(\alpha) = 0$ হয়, তাহলে α হল $ax^2+bx+c = 0$ সমীকরণের সমাধান বা বীজ।

নিচের সমীকরণটি লক্ষ করুন,

$$x^2-3x+2 = 0$$

এখানে সমীকরণটির সমাধান বা বীজ 2

$$\text{কারণ } (2)^2 - 3.2 + 2 = 0$$

সমীকরণটি যেহেতু দ্বিঘাত, সেহেতু সাধারণভাবে এর দুইটি সমাধান বা বীজ থাকবে বলে ধরে নেয়া যায়। এ সমীকরণের অপর সমাধান বা বীজ হল 1। কারণ $(1)^2 - 3.1 + 2 = 0$

সুতরাং $x^2-3x+2 = 0$ সমীকরণটির দুইটি বীজ পাওয়া গেল এবং তা হল 2 এবং 1।

কোন কোন সময় দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মাত্র সমাধান পাওয়া যায়।

যেমন, $x^2+4x+4 = 0$ সমীকরণটি দ্বিঘাত হওয়া সত্ত্বেও এর একমাত্র সমাধান -2 , কেননা এর বামপক্ষ $= (x+2)^2$

আবার, কখনও কখনও দ্বিঘাত সমীকরণের বাস্তব সংখ্যায় কোন সমাধান পাওয়া যায় না।

যেমন, $x^2+4x+5 = 0$ সমীকরণটির কোন বাস্তব সমাধান নেই।

$$\text{কারণ } x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$$

এবং আমরা জানি, বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা ধনাত্মক। সুতরাং কোন বাস্তব মানের জন্যই x^2+4x+5 এর মান শূন্য হতে পারে না।

এস এস সি প্রোগ্রাম

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে, দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি বীজ থাকতে পারে অথবা একটি বীজ থাকতে পারে, আবার ক্ষেত্রবিশেষে কোন বাস্তব সমাধান নাও থাকতে পারে। তবে দ্বিঘাত সমীকরণের কখনও দুইটির বেশি বীজ থাকতে পারে না। এ পাঠে শুধুমাত্র বাস্তব সমাধানযোগ্য সমীকরণই আলোচনা করা হয়েছে।

বাস্তব সংখ্যার বেলায় অশূন্য দুইটি সংখ্যায় গুণফল কখনও শূন্য হতে পারে না। অর্থাৎ দুইটি সংখ্যার গুণফল শূন্য হলে এদের অন্তত একটি সংখ্যা শূন্য। সুতরাং বলা যায়, a, b এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য $ab = 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $a = 0$ অথবা $b = 0$ হয়।

যে সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 2 তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।

দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণত দুইটি সমাধান বা বীজ থাকে।

দ্বিঘাত সমীকরণে কখনও দুইটির বেশি বীজ থাকতে পারে না।

উদাহরণ 1 : সমাধান সেট নির্ণয় করুন : $(x-2)(x+4) = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $(x-2)(x+4) = 0$

তাহলে, হয় $(x-2) = 0$ অথবা $(x+4) = 0$

সুতরাং $x = 2$ অথবা $x = -4$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট $\{2, -4\}$

উদাহরণ 2 : সমাধান সেট নির্ণয় করুন : $x^2 = \sqrt{3} x$

সমাধান : $x^2 = \sqrt{3} x$

বা, $x^2 - \sqrt{3} x = 0$

বা, $x(x - \sqrt{3}) = 0$

বা, $x = 0$ অথবা, $x - \sqrt{3} = 0$

অর্থাৎ $x = 0$ অথবা $x = \sqrt{3}$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট $\{0, \sqrt{3}\}$

উদাহরণ 3 : সমাধান সেট নির্ণয় করুন : $y + \frac{1}{y} = 2$

সমাধান : $y + \frac{1}{y} = 2$

বা, $\frac{y^2+1}{y} = 2$

বা, $y^2+1 = 2y$

বা, $y^2-2y+1 = 0$

বা, $(y-1)^2 = 0$

বা, $y-1 = 0$

$$\text{বা, } y = 1$$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট {1}

উদাহরণ 4 : সমাধান সেট নির্ণয় করুন $\frac{x-2}{x+2} + \frac{4(x-2)}{x-4} = 1$

$$\text{সমাধান : } \frac{x-2}{x+2} + \frac{4(x-2)}{x-4} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{(x-2)(x-4)+4(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-4)} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{x^2-6x+8+4(x^2-4)}{x^2-2x-8} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{x^2-6x+8+4x^2-16}{x^2-2x-8} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{5x^2-6x-8}{x^2-2x-8} = 1$$

$$\text{বা, } 5x^2-6x-8 = x^2-2x-8 \text{ [বঙ্গুণন করে]}$$

$$\text{বা, } 5x^2-6x-8-x^2+2x+8=0$$

$$\text{বা, } 4x^2-4x=0$$

$$\text{বা, } x^2-x=0 \text{ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ অথবা } x-1=0$$

$$\text{অর্থাৎ } x=0, \text{ অথবা } x=1$$

∴ নির্ণেয় সমাধান সেট {0, 1}



অনুশীলনী ৯.৩ (ক)

