ইউনিট ১১

দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোট

ভূমিকা

পূর্বে এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। সেখানে একটিমাত্র চলক বা অজ্ঞাত রাশি দিয়ে সমীকরণ গঠিত হয়েছিল। বর্তমান ইউনিটে আমরা দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ ও সমীকরণ জোট সম্পর্কে আলোচনা করবো এবং তাদের ব্যবহার সম্পর্কে আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সংজ্ঞা জানতে পারবেন;
- সমীকরণ জোটের নির্ভরশীলতা ও সংগতিপূর্ণতার শর্ত সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- বিভিন্ন পদ্ধতিতে দুই চলক বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- সরলসহ সমীকরণের ধারণা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনের অনেক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

পাঠ ১ সমীকরণ জোটের সমাধান ও সমাধান সেট (সংগতিপূর্ণতা ও নির্ভরশীলতা)

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোট সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- সমীকরণ জোটের নির্ভরশীলতা ও সংগতিপূর্ণতা সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- সমাধানের প্রকৃতি সম্পর্কে জানতে পারবেন।

দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোট

$x+y = 5$, একটি দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ। যেখানে x ও y তার দুইটি চলক বা অজ্ঞাত রাশি। এই অজ্ঞাত রাশির যে কোন মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হতে পারে। যেমন $x = 1, y = 4$, বা $x = 2, y = 3$ বা $x = 3, y = 2$ বা $x = 4, y = 1$ বা $x = 6, y = -1$ ইত্যাদি। কিন্তু যদি $x+y = 5$ এবং $x-y = 3$ সমীকরণ দুটি একত্রে বিবেচনা করা হয় তাহলে $x+y = 5$ সমীকরণের শুধুমাত্র $x = 4, y = 1$ সমাধান দ্বারা সমীকরণ দুটি সিদ্ধ হয়।

অতএব যদি অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের এরূপ মান চাওয়া হয়, যা দ্বারা প্রদত্ত দুইটি সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তাহলে ঐ সমীকরণ দুইটিকে একত্রে দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোট বলা হয়। অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে সমস্ত মান যুগল দ্বারা সমীকরণ জোট সিদ্ধ হয়, তাদেরকে ঐ সমীকরণ জোটের সমাধান বলা হয়। যেমন, $x+y = 5$ এবং $x-y = 3$ সমীকরণ জোটের সমাধান $x = 4, y = 1$ তাদেরকে $(x, y) = (4, 1)$ আকারেও লেখা যায়। দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের কেবলমাত্র যে একটি সমাধান থাকবে তা নয়, অসংখ্য সমাধানও থাকতে পারেব।

দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটকে সাধারণভাবে নিম্নলিখিত আকারে লেখা হয়।

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

এই সমীকরণ জোট সম্পর্কে নিম্নরূপ সিদ্ধান্ত নেওয়া যায় :

(i) যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয় তাহলে সমীকরণ জোটের সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল এবং এরূপ সমীকরণ জোটের বাস্তব সংখ্যায় অসংখ্য সমাধান থাকে।

উদাহরণ 1 : $6x - 2y = 8$
$9x - 3y = 12$

সমাধান : এখানে $a_1 = 6, a_2 = 9, b_1 = -2, b_2 = -3, c_1 = 8, c_2 = 12$

এখন $\frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ এবং $\frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

অতএব সমীকরণ জোটের সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল এবং অসংখ্য সমাধান আছে। যেমন $(1, -1), (2, 2)$ $(3, 5)$ ইত্যাদি।

(ii) যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয় তাহলে সমীকরণ জোট পরস্পর অসংগতিপূর্ণ এবং এরূপ ক্ষেত্রে সমীকরণ জোটের কোন সমাধান থাকে না।

উদাহরণ-2 : $x + y = 4$
$2x + 2y = 6$

সমাধান : এখানে $a_1 = 1, a_2 = 2, b_1 = 1, b_2 = 2, c_1 = 4, c_2 = 6,$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

অতএব, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

সুতরাং সমীকরণ জোট অসংগতিপূর্ণ এবং সমাধান নাই।

(iii) যদি সমীকরণ জোটের এক বা একাধিক সমাধান থাকে, তাহলে সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ।

ক) যদি $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ বা, $(a_1 b_2 \neq a_2 b_1)$ হয় তবে এরূপ ক্ষেত্রে সমাধান আছে এবং সমাধান অনন্য

