



অন্য়, ফাংশন ও লেখচিত্র

ভূমিকা

অন্য়, ফাংশন ও লেখচিত্র গণিতে গুরুত্বপূর্ণ সংযোজন। গাণিতিক সম্পর্ক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অন্য়, ফাংশন বিশেষভাবে ব্যবহৃত হয়। তাছাড়া লেখচিত্র কোন সম্পর্কের অবস্থানকে মূর্ত করে তোলে। তাই গাণিতিক কোন সমস্যার সমাধান কল্পে অন্য়, ফাংশন ও লেখচিত্র সম্পর্কে সমক্ষ জ্ঞান থাকা প্রয়োজন। এ ইউনিটে অন্য়, ফাংশন ও লেখচিত্র সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি—

- 1 অন্য়ের সংজ্ঞা লিখতে ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- 1 ফাংশনের সংজ্ঞা লিখতে ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- 1 লেখচিত্র সম্পর্কে বলতে পারবেন।

পাঠ ১ অন্বয় ও ফাংশন



উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- 1 অন্বয়ের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- 1 ফাংশনের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- 1 অন্বয় ও ফাংশনের সম্পর্ক লিখতে পারবেন;
- 1 অন্বয় ও ফাংশনের ধারণায় বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।



অন্বয় ও ফাংশন গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। পার্থিব জীবনে যে সব বিভিন্ন ধরনের সম্পর্ক দেখা যায় তা গণিতে সর্বায়ন করে প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। অন্বয় ও ফাংশন গণিতের এমনই বিশেষ ধরনের গণিতের সম্পর্ক যা বিভিন্ন ক্ষেত্রে ব্যবহার করা যায়। এ পাঠে অন্বয় ও ফাংশন সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

অন্বয়

দুটি সেটের সদস্যদের মিল করার বা জোড় গঠন করার পদ্ধতিকে অন্বয় বলে।

যদি A ও B দুটি সেট হয়, তবে সেটদ্বয়ের কার্তেসীয় গুচ্ছ $A \times B$ সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলো যেকোন অশূন্য উপসেট R কে A থেকে B এর একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়।

যদি x , A সেটের একটি উপাদান এবং z , B সেটের একটি উপাদান হয় এবং

$\{x, z\} \in R$ হয় উক্ত সম্পর্ককে

xRz দ্বারা প্রকাশ করলে

xRz কে x is related to z পড়া হয় অর্থাৎ উপাদান x , উপাদান z এর সঙ্গে R সম্পর্কযুক্ত।

উদাহরণস্বরূপ, A থেকে A তে একটি সম্পর্কে R হলে $R \subseteq A \times A$, R কে A এর উপর অন্বয় বলা হয়। কার্যত, সাধারণত দুইটি সেট A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে একটি সম্পর্ক দেয়া থাকে, তখন যে সকল ক্রমজোড় (x, y) ঐ সম্পর্কযুক্ত উপাদান $x \in A, y \in B$ হতে পাওয়া যায়। তাদের সেট হচ্ছে প্রদত্ত সম্পর্কের অন্বয়।

দুটি সেটের সদস্যদের মিল করার বা জোড় গঠন করার পদ্ধতিকে অন্বয় বলে।

উদাহরণ : যদি $A = \{7, 8\}$, $B = \{6, 7\}$ এবং A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $P > Q$ সম্পর্ক বিবেচনায় আনা যায়, তাহলে সংশ্লিষ্ট অন্বয় নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন অন্বয়

$$R = \{(P, Q) : P \in A, Q \in B \text{ এবং } P > Q\}$$

অতএব, $A \times B = \{7, 8\} \times \{6, 7\}$

$$= \{(7, 6) (7, 7), (8, 6), (8, 7)\}$$

প্রদত্ত সম্পর্কটি হবে, $R = \{(7, 6) (8, 6) (8, 7)\}$

নিজে করুন : যদি $P = \{1, 4\}$, $Q = \{3, 5\}$ এবং P ও Q এর উপাদানগুলোর মধ্যে $A < B$ সম্পর্ক বিবেচনায় আনা যায়, তাহলে অন্বয় নির্ণয় করুন।

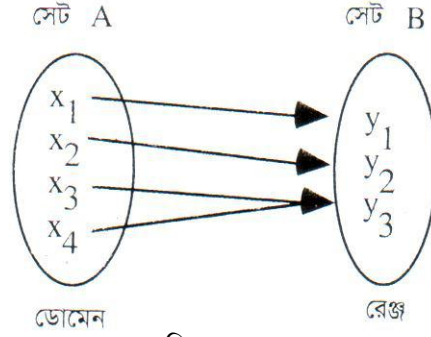
ফাংশন

ফাংশন একটি বিশেষ ধরনের সম্পর্ক যখন এর কোন দুটো ক্রমসজ্জিত জোড়ে ডোমেনের একই সদস্য দুবার না থাকে। যদি ডোমেনের প্রত্যেকটি সদস্যের জন্য রেঞ্জের একটি মাত্র সদস্য নির্ধারিত থাকে তখন সেই সম্পর্ককে ফাংশন বলে। উদাহরণস্বরূপ,