সমাধান সেট নির্ণয় করুন :

$$1. (x+2)(x-4) = 0$$

$$2. (\sqrt{2}-x)(5+x) = 0$$

$$3. (\sqrt{y}+1)(\sqrt{2y}-5) = 0$$

$$4. 3(x^2+5) = 14x$$

$$5. 5(x^2-4)+21x=0$$

$$6. z(z-8) = 3z-24$$

$$7. 3x^2+17x+24 = 0$$

$$8. (x+8)(x-8) = 36$$

$$9. \frac{2}{x} + \frac{5}{x-1} = 6$$

$$10. \frac{z+7}{z+1} + \frac{2z+6}{2z+1} = 5$$

এস এস সি প্রোগ্রাম

$$11. \frac{x-p}{x-q} + \frac{x-q}{x-p} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$$

$$12. \frac{4}{\sqrt{10y-4}} + \sqrt{10y-4} = 5$$

$$13. \frac{x}{m} + \frac{m}{x} = \frac{x}{n} + \frac{n}{x}$$

$$14. \frac{1}{p+q+x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{x}$$

$$15. \left(\frac{2x+a}{x-a}\right)^2 - 7\left(\frac{2x+a}{x-a}\right) + 12 = 0$$

$$16. \frac{mx+n}{m+nx} = \frac{px+q}{p+qx}$$

$$17. x + \frac{4}{x} = 4$$

$$18. \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 - (x-1)^2} = 2$$

$$19. 3x^2 - 6kx = 0$$

$$20. x-2 = \frac{x-2}{x}$$

দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার

শর্ত দেওয়া থাকলে দ্বিঘাত সমীকরণ তৈরি করে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা যায়। নিচের উদাহরণগুলো থেকে তা সহজেই বুঝা যাবে।

উদাহরণ 5 : একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর লব অপেক্ষা 5 বেশি। ভগ্নাংশটি বর্গ করলে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায় তার হরের দ্বিগুণ লব অপেক্ষা 146 বেশি। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, ভগ্নাংশটির লব = x

তাহলে ভগ্নাংশটির হর = $x+5$

$$\therefore \text{ভগ্নাংশটি} = \frac{x}{x+5}$$

$$\begin{aligned} \text{এবং ভগ্নাংশটির বর্গ} &= \frac{x^2}{(x+5)^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2+10x+25} \end{aligned}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } 2(x^2+10x+25) = x^2+146$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 20x + 50 = x^2 + 146$$

$$\text{বা, } 2x^2 + 20x + 50 - x^2 - 146 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 20x - 96 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 24x - 4x - 96 = 0$$

$$\text{বা, } x(x+24) - 4(x+24) = 0$$

$$\text{বা, } (x+24)(x-4) = 0$$

এখানে $x > 0$ সূতরাং $x+24 \neq 0$

$$\therefore x-4 = 0$$

$$\text{বা, } x=4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ভগ্নাংশ} = \frac{4}{4+5} = \frac{4}{9}$$

যাচাই : লব = 4, হর = 9 = 4+5

$$\text{বর্গ} = \frac{16}{81}$$

$$\text{হরের দ্বিগুণ} = 162$$

$$\text{লব} = 16$$

$$\text{অন্তর} = 146$$

উদাহরণ 6 : একটি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সাথে সংখ্যাটি যোগ করলে তা পরবর্তী স্বাভাবিক সংখ্যার সাত গুণের সমান হয়। সংখ্যাটি কত নির্ণয় করুন।

এস এস সি প্রোগ্রাম

সমাধান : মনে করুন, সংখ্যাটি = x

\therefore পরবর্তী সংখ্যাটি = $x+1$

প্রশ্নানুসারে,

$$x^2+x = 7(x+1)$$

$$\text{বা, } x^2+x = 7x+7$$

$$\text{বা, } x^2+x - 7x - 7 = 0$$

$$\text{বা, } x^2-7x+x-7 = 0$$

$$\text{বা, } x(x-7)+1(x-7) = 0$$

$$\text{বা, } (x-7)(x+1) = 0$$

এখানে $x > 0$ । সুতরাং $x+1 \neq 0$,

$$\therefore x-7 = 0$$

$$\text{বা, } x=7$$

সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যাটি হল, 7.