খ) যদি $c_1 = c_2 = 0$ হয়, তাহলে সমীকরণ জোট সর্বদা সংগতিপূর্ণ।

এক্ষেত্রে যদি $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হয় তবে সমাধান অনন্য এবং যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ হয় তবে অসংখ্য সমাধান থাকবে।

উদাহরণ 3 : নিম্নলিখিত সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ কিনা ব্যাখ্যা করুন এবং সমাধানের সংখ্যা উলেখ করুন।

(i) $2x + 3y = 4$
$4x + 6y = 8$

ii) $2x + 3y = 4$
$4x + 6y = 6$

(ii) $x+y = 10$
$2x + y = 5$

সমাধান : i) এখানে $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 4,$ এবং $a_2 = 4, b_2 = 6, c_2 = 8$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\therefore$ সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ এবং সমাধান অসংখ্য।

(ii) এখানে $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 4,$ এবং $a_2 = 4, b_2 = 6, c_2 = 6$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$\therefore$ সমীকরণ জোট অসংগতিপূর্ণ এবং সমাধান নাই।

(iii) এখানে $a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = 10$, এবং $a_2 = 2, b_2 = 1, c_2 = 5$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$\therefore$ সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ এবং সমাধান অনন্য।

অনুশীলনী ১১.১

নিম্নলিখিত সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ কিনা ব্যাখ্যা করুন এবং কোনটির সমাধান অনন্য কোনটির সমাধান নাই, কোনটির অসংখ্য সমাধান উলেখ করুন :

1. $3x + 2y = 8$
   $2x - y = 4$
2. $4x + y = 0$
   $8x + 2y = 0$
3. $x + 2y = 0$
   $x - 2y = 0$
4. $-\frac{1}{2}x + y = -1$
   $x - 2y = -1$
5. $2x + 3y = 4$
   $x + 2y = 3$
6. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 2$
   $x + y = 2$

পাঠ ২ একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

1 বিভিন্ন পদ্ধতিতে দুই চলক বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

বর্তমান পাঠে আমরা পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সংগতিপূর্ণ দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান করবো। এই জাতীয় সমীকরণ জোটের সব সময় অনন্য সমাধান পাওয়া যায়। এখানে সমাধান নির্ণয়ের চারটি পদ্ধতি আলোচিত হবে। পদ্ধতিগুলো হল : (i) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (ii) অপনয়ন পদ্ধতি (iii) বজ্রগুণন পদ্ধতি (iv) নির্ণায়ক পদ্ধতি।

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে প্রদত্ত দুইটি সমীকরণের যে কোন একটি থেকে অজ্ঞাত একটি রাশির মান অন্যটিতে প্রকাশ করে পরে ঐ লব্ধ মান অপর সমীকরণে স্থাপন করার পর সমাধান করতে হয়। নিম্নে উদাহরণ দ্বারা আপনারা বিষয়টি স্পষ্ট বুঝতে পারবেন।

উদাহরণ 1 : সমাধান করুন

$$x - y = 4$$
$$3x + 2y = 22$$

সমাধান : $x - y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$3x + 2y = 22 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

(1) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x = 4 + y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

এখন (3) নং হতে x–এর মান (2) নং এ বসিয়ে পাই,

$3(4 + y) + 2y=22$

বা, $12 + 3y + 2y = 22$

বা, $12 + 5y = 22$

বা, $5y = 22 - 12$

বা, $5y = 10$

বা, $y = \frac{10}{5} = 2$

এখন y এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x = 4 + 2 =6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 6, y = 2$

শুদ্ধি পরীক্ষা

১ম সমীকরণ : বামপক্ষ $= x - y = 6 - 2 = 4 =$ ডানপক্ষ

২য় সমীকরণ : বামপক্ষ $= 3x + 2y = 3.6 + 2.2 = 18 + 4 = 22 =$ ডানপক্ষ

*এখানে অজ্ঞাত রাশি **x** এর মান অন্য অজ্ঞাত রাশি **y** তে প্রকাশ করা হয়েছে তারপর অপর সমীকরণে স্থাপন করা হয়েছে।*