অন্বয়, ফাংশন ও লেখচিত্র

সেট $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; স্ত্রীর দল } এবং

সেট $B = \{y_1, y_2, y_3\}$; স্বামীর দল } হয় তবে ভেনচিত্রের সাহায্যে ফাংশনকে নিম্নরূপে লেখা যায়



চিত্র : ১০.১

এখানে চিত্রটি একটি ফাংশন কারণ প্রত্যেকটি স্ত্রীর নিকট থেকে একটি এবং কেবল মাত্র একটি তীর চিহ্ন নির্গত হয়েছে।

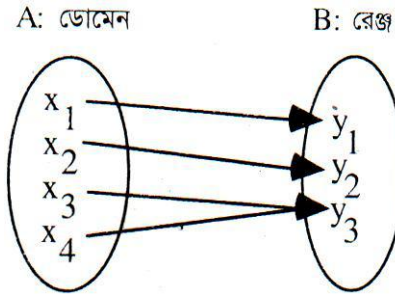
ক্রমজোড়ের সাহায্যে ফাংশন প্রকাশ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ যদি সেট $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ এবং সেট $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ হয় তবে ফাংশনটি হবে—

ফাংশন = $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ এবং (x_4, y_4) }

এখানে সজ্জিত জোড়াগুলোতে ডোমেনের কোন সদস্য দুবার লেখা হয়নি।

অন্বয় ও ফাংশনের সম্পর্ক

উদাহরণস্বরূপ যদি সেট $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ একদল শিশু এবং সেট $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ একদল মা, সন্তান ও মায়ের সম্পর্কের কথা নির্দেশ করা হল। এখানে সন্তান ও মায়ের সম্পর্ক ফাংশন কারণ প্রত্যেক সন্তানের এক ও অনন্য মা আছে। কিন্তু মাতা ও সন্তানের সম্পর্ক ফাংশন নয় কারণ একই মায়ের একাধিক সন্তান থাকতে পারে। চিত্রে লক্ষ করণ :



চিত্র : ১০.২

এখানে প্রত্যেক সন্তানের নিকট থেকে একটি মাত্র তীর নির্গত হয়ে তার মার নিকট গিয়েছে।

অর্থাৎ সব অন্বয় ফাংশন নয় কিন্তু সব ফাংশন অন্বয়।

সব ফাংশন অন্বয়, কিন্তু সব অন্বয় ফাংশন নয়

এস এস সি প্রোগ্রাম

উদাহরণ 1 : নিচের সম্পর্কটি কি ফাংশন?

$$f = \{ (3, 1), (2, 4), (7, 8) \}$$

সমাধান : f সম্পর্কটি একটি ফাংশন, কারণ ক্রমজোড়ায় কোন দুটো জোড়ায় একই প্রথম সদস্য নেই।

উদাহরণ 2 : নিচের সম্পর্কটির ডোমেন ও রেঞ্জ লিখুন। সম্পর্কটি কি ফাংশন?

$$R = \{ (0, 1), (0, -2), (1, 2), (3, -3) \}$$

সমাধান: ডোমেন, $f_1 = \{0, 1, 3\}$

$$\text{রেঞ্জ, } f_2 = \{1, -2, 2, -3\}$$

সম্পর্কটি ফাংশন নয় কারণ দুটো ক্রমজোড়ে একই সদস্য "0" দুবার এসেছে।

উদাহরণ 3 : যদি $A = \{x_1, x_2\}$ এবং $B = \{y_1, y_2\}$ হয় তবে $A * B$ সেটের কার্তেজীয় গুণজ কি ফাংশন?