উদাহরণ 7 : একটি আয়তাকার ঘরের ক্ষেত্রফল 150 বর্গমিটার। এর দৈর্ঘ্য 5 মিটার কমালে এবং প্রস্থ 5 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। ঘরটির দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান : মনে করুন, আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার

\therefore আয়তাকার ঘরের ক্ষেত্রফল xy বর্গমিটার।

$$\therefore xy = 150 \dots\dots(i)$$

দৈর্ঘ্য 5 মিটার কমালে দৈর্ঘ্য হয় $(x-5)$ মিটার এবং প্রস্থ 5 মিটার বাড়লে প্রস্থ হয় $(y+5)$ মিটার।

\therefore তখন ক্ষেত্রফল হবে $(x-5)(y+5)$ বর্গমিটার।

প্রশ্নমতে, $(x-5)(y+5) = 150$

$$\text{বা, } xy+5x-5y-25 = 150$$

$$\text{বা, } xy+5x-5y=150+25$$

$$\text{বা, } 150+5x-5y=150+25 \text{ [সমীকরণ (i) হতে } xy = 150]$$

$$\text{বা, } 5x-5y = 25$$

$$\text{বা, } 5(x-y) = 25$$

$$\text{বা, } x-y = 5 \text{ [উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } x = y+5 \dots(ii)$$

এখন (i) নং সমীকরণে (ii) নং-এর মান বসিয়ে পাই,

$$(y+5).y = 150$$

$$\text{বা, } y^2+5y-150 = 0$$

$$\text{বা, } y^2+15y - 10y - 150 = 0$$

$$\text{বা, } y(y+15)-10(y+15) = 0$$

$$\text{বা, } (y+15)(y-10) = 0$$

এক চলক বিশিষ্ট গাণিতিক খোলা বাক্য

পৃষ্ঠা-১৭৮

এখানে প্রস্থ $y > 0$ । সুতরাং $y + 15 \neq 0$

$$\therefore y - 10 = 0$$

বা, $y = 10$

এখন y এর মান (ii) নং-এ বসিয়ে পাই,

$$x = 10 + 5$$

$$= 15$$

অতএব, ঘরটির দৈর্ঘ্য 15 মিটার।



অনুশীলনী ৯.৩(খ)

- এমন একটি ধণাত্মক সংখ্যা নির্ণয় করুন, যা তার বর্গের চেয়ে 56 কম।
- একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের হর লব অপেক্ষা 3 বেশি, ভগ্নাংশটি বর্গ করে যে ভগ্নাংশ পাওয়া যায় তার হর লব অপেক্ষা 39 বেশি। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করুন।
- দুই অঙ্ক বিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্ক সমষ্টি 10। সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়ের গুণফল 24, সংখ্যাটি কত?
- একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 10 সে.মি. এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 2 সে.মি.। ঐ দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
- একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 2 মিটার বেশি। এর পরিসীমা 44 সে.মি. হলে, ক্ষেত্রফল কত?
- একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 15 সে.মি. এবং পরিসীমা 36 সে.মি.। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত?
- সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অন্তর 7 সে.মি. এবং ক্ষেত্রফল 30 বর্গ সে.মি.। এর অতিভুজ কত?
- একটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ভূমি তার উচ্চতার দ্বিগুণের চেয়ে 12 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 520 বর্গমিটার হলে তার ভূমি কত?
- একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল 704 বর্গমিটার হলে, রাস্তাটি কত মিটার চওড়া।
- একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা 110 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 750 বর্গমিটার। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় করুন।
- কোন বৃত্তের কেন্দ্র থেকে কোন জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য অর্ধ জ্যা অপেক্ষা 1 সে.মি. কম। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি. হলে, ঐ জ্যা এর দৈর্ঘ্য কত?
- একটি শ্রেণীতে যতজন ছাত্র-ছাত্রী পড়ে প্রত্যেকে তত পয়সা করে চাঁদা দেওয়াতে মোট 64 টাকা উঠল। ঐ শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত?
- x জন ছাত্রের বিজ্ঞানে প্রাপ্ত নম্বরের সাথে 82 নম্বর প্রাপ্ত একজন ছাত্রের নম্বর যোগ হওয়ায় ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় 2 বেড়ে গেল। x এর মান কত?
- পারভেজ একটি দ্রব্য 5000 টাকায় ক্রয় করে শতকরা যে লাভে মিন্টুর কাছে বিক্রি করে, মিন্টু শতকরা সেই একই লাভে দ্রব্যটি কামালের কাছে বিক্রি করে। কামালের ক্রয়মূল্য পারভেজের ক্রয়মূল্য অপেক্ষা 1050 টাকা বেশি হলে নির্দিষ্ট লাভের হার কত?
- এক ব্যক্তি 440 টাকায় কতকগুলো আম কিনে দেখল, সে যদি 2 টি আম বেশি পেত, তবে প্রত্যেকটি আমের মূল্য গড়ে 2 টাকা কম পড়ত। সে কতগুলো আম কিনেছিল?