উদাহরণ 2 : সমাধান করুন :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$$

$$x + \frac{1}{6}y = 3$$

সমাধান : সমীকরণ দুটিকে ভগ্নাংশ মুক্ত করলে

প্রথমটি, $3x + 2y = 18$ [হর 3 ও 2 এর ল.সা.গু 6 দ্বারা উভয়পক্ষে গুণ করে]

দ্বিতীয়টি, $6x + y = 18$ [হর 1 ও 6 এর ল.সা.গু 6 দ্বারা উভয়পক্ষে গুণ করে]

$\therefore \quad 3x + 2y = 18 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$6x + y = 18 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

(2) নং সমীকরণ হতে পাই,

$y = 18 - 6x \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

এখন (3) নং সমীকরণ হতে y এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

বা, $3x + 2(18 - 6x) = 18$

বা, $3x + 36 - 12x = 18$

বা, $-9x + 36 = 18$

বা, $-9x = 18 - 36$

বা, $-9x = -18$

বা, $x = \frac{-18}{-9} = 2$

এখন x এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$y = 18 - 6.2$

$y = 18 - 12 = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 6)$

উদাহরণ 3 : সমাধান করুন

$x - y = 2a$

$ax + by = a^2 + b^2$

সমাধান : $x - y = 2a \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$ax + by = a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

(1) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x = 2a + y \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

এখন (3) সমীকরণ হতে x-এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$a(2a+y) + by = a^2 + b^2$$

বা, $2a_2 + ay + by = a^2 + b2$

বা, $ay + by = a^2 + b^2 - 2a^2$

বা, $y(a+b) = b^2 - a^2$

$\therefore$ $y = \dfrac{b^2 - a^2}{a+b}$

$y = \dfrac{(b+a)(b-a)}{a+b}$

$\therefore$ $y = b - a$

এখন y-এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x = 2a + b - a$

বা, $x = a + b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = a + b$

$y = b - a.$

অপনয়ন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে প্রয়োজনবোধে সমীকরণ দুইটিকে এমন দুইটি সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়, যেন গুণ করার পর প্রাপ্ত সমীকরণ দুইটিতে যে কোন একটি অজ্ঞাত রাশির সহগদ্বয়ের পরমমান উভয় সমীকরণেই সমান হয়। তখন এই নতুন সমীকরণ দুইটিকে যোগ বা বিয়োগ করে এরূপ একটি সমীকরণ পাওয়া যায়, যেখানে একটিমাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে। এই পদ্ধতিতে একটি অজ্ঞাত রাশি অপসারিত হয় বলে একে অপনয়ন পদ্ধতি বলা হয়।

উদাহরণ 4 : সমাধান করুন : $x+3y = 20$

$2x - y = 5$

সমাধান : $x+3y = 20$ … … … … (1)

$2x - y = 5$ … … … … (2)

অজ্ঞাত রাশি x-এর সহগ দুইটির পরমমান একই করার জন্য (1) নং সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে পাই,

$2x + 6y = 40$ … … … … (3)

এখন (3) নং সমীকরণ হতে (2) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$7y = 35$

$\therefore$ $y = \dfrac{35}{7} = 5$

এখন $y = 5$ এই মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x + 3.5 = 20$

বা, $x + 15 = 20$

বা, $x = 20 - 15$

$\therefore$ $x = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (5, 5)$

উদাহরণ 5 : সমাধান করুন : $2x + 3y = 8$

$$3x - 4y = -5$$

সমাধান : $2x + 3y = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$3x - 4y = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

অজ্ঞাত রাশি x-এর সহগ দুইটির পরমমান একই করার জন্য (1) নং সমীকরণকে 3 এবং (2) নং সমীকরণকে 2 দ্বারা গুণ করে পাই,

$6x + 9y = 24 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$6x - 8y = -10 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

এখন (3) নং সমীকরণ হতে (4) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$17y = 34$

$\therefore \quad y = \dfrac{34}{17} = 2$

এখন y-এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2x + 3.2 = 8$

বা, $2x + 6 = 8$

বা, $2x = 8 - 6$

বা, $2x = 2$

$\therefore \quad x = \dfrac{2}{2} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1, 2)$