সমাধান : A ও B সেটের ক্রমজোড় সেটটি হল—

$$A \times B = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\}$$

এখানে, x_1 ও x_2 ক্রমজোড়ে প্রথম সদস্যরূপে দুবার এসেছে ফলে $A \times B$ ফাংশন নয়।

নিজে করুন:

1. যদি $R = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1), (0, 1)\}$ হয়, তবে R এর ডোমেন এবং রেঞ্জ লিখুন।
2. নিচের সম্পর্কগুলোর ডোমেন ও রেঞ্জ লিখুন এবং ভেনচিত্রের মাধ্যমে ফাংশন প্রকাশ করুন।
 - i) $R = \{(1, 0), (2, 3), (-3, 1)\}$
 - ii) $R = \{(-1, 1), (2, -2), (3, 1), (4, 0)\}$

সারসংক্ষেপ

A ও B দুটি সেট হলে $A \times B$ এর অশূন্য উপসেটকে A থেকে B এ একটি অন্বয় বলা হয়। প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়, কিন্তু সব অন্বয় ফাংশন নয়।

পাঠ ২ লেখচিত্র অঙ্কন



উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি—

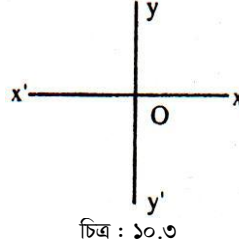
- 1 লেখচিত্রের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- 1 লেখচিত্র সম্পর্কিত বিভিন্ন ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- 1 লেখচিত্র কিভাবে অঙ্কন করা যা তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- 1 সরল সমীকরণের লেখ অঙ্কন করতে পারবেন।



কোন সমীকরণের গাণিতিক প্রকাশ বেশ জটিল। তবে সমীকরণকে যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তা হবে সহজবোধ্য, অর্থবহ ও আকর্ষণীয়। এ পাঠে লেখচিত্র সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হল। লেখচিত্র অঙ্কনের চিন্তা করার পূর্বে কয়েকটি সংজ্ঞা সম্পর্কে ধারণা থাকা দরকার যা নিম্নে দেওয়া হল।

অনুভূমিক রেখা ও উলম্ব রেখা

দুইটি রেখা পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে যে রেখাটি অনুভূমিকভাবে অবস্থান করে তাকে অনুভূমিক রেখা বলে।

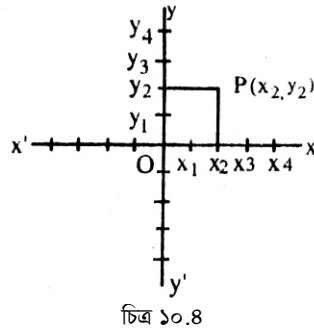


চিত্র ১০.৩ অনুযায়ী $x'ox$ রেখা yoy' রেখাকে পরস্পর O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করেছে। এখানে xox' রেখাকে অনুভূমিক রেখা বা x -অক্ষ বলে।

দুইটি রেখা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করলে যে রেখাটি অনুভূমিক রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থান করে তাকে উলম্ব রেখা বলে। চিত্র ১০.৩ অনুযায়ী yoy' রেখাকে উলম্বরেখা বা y -অক্ষ বলে।

স্থানাংক

কোন রেখায় একটি সুবিধাজক দৈর্ঘ্যের একক নিয়ে সরলরেখার প্রত্যেক বিন্দুকে একটি বাস্তব সংখ্যার মাধ্যমে চিহ্নিত করা যায়। এ সংখ্যাটিকে কোন বিন্দুর স্থানাংক বলে।

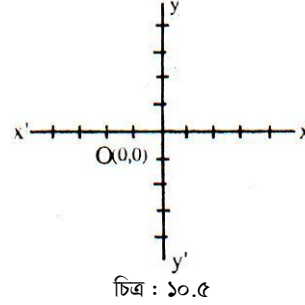


এস এস সি প্রোগ্রাম

চিত্র ১০.৪ এ p বিন্দুটি x -অক্ষ হতে x_2 একক দূরে অর্থাৎ x_2 তে এবং y -অক্ষ হতে y_2 একক দূরে অর্থাৎ y_2 তে অবস্থিত। এখানে p এর স্থানাংক $p(x_2, y_2)$ । p বিন্দুর স্থানাংক বলতে সর্বদা প্রথম সংখ্যাটি x -অক্ষ বরাবর এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটি y -অক্ষ বরাবর অবস্থান করবে।

মূলবিন্দু

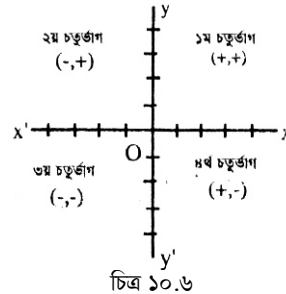
দুইটি রেখা পরস্পর শূন্য বিন্দুতে ছেদ করলে শূন্য বিন্দুকে মূল বিন্দু বলা হয়।



চিত্র ১০.৫ এ xx' ও yy' রেখা পরস্পর $O(0, 0)$ বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। এক্ষেত্রে O বিন্দুটিকে ছেদ বিন্দু বলে এবং যেহেতু উক্ত বিন্দুটির স্থানাংক $(0, 0)$ অর্থাৎ O বিন্দুকে মূলবিন্দু বলা হয়।