পাঠ ৪ দ্বিঘাত অসমতা ও তার ব্যবহার



উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি—

- 1 দ্বিঘাত অসমতা কি তা বলতে পারবেন;
- 1 দ্বিঘাত অসমতার ব্যবহার জানতে পারবেন;
- 1 দ্বিঘাত অসমতা সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবেন;
- 1 দ্বিঘাত অসমতা সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাতে পারবেন।



দ্বিঘাত অসমতা

দ্বিঘাত সমীকরণের ন্যায় দ্বিঘাত অসমতাও বাস্তব সংখ্যার ধর্ম মেনে চলে। দ্বিঘাত অসমতার ধর্মটি হল, $pq > 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি p, q উভয়ে ধনাত্মক অথবা উভয়ে ঋণাত্মক হয়। কয়েকটি উদাহরণ দিলে প্রক্রিয়াটি স্পষ্টভাবে বুঝা যাবে। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেয়া হল।

উদাহরণ 1: সমাধান করুন এবং সমাধান সেটটি সংখ্যারেখায় দেখান : $(x+2)(x-4) > 0$

সমাধান : এখানে x এর যে সকল মানের জন্য অসমতাটি সত্য হবে, সবগুলো মানই নির্ণয় করতে হবে।

$(x+2)$ এবং $(x-4)$ উৎপাদকদ্বয়ের গুণফল ধনাত্মক হবে, যদি এবং কেবল যদি উভয়ে ধনাত্মক হয় অথবা উভয়ে ঋণাত্মক হয়।

$(x+2) > 0$ হবে, যখন $x > -2$ এবং $(x+2) < 0$ হবে, যখন $x < -2$ হবে। আবার, $(x-4) > 0$ হবে, যখন $x > 4$ এবং $(x-4) < 0$ হবে, যখন $x < 4$ হবে।

সুতরাং কেবলমাত্র $x > 4$ হলে $(x+2)$ ও $(x-4)$ উভয়েই ধনাত্মক হবে এবং কেবলমাত্র $x < -2$ হলে $(x+2)$ ও $(x-4)$ উভয়েই ঋণাত্মক হবে।

অতএব, $(x+2)(x-4) > 0$ যদি এবং কেবল যদি $x < -2$ অথবা $x > 4$ হয়।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $x < -2$ অথবা $x > 4$

∴ সমাধান সেট $\{x \in R : x < -2 \text{ অথবা } x > 4\}$

নিচে সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখানো হল :

উদাহরণ 2 : সমাধান করুন এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখান : $x^2 - 5x + 6 > 0$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 3x - 2x + 6 > 0$$

$$\text{বা, } x(x-3)-2(x-3) > 0$$

$$\text{বা, } (x-3)(x-2) > 0$$

এখন, $(x-3)(x-2) > 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x-3)$ ও $(x-2)$ উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।
 $(x-3) > 0$ হবে, যখন $x > 3$ এবং $(x-3) < 0$ হবে, যখন $x < 3$ । আবার, $x-2 > 0$ হবে, যখন $x > 2$ এবং $(x-2) < 0$ হবে, যখন $x < 2$

\therefore শুধুমাত্র $x > 3$ হলে উভয়ই ধনাত্মক হবে।

এবং শুধুমাত্র $x < 2$ হলে উভয়ই ঋণাত্মক হবে।

$\therefore (x-3)(x-2) > 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x > 3$ অথবা $x < 2$ হয়

\therefore নির্ণেয় সমাধান : $x > 3$ অথবা $x < 2$

\therefore সমাধান সেট $\{x \in R : x > 3 \text{ অথবা } x < 2\}$

সমাধান সেটটি নিচে সংখ্যারেখায় দেখানো হল :