শুদ্ধি পরীক্ষা

(1) নং ও (2) নং সমীকরণে x=1 ও y =2 বসিয়ে পাই,

(1) নং সমীকরণ

বামপক্ষ = $2x + 3y = 2.1 + 3.2 = 2 + 6 = 8$ = ডানপক্ষ

(2) নং সমীকরণ

বামপক্ষ = $3x - 4y = 3.1 - 4.2 = 3 - 8 = -5$ = ডানপক্ষ

বজ্রগুণন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিতে সহ-সমীকরণের সমাধান সরাসরি একটি সূত্রের মাধ্যমে পাওয়া যায়। এজন্য প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি নিচের আকারে প্রকাশ করে নিতে হয়।

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

এখন (1) নং সমীকরণকে b_2 এবং (2) নং সমীকরণকে b_1 দ্বারা গুণ করে যথাক্রমে পাই,

$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y + b_2 c_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$a_2 b_1 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

(3) নং সমীকরণ হতে (4) নং সমীকরণ বিয়োগ করলে পাই-

$a_1 b_2 x - a_2 b_1 x + b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0$

$x(a_1 b_2 - a_2 b_1) = b_1 c_2 - b_2 c_1$

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)\ [\text{ যেখানে } a_1\ b_2 \neq a_2\ b_1\ ]$$

আবার (1) নং সমীকরণকে a_2 এবং (2) নং সমীকরণকে a_1 দ্বারা গুণ করে যথাক্রমে পাই,

$$a_1\ a_2\ x + a_2\ b_1\ y + a_2\ c_1\ = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$a_1\ a_2\ x + a_1\ b_2\ y + a_1\ c_2\ = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

এখন (7) নং সমীকরণ হতে (6) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$a_1\ b_2\ y - a_2\ b_1\ y + a_1\ c_2\ - a_2\ c_1\ = 0$$

$$y\,(a_1\ b_2\ - a_2\ b_1\ ) = a_2\ c_1\ - a_1\ c_2$$

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)\ [\text{ যেখানে } a_1\ b_2 \neq a_2\ b_1\ ]$$

যদি $b_1\ c_2\ - b_2\ c_1\ \neq 0$ এবং $a_2\ c_1\ - a_1\ c_2\ \neq 0$ হয় তবে

(5) ও (8) নং সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{এবং} \quad \frac{y}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

অর্থাৎ $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{a_2c_1 - a_1c_2} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

এই সমানুপাত আকারে লিখিত সূত্রকে বজ্রগুণন সূত্র বলা হয় এবং এর প্রয়োগই হল বজ্রগুণন পদ্ধতি।

উদাহরণ 6 : সমাধান করুন

$$2x + y - 14 = 0$$

$$3x - y - 21 = 10$$

সমাধান : বজ্রগুণন সূত্র অনুসারে

$$\frac{x}{1 \text{ X } (-21) - (-1) \text{ X } (-14)} = \frac{y}{3 \text{ X } (-14) - 2 \text{ X } (-21)} = \frac{1}{2 \text{ X } (-1) - 3 \text{ X } 1}$$

বা, $\dfrac{x}{-21-14} = \dfrac{y}{42-42} = \dfrac{1}{-2-3}$

বা, $\dfrac{x}{-35} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{1}{-5}$

বা, $x = \dfrac{-35}{-5} = 7$

বা, $y = \dfrac{0}{-5} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y) = (7,0)$

উদাহরণ 7 : সমাধান করুন

$$3x + 3y - 78 = 0$$

$$3x - 2y - 3 = 0$$

সমাধান : বজ্রগুণন সূত্রানুসারে,

$$\frac{x}{3 \text{ X } (-3) - (-2) \text{ X } (-78)} = \frac{y}{3(-78) - 3 \text{ X } (-3)} = \frac{1}{3 \text{ X } (-2) - 3 \text{ X } (3)}$$

বা, $\frac{x}{-9-156} = \frac{y}{-234+9} = \frac{1}{-6-9}$

বা, $\frac{x}{-165} = \frac{y}{-225} = \frac{1}{-15}$

এখন, $x = \frac{-165}{-15} = 11$

$y = \frac{-225}{-15} = 15$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (11, 15)$

নির্ণায়ক পদ্ধতি

নির্ণায়ক পদ্ধতিতে সমীকরণ জোটের সমাধান সরাসরি একটি সূত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

যদি $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ হয় তবে $a_1 b_2 - a_2 b_1$ রাশিটিকে নির্ণায়কের মাধ্যমে নিচের আকারে প্রকাশ করা যায়।

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

এখন ধরুন $ax + by = p$ ... ... (1)

$cx + dy = q$ ... ... (2)