চতুর্ভাগ

$x'ox$ ও yoy' রেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করলে নিম্নের চিত্র ১০.৬ অনুযায়ী চারটি অংশ বা ভাগ পাওয়া যায়। এই চারটি ভাগের প্রত্যেক ভাগকে এক একটি চতুর্ভাগ বলে।



চিত্র ১০.৬ এর অবস্থান অনুযায়ী বিন্দুর স্থানাংক কোন ভাগে পড়বে তা একটু লক্ষ করলেই বুঝা যাবে।

চতুর্ভাগ	স্থানাংক
১ম চতুর্ভাগ	১ম সংখ্যার চিহ্ন ধনাত্মক এবং ২য় সংখ্যার চিহ্ন ধনাত্মক
২য় চতুর্ভাগ	১ম সংখ্যার চিহ্ন ঋণাত্মক ও ২য় সংখ্যার চিহ্ন ধনাত্মক
৩য় চতুর্ভাগ	১ম সংখ্যার চিহ্ন ঋণাত্মক ও ২য় সংখ্যার চিহ্ন ঋণাত্মক
৪র্থ চতুর্ভাগ	১ম সংখ্যার চিহ্ন ধনাত্মক ও ২য় সংখ্যার চিহ্ন ঋণাত্মক

বিন্দু স্থাপন

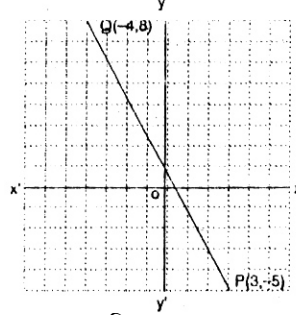
কোন বিন্দুর স্থানাংক দেওয়া থাকলে স্থানাংকগুলি কোন চতুর্ভাগে পড়বে তা নির্দেশ করাকে বিন্দু স্থাপন বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ $p(3, -5)$ । এখানে p বিন্দুর অবস্থান হবে ৪র্থ চতুর্ভাগে কারণ p -এর প্রথম সংখ্যার চিহ্ন ধনাত্মক ও দ্বিতীয় সংখ্যার চিহ্ন ঋণাত্মক।

ছক কাগজ

যে কাগজে সমান সমান দূরে সমান্তরাল রেখা টানা হয় এবং একই সমান দূরে তাদের উপর লম্ব সরলরেখা টানা হয়, ফলে কাগজখানি কতকগুলো ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে পরিণত হয়, সেই কাগজকে ছক কাগজ বলে। সাধারণত প্রতি ক্ষুদ্রতম বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরা হয়।

লেখচিত্র

একটি ছক কাগজে কতকগুলো বিন্দু স্থাপন করে সেগুলো যোগ করলে যে রেখা উৎপন্ন হয় তাকে লেখচিত্র বা গ্রাফ বলে।

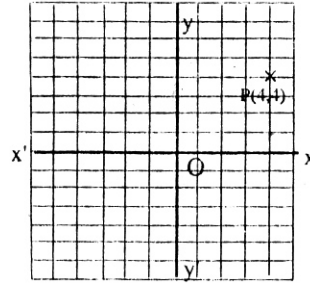


চিত্র : ১০.৭

চিত্র ১০.৭ অনুযায়ী $P(3, -5)$ এবং $Q(-4, 8)$ বিন্দু দুইটি ছক কাগজে স্থাপন করার পর সরলরেখা দ্বারা যোগ করলে যে PQ রেখা পাওয়া যায় তাহাই P ও Q বিন্দুর লেখচিত্র।

ছক কাগজে বিন্দু স্থাপন

ছক কাগজে বিন্দু স্থাপন করতে হলে দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব আকারে ছেদ অবস্থায় নেওয়া হয়।



চিত্র : ১০.৮

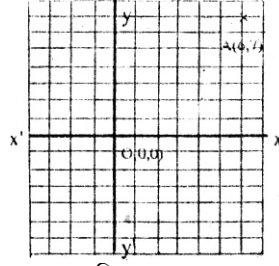
চিত্র ১০.৮-এ xOx' একটি অনুভূমিক রেখা যা yOy' উল্লম্ব রেখাকে পরস্পর মূল বিন্দু O তে ছেদ করেছে। মনে করুন $P(4, 4)$ একটি বিন্দু। এখানে P বিন্দুর স্থানাংকের ১ম সংখ্যাটি ভূজ এবং ২য় সংখ্যাটি কোটি নির্দেশ করে। ছক কাগজে P বিন্দুটি x -অক্ষে ৪ একক দূরে অবস্থান করেছে ও y -অক্ষে ৪ একক দূরে অবস্থান করেছে এবং সংখ্যা দুইটি ধণাত্মক। অতএব P বিন্দু অবস্থান হবে ১ম চতুর্ভাগে।