উদাহরণ 3 : সমাধান করুন এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখান : $x^2+2x-8 < 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x^2+2x-8 < 0$

$$\text{বা, } x^2+4x-2x-8 < 0$$

$$\text{বা, } x(x+4) - 2(x+4) < 0$$

$$\text{বা, } (x+4)(x-2) < 0$$

এখন, $(x+4)(x-2) < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x+4)$ ও $(x-2)$ উভয়ই ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয়।

এখন, $x < -4$ হলে $x+4 < 0, x-2 < 0$

$$-4 < x < 2 \text{ হলে } x+4 > 0, x-2 < 0$$

$$x > 2 \text{ হলে } x+4 > 0, x-2 > 0$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান : $-4 < x < 2$

\therefore সমাধান সেট $\{x \in R : -4 < x < 2\}$

সমাধান সেটটি নিচে সংখ্যারেখায় দেখানো হল :

এস এস সি প্রোগ্রাম



অনুশীলনী ৯.৪ (ক)

নিচের অসমতাগুলো সমাধান করুন এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখান :

1. $(x+5)(x-3) > 0$

2. $(x-1)(x-4) > 0$

3. $(3x-1)(x+3) > 0$

4. $(4x-5)(x-5) > 0$

5. $x^2-3x+2 > 0$

6. $x^2-x-12 > 0$

7. $x^2-9x+20 > 0$

8. $x^2+x-6 > 0$

9. $x^2-6x+8 > 0$

10. $2x^2-5x+3 > 0$

11. $3x^2-8x+5 > 0$

12. $x^2-3x+2 < 0$

13. $2x^2 - 3x + 1 < 0$

দ্বিঘাত অসমতার ব্যবহার

দ্বিঘাত অসমতার ব্যবহার নিচের উদাহরণগুলোর মাধ্যমে দেখানো হল।

উদাহরণ 4 : দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার পার্থক্য 3 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 27 অপেক্ষা বড়। সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কি হতে পারে?

সমাধান : মনে করুন, ছোট সংখ্যাটি x
 \therefore বড় সংখ্যাটি $x+3$
 $\therefore x(x+3) > 27$
 শর্তমতে গুণফল অন্তত $27+1 = 28$

মনে করুন, $x(x+3) = 28$

$$\text{বা, } x^2+3x = 28$$

$$\text{বা, } x^2+3x-28 = 0$$

$$\text{বা, } x^2+7x-4x-28 = 0$$

$$\text{বা, } x(x+7)-4(x+7) = 0$$

$$\text{বা, } (x-4)(x+7) = 0$$

এখানে, $x \geq 1$ সুতরাং $x+7 \neq 0$

$$\therefore x - 4 = 0$$

$$x = 4.$$

সুতরাং, সংখ্যা দুইটির সর্বনিম্ন মান 4 এবং 7

উদাহরণ 5 : দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল 109 অপেক্ষা বড়। সংখ্যা দুইয় নিম্নপক্ষে কত হতে পারে?

সমাধান : মনে করুন,
 ছোট সংখ্যাটি $= x$
 \therefore অপর সংখ্যাটি $= x+1$

প্রশ্নমতে, $x(x+1) > 109$

শর্তমতে, গুণফল অন্তত $109 + 1 = 110$

মনে করুন, $x(x+1) = 110$

$$\text{বা, } x^2+x = 110$$

$$\text{বা, } x^2+x-110 = 0$$

$$\text{বা, } x^2+11x-10x-110 = 0$$

$$\text{বা, } x(x+11) - 10(x+11) = 0$$

$$\text{বা, } (x-10)(x+11) = 0$$

এখানে, $x \geq 1$ সুতরাং $x+11 \neq 0$

$$\therefore x - 10 = 0$$

$$\text{বা, } x = 10$$

এস এস সি প্রোগ্রাম

$$\text{এবং } x+1 = 10+1 = 11$$

\therefore সংখ্যা দুয় নিম্নপক্ষে 10 এবং 11



অনুশীলনী ৯.৪ (খ)

1. দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার পার্থক্য 5 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 49 অপেক্ষা বৃহত্তর। সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কি কি হতে পারে?
2. দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল 379 অপেক্ষা বৃহত্তর। সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কি কি হতে পারে?
3. দুইটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার গুণফল 839 অপেক্ষা বৃহত্তর। সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কি কি হতে পারে?
4. দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার অন্তর 4 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 95 অপেক্ষা বৃহত্তর। সংখ্যা দুইটি নিম্নপক্ষে কি কি হতে পারে?