(1) নং সমীকরণকে d এবং (2) নং সমীকরণকে b দ্বারা গুণ করলে পাই,

$adx + bdy = pd$ ... ... (3)

$bcx + bdy = qb$ ... ... (4)

(3) নং সমীকরণ থেকে (4) সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$adx - bcx = pd - qb$

বা, $x(ad - bc) = pd - qb$

$\therefore$ $x = \frac{pd - qb}{ad - bc}$ ... ... (5)

আবার (1) নং সমীকরণকে c এবং (2) সমীকরণকে a দ্বারা গুণ করে পাই,

$acx + bcy = pc$ .... (6)

$acx + ady = qa$ ... ... (7)

(7) নং সমীকরণ থেকে (6) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$-bcy + ady = -pc + qa$

বা, $y(ad - bc) = qa - pc$

বা, $y = \frac{qa - pc}{ad - bc}$ ... ... (8)

এখন (5) নং সমীকরণ ও (8) নং সমীকরণকে নির্ণায়ক আকারে প্রকাশ করলে পাই,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & q \\ b & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ p & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

দ্রষ্টব্য : $ad-bc=0$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণ জোট হয় অসংগতিপূর্ণ না হয় নির্ভরশীল (অর্থাৎ একই সমীকরণের সমতুল্য)। প্রথম ক্ষেত্রে সমীকরণ জোটের কোন সমাধান নাই এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান রয়েছে।

উদাহরণ 8 : সমাধান করুন :

$$x-y=2$$
$$3x+2y=11$$

সমাধান : x ও y–এর সহগগুচ্ছ নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1.2-3(-1)=2+3=5$$

$$\therefore x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2.2-11(-1)}{5} = \frac{4+11}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1 \text{ X } 11-3 \text{ X } 2}{5} = \frac{11-6}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (3,\ 1)$

উদাহরণ 9 : সমাধান করুন

$$3x-2y=2$$
$$5x-3y=5$$

সমাধান : x ও y এর সহগগুচ্ছ নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 \text{ X } (-3)-5 \text{ X } (-2)$$
$$=-9+10=1$$

$$\therefore x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2 \text{ X } (-3)-5 \text{ X } (-2)}{1} = \frac{-6+10}{1} = 4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{3 \text{ X } 5-2 \text{ X } 5}{1} = \frac{15-10}{1} = 5$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (4, 5)$

উদাহরণ 10 : সমাধান করুন :

$$ax - by = a - b$$
$$bx - ay = -a + b$$

সমাধান : x ও y এর সহগগুচ্ছ নিয়ে নির্ণায়ক হয়,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}$$
$$= a\infty(-a) - b\infty(-b)$$
$$= -a^2 - b^2$$
$$= -(a^2 + b^2)$$

$$\therefore \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ b & -a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{-a(a-b) - b(a+b)}{-(a^2+b^2)}$$
$$= \frac{-a^2 + ab - ab - b^2}{-(a^2+b^2)}$$
$$= \frac{-(a^2+b^2)}{-(a^2+b^2)}$$
$$= 1$$

এবং $$y = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{a(a+b) - b(a-b)}{-(a^2+b^2)}$$
$$= \frac{a^2 + ab - ab + b^2}{-(a^2+b^2)}$$
$$= \frac{a^2+b^2}{-(a^2+b^2)}$$
$$= -1$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (1, -1)$

অনুশীলনী ১১.২

নিম্নলিখিত সমীকরণ জোটগুলোর সমাধান নির্ণয় করুন :

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

1. $x-y=5$, $5x+2y=4$
2. $y-3x=2$, $2x+3y=17$
3. $2x+3y=5$, $3x+4y=7$
4. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=5$, $3y-x=1$
5. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=6$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=5$
6. $3x+4y=10$, $2x-y=-8$
7. $5x+\frac{1}{2}y=2$, $x+\frac{1}{4}y=\frac{1}{4}$
8. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $ax+by=a^2+b^2$

অপনয়ন পদ্ধতি

9. $x-y=5$, $5x+2y=4$
10. $x-y=0$, $4x+2y=6$
11. $2x+9y=16$, $5x-6y=40$
12. $x+y=2$, $2x-y=4$
13. $3x+5y=-7$, $5x+4y=10$
14. $-5x+7y=21$, $8x-3y=-9$
15. $5x-7y=6$, $3x-6y=2$
16. $ax+by=ab$, $bx+ay=ab$
17. $-3x+2y=-2$, $5x-3y=5$
18. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $2bx+ay=2ab$