উদাহরণ: নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করুন—

1. $A(6, 7)$
2. $B(-4, 3)$
3. $C(5, -10)$
4. $(-1, -9)$

সমাধান 1 : একখানা ছক কাগজে চিত্র ১০.৯ অনুযায়ী xOx' ও yOy' দুইটি রেখা পরস্পর লম্বভাবে আঁকুন, এখানে বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে—

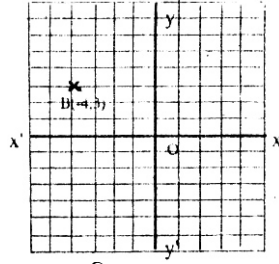
এস এস সি প্রোগ্রাম



চিত্র : ১০.৯

A বিন্দুর স্থানাংক অঙ্কন করুন। এখানে A বিন্দুর স্থানাংকের ১ম সংখ্যাটি ধণাত্মক এবং x -অক্ষ হতে ৬ একক দূরে। আবার ২য় সংখ্যাটি ধণাত্মক ও y -অক্ষ হতে ৭ একক দূরে অবস্থিত। তাই $A(6, 7)$ বিন্দুর অবস্থান হবে ১ম চতুর্ভাগে যা ছক কাগজে নির্দেশিত হল।

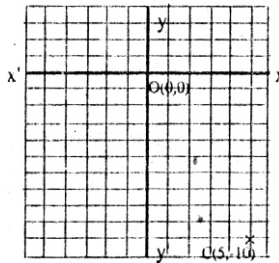
সমাধান ২ : এক খানা ছক কাগজে চিত্র ১০.১০ অনুযায়ী xox' এবং $yo'y'$ রেখা দুইটিকে পরস্পর লম্বভাবে অঙ্কন করুন। এখানে বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $B(-4, 3)$ বিন্দুর অবস্থান ছক কাগজে স্থাপন করুন।



চিত্র : ১০.১০

এখানে B বিন্দুর স্থানাংকের ১ম সংখ্যাটি ঋণাত্মক এবং x -অক্ষ হতে ৪ একক দূরে। আবার ২য় সংখ্যাটি ধণাত্মক এবং y -অক্ষ হতে ৩ একক দূরে অবস্থিত। ফলে B বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে যা চিত্রে নির্দেশিত হলো।

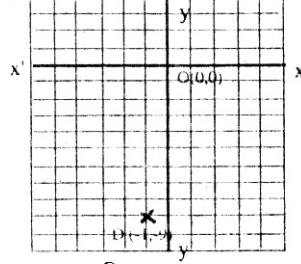
সমাধান ৩ : এক খানা ছক কাগজে চিত্র ১০.১১ অনুযায়ী xox' এবং $yo'y'$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অঙ্কন করুন। এখানে বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $C(5, -10)$ বিন্দুটি ছক কাগজে স্থাপন করুন।



চিত্র : ১০.১১

এখানে C বিন্দুর স্থানাংক $C(5, -10)$ । অর্থাৎ ১ম সংখ্যাটি ধণাত্মক এবং x -অক্ষের ৫ একক দূরে অবস্থিত। আবার ২য় সংখ্যাটি ঋণাত্মক যাহা y -অক্ষ হতে ১০ একক দূরে অবস্থিত। অতএব C বিন্দুটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে যা চিত্র ১০.১১ এ নির্দেশিত হল।

সমাধান 4 : একখানা ছক কাগজে চিত্র ১০.১২ অনুযায়ী xOx' এবং yOy' রেখাকে পরস্পর লম্বভাবে অঙ্কন করুন। বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে একক ধরে $D(-1, -9)$ বিন্দুটি অঙ্কন করুন। এখানে D বিন্দু স্থানাংকের ১ম সংখ্যাটি ঋণাত্মক এবং x -অক্ষ হতে ১ একক দূরে, আবার ২য় সংখ্যাটি ঋণাত্মক এবং y -অক্ষ হতে ৯ একক দূরে অবস্থিত। অর্থাৎ D বিন্দুটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে যা চিত্রে নির্দেশিত হল।



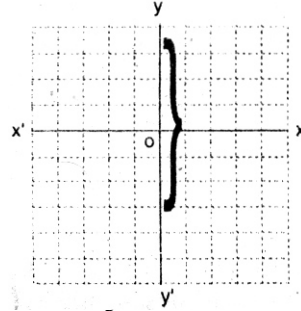
চিত্র : ১০.১২

সরল সমীকরণের লেখ

সমীকরণের লেখ একটি সরলরেখা। এই রেখায় প্রত্যেক বিন্দুর স্থানাংক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে এবং যে কোন মান যুগলের প্রতিকল্প বিন্দু এই রেখায় অবস্থিত। এই লেখ অঙ্কন করতে যে কোন তিনটি বিন্দু নির্দিষ্ট করলেই যথেষ্ট।

উদাহরণ : i. $x=0$ ii. $y=0$ iii. $x=4$ iv. $y=3x$ সমীকরণগুলোর লেখ নির্ণয় করুন।

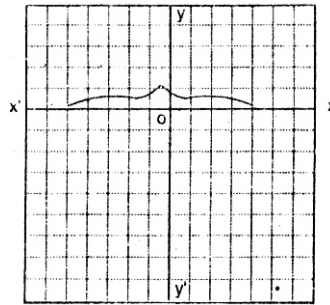
সমাধান i. : মনে করুন $A(x, y)$ বিন্দুতে $x=0$ অর্থাৎ A বিন্দুতে yOy' -এর মান শূন্য। অতএব A বিন্দুটি yOy' রেখায় অবস্থিত। চিত্র ১০.১৩ তে দেখান হল।



চিত্র : ১০.১৩

অর্থাৎ yOy' অক্ষে অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভূজ শূন্য। অতএব, $x=0$ সমীকরণের লেখ y -অক্ষের উপর অবস্থিত।

সমাধান ii. : মনে করুন $B(x, y)$ বিন্দুতে $y=0$ অর্থাৎ B বিন্দুটি xOx' রেখার উপর অবস্থিত। চিত্র ১৪.১৪ তে দেখানো হল।

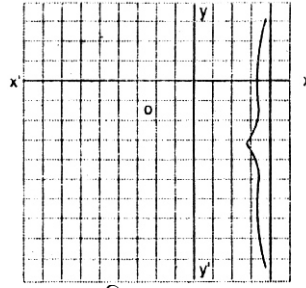


চিত্র : ১০.১৪

অর্থাৎ xOx' রেখায় অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি শূন্য। অতএব $y=0$ সমীকরণের লেখ x অক্ষের উপর অবস্থিত।

এস এস সি প্রোগ্রাম

সমাধান iii. : মনে করুন $C(x, y)$ বিন্দুতে $x=4$ হওয়ার অর্থ C বিন্দুটি সকল অবস্থায়ই 4 একক বরাবর চলতে থাকবে। চিত্র-১০.১৫ তে দেখানো হল।



চিত্র : ১০.১৫

অর্থাৎ মূল বিন্দুর ডানে x -অক্ষে মূল বিন্দু হতে 4 একক দূরত্বে yOy' এর সমান্তরাল রেখা বরাবর সরলরেখাই নির্ণেয় লেখ।

সমাধান iv. : $y=3x$ সমীকরণটির লেখ নির্ণয় করতে হলে প্রথমে সমীকরণ হতে কমপক্ষে তিনটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করতে হবে। এখানে x এর কয়েকটি মানের জন্য সমীকরণ হতে y এর মান নির্ণয় করতে হবে যা নিম্নে ছকে দেওয়া হল।

x	0	1	2	-1	-2
y	0	3	6	-3	-6

অর্থাৎ সমীকরণ হতে পাই—

$$x=0 \text{ হলে } y=0;$$

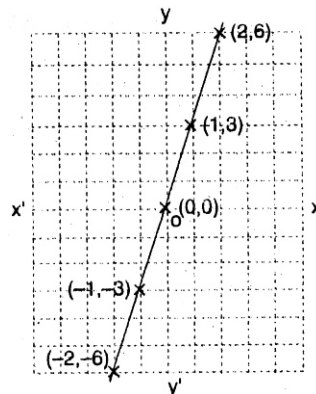
$$x=1 \text{ হলে } y=3;$$

$$x=2 \text{ হলে } y=6;$$

$$x=-1 \text{ হলে } y=-3;$$

$$x=-2 \text{ হলে } y=-6;$$

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম ঘরকে একক ধর $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(-1, -3)$, $(-2, -6)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করুন। বিন্দুগুলোকে যোগ করলে যে রেখা পাওয়া যায় (চিত্র ১০.১৬) তাই নির্ণেয় সমীকরণ $y=3x$ এর লেখ।



চিত্র ১০.১৬

উদাহরণ : $6x+3y=3$ এর লেখ নির্ণয় করুন।

সমাধান : $6x+3y=3$ সমীকরণটির লেখ নির্ণয় করার পূর্বে প্রথমে সমীকরণ হতে কমপক্ষে তিনটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করতে হবে।

অম্বর, ফাংশন ও লেখচিত্র

পৃষ্ঠা-১৯৪

$$\begin{aligned} \text{এখানে, } 6x+3y &= 3 \\ 3y &= 3-6x \\ y &= \frac{3-6x}{3} \end{aligned}$$

অর্থাৎ সমীকরণ হতে পাই-

$$x = 0 \text{ হলে } y = 1 ;$$

$$x = 1 \text{ হলে } y = -1 ;$$

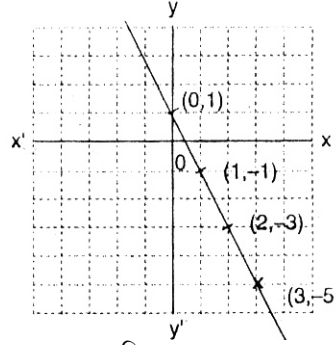
$$x = 2 \text{ হলে } y = -3 ;$$

$$x = 3 \text{ হলে } y = -5 ;$$

∴ বিন্দুগুলো হবে,

x	0	1	2	3
y	1	-1	-3	-5

ছক কাগজে বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক ধরে (0, 1), (1, -1), (2, -3), (3, -5) বিন্দুগুলো স্থাপন করলে চিত্র ১০.১৭ অনুযায়ী যে রেখা পাওয়া যাবে তাহাই নির্ণয়ে $6x+3y=3$ সমীকরণের লেখ।



নিজে করুন

- ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করুন।
 $A(-3, 5)$ $B(-7, -5)$, $C(0, 0)$, $D(-6, 0)$
 $E(0, -4)$, $F(-1, 2)$ $G(10, -9)$
- (1, 3), (2, 6), (-2, -6) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং দেখান যে তাদের সংযোগ রেখা মূল বিন্দু দিয়ে যায়।
- (-1, 9) (5, 10), (3, 7) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং দেখান যে তারা একই সরলরেখায় অবস্থান করে।
- (7, 5) ও (2, 3) এর সংযোগ সরলরেখা x -অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাংক নির্ণয় করুন।
- নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর লেখ অঙ্কন করুন।
 i. $x = 4$ ii. $3x = -9$ iii. $x+3 = 0$ iv. $3y=12$ v. $y+3 = 7$
 vi. $2x = y-6y$ vii. $2x-7y+12 = 0$

পাঠ ৩ ভেদ

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- 1 ভেদ এর সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- 1 বিভিন্ন প্রকার ভেদ সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- 1 ভেদের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

ভেদ গণিতে আলোচিত বিভিন্ন চলকের সম্পর্কে প্রভাবিত করে। ভেদ গণিতে সাম্প্রতিক সংযোজন। বর্তমান পাঠে ভেদ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ভেদ

যদি দুটি চলক এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে, একটি চলক পরিবর্তিত হলে অন্যটিও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয় অর্থাৎ একটি চলকের সাথে অন্যটির পরিবর্তনকে ভেদ (Variation) বলে।

সম্পর্কযুক্ত দুইটি চলকের মধ্যে একটি পরিবর্তিত হলে যদি অন্যটি একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে একটির সাথে অন্যটির পরিবর্তনকে ভেদ বলে।

উদাহরণ : ধ্রুব উচ্চতা বিশিষ্ট কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ভূমির ভেদ হিসাবে অঙ্কিত হবে কারণ ভূমির হ্রাস-বৃদ্ধির কারণে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলেরও একই অনুপাতে হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটবে। যদি x ও y দুটি চলক হয় তবে x ও y এর সম্পর্কে নিম্নভাবে দেখানো যায় :

$x \propto y$; x পরিবর্তিত হয় y সাপেক্ষে, যেখানে চিহ্নটি সাপেক্ষে পরিবর্তিত হয় প্রকাশ করে।

উদাহরণ 1 : যদি $x \propto y$ হয় এবং $x = 10$ যখন $y = 5$, তখন ভেদের ধ্রুবক নির্ণয় করুন

সমাধান : দেওয়া আছে-

$$x \propto y \Rightarrow x = ky; \quad k \text{ ধ্রুবক}$$

$$\Rightarrow k = x/y = 10/5 = 2$$

\therefore ধ্রুবক $k = 2$

নিজে করুন

যদি $P \propto Q$ এবং $P = 15$ তখন ভেদের ধ্রুবক নির্ণয় করুন যখন $Q = 3$ ।

বাস্তব ভেদ : যদি দুটি চলক এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যেন একটি পরিবর্তিত হলে অন্যটি একই অনুপাতে বিপরীত দিকে পরিবর্তিত হয়, তাহলে একটির সাথে অপরটির ব্যস্ত ভেদে অঙ্কিত বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ: যদি $h \sim x$ চলকটি y এর সাথে ব্যস্ত ভেদে অঙ্কিত অর্থাৎ $x \propto \frac{1}{y}$ হয় তবে $x = \frac{k}{y}$ $k = xy$;

যেখানে k একটি ধ্রুবক। সুতরাং x এবং y যদি ব্যস্ত ভেদে অঙ্কিত হয় তবে $xy = \text{ধ্রুবক}$ হবে।

উদাহরণ ২ : যদি $P \propto \frac{1}{Q}$ এবং $P = 9$ হয় তখন ধ্রুবক নির্ণয় করুন যখন $Q = 3$

সমাধান : দেওয়া আছে—

$$P \propto \frac{1}{Q} \Rightarrow PQ = k$$

$$\Rightarrow k = 3 \times 9 = 27$$

$$\therefore k = 27$$

নিজে করুন :

$x \propto y$ এবং $x = 4$ যখন $y = 5$; x ও y এর মধ্যে অন্য় নির্ণয় করুন।

উদাহরণ ৩ : $P \propto R$ হলে প্রমাণ করুন, $P^2 - R^2 \propto PR$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$P \propto R \Rightarrow P = kR ; k = \text{ধ্রুবক} \dots\dots (i)$$

$$P^2 = kPR; \dots\dots\dots (ii) \text{ [উভয় পক্ষে } P \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

আবার,

(i) নং কে উভয় পক্ষে $\frac{R}{k}$ দ্বারা গুণ করে পাই—

$$\frac{PR}{k} = R^2 \dots\dots\dots (iii)$$

(ii) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই—

$$P^2 - R^2 = kPR - \frac{PR}{k}$$

$$P^2 - R^2 = PR \left[k - \frac{1}{k} \right]$$

$$P^2 - R^2 \propto PR; \text{যেহেতু } \left(k - \frac{1}{k} \right) \text{ ধ্রুবক।}$$

অতএব, $P^2 - R^2$, PR এর একটি ভেদ।

নিজে করুন :

1. যদি $x+y \propto x-y$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $x^2 + y^2 \propto xy$

2. যদি $P \propto Q$ এবং $Q \propto R$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $P^2 + Q^2 + R^2 \propto PQ + QR + RP$

3. যদি $A \propto B$ এবং $B \propto C$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $[A^2 + B^2]^{\frac{3}{2}} \propto C^3$

চূড়ান্ত অনুশীলনী

1. যদি $R = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1), (0, 1)\}$ হয় তবে R এর ডোমেন এবং রেঞ্জ লিখুন।
2. নিচের কোন সম্পর্কগুলো ফাংশন লিখুন $R = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1), (0, 1)\}$
 - (i) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
 - (ii) $\{(1, 3), (2, 3), (4, 3)\}$
 - (iii) $\{(1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$
 - (iv) $\{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$
3. নিচের সম্পর্কটির ডোমেন ও রেঞ্জ লিখুন
 $R = \{(0, 5), (0, -8), (3, 2), (4, -4)\}$
সম্পর্কটি কি ফাংশন?
4. F যদি N সেটের একটি সম্পর্ক হয় এবং তাকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা হয় :
 $F = \{(x, y) \mid (x, y) \in N \times N \text{ এবং } 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 8\}$
তবে সম্পর্কটি কি ফাংশন? কারণ লিখুন।
5. ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলো লেখ কাগজে অঙ্কন করুন।
 $A(5, 4) B(-7, 5) C(-7, -5), D(0, 0)$
 $E(7, -5), F(10, 0) G(0, 11)$.
6. $(1, 3), (2, 6)$ ও $(-2, -6)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং দেখান যে তাদের সংযোগ রেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায়।
7. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর লেখ অঙ্কন করুন;
i. $x = 4$, ii. $3x = 9$, iii. $x + 3 = 0$, iv. $3y = 12$
v. $y + 3 = 7$ vi. $2x = 6y$, iv. $2x - 7y + 12 = 0$
8. R_1 ও R_2 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি নিরেট স্বর্ণ গোলক গলিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হল। নবনির্মিত গোলকের ব্যাসার্ধ কত? গোলকের ঘনফল এর ব্যাসার্ধ ঘনের সংগে ভেদে অন্বিত।
[উ : $R = \sqrt[3]{R_1^2 + R_2^2}$
9. $x + y \propto k + \frac{1}{k}$ এবং $x - y \propto k - \frac{1}{k}$ হলে, x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন।
10. স্থির অবস্থান থেকে পড়ন্ত বস্তুর দ্বারা অতিক্রান্ত দূরত্ব বস্তুর পতনকালের বর্গের সাথে সরল ভেদে অন্বিত। যদি 10 সেকেন্ডে একটি বস্তু 122.5 মিটার পতিত হয়, তাহলে পঞ্চম সেকেন্ডে বস্তুটি আর কত দূরে পড়বে?