বজ্রগুণন পদ্ধতি

19. $3x+2y-2=0$, $2x-y-13=0$
20. $2x+y=14$, $3x-y=21$
21. $3x+3y-78=0$, $3x-2y-3=0$
22. $4x+3y-13=0$, $3x+2y-11=0$
23. $5x+\frac{1}{2}y=2$, $x+\frac{1}{4}y=\frac{1}{4}$
24. $8x+3y-9=0$, $12x+6y-13=0$

25. $ax + by = a - b$
$bx - ay = a + b$

26. $ax - by = ab$
$bx - ay = ab$

27. $ax - cy = 0$
$ay - cx = a^2 - c^2$

28. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$2bx + ay = 2ab$

নির্ণায়ক পদ্ধতি

29. $x + y = 3$
$3x - y = 1$

30. $13x + 14y = 40$
$14x + 9y = 37$

31. $17x - 7y = 52$
$3x - 2y = 0$

32. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{1}{4}$
$3x + y = \frac{11}{6}$

33. $4x - 5y + 8 = 0$
$2x - 3y + 6 = 0$

34. $6x - 2y = 6$
$5x + y = 21$

35. $12x - 17y = 16$
$9x - 13y = 11$

36. $ax + by = a^2 + b^2$
$2bx - ay = ab$

37. $ax + by = a^2 + b^2$
$\frac{2x}{a} - \frac{y}{b} = 1$

38. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$
$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$

পাঠ ৩ সরল সহসমীকরণের ব্যবহার

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

l সরল সহসমীকরণের ধারণা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনের অনেক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

সরল সহসমীকরণের ধারণা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনে আমরা অনেক সমস্যার সমাধান করতে পারি। অনেক সময় সমস্যার একাধিক অজ্ঞাত রাশি থাকতে পারে। প্রত্যেক অজ্ঞাত রাশির জন্য স্বতন্ত্র প্রতীক ধরে সমীকরণ গঠন করা যায়। এরূপ স্থলে যতগুলো প্রতীক ধরা হয়, সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে ততগুলো পরস্পর অনির্ভর ও সংগতিপূর্ণ সমীকরণ গঠন করতে হয়। তারপর সমীকরণগুলোর সমাধান করলেই অজ্ঞাত রাশিগুলোর মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1 : একটি ঘরের পরিসীমা 52 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 168 বর্গমিটার হলে, ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন ঘরের দৈর্ঘ্য $= x$ মিটার এবং প্রস্থ $= y$ মিটার

অতএব, প্রথম শর্তানুসারে $2(x + y) = 52$ ... ... (1)

এবং দ্বিতীয় শর্তানুসারে $xy = 168$ ... ... (2)

এখন (2) নং সমীকরণ হতে পাই,

$2(x + y) = 52$

বা, $x + y = \frac{52}{2} = 26$

বা, $x = 26 - y$ ... ... (3)

(3) নং সমীকরণ হতে x এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$(26 - y)y = 168$

বা, $26y - y^2 = 168$

বা, $y^2 - 26y + 168 = 0$

বা, $y^2 - 14y - 12y + 168 = 0$

বা, $y(y - 14) - 12(y - 14) = 0$

বা, $(y - 14)(y - 12) = 0$

হয় $y - 14 = 0$ অথবা $y - 12 = 0$

$\therefore y = 14 \; \therefore y = 12$

এখন y–এর মান (3) নং সমীকরণে বসালে পাই,

$x = 26 - 14 = 12$

$x = 26 - 12 = 14$

যেহেতু দৈর্ঘ্য প্রস্থের থেকে বড় সেহেতু $x = 12, y = 14$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ ঘরটির দৈর্ঘ্য 14 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার।

উদাহরণ 2 : দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের যোগফল 8। সংখ্যাটি থেকে 18 বিয়োগ করলে দশক স্থানীয় অঙ্ক এবং একক স্থানীয় অঙ্ক পরস্পর স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, একক স্থানীয় অঙ্ক $= x$

এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক $= y$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10y + x$

প্রশ্নমতে, $x + y = 8$ … … … … (1)

এবং $10y + x - 18 = 10x + y$

বা, $10x + y - x - 10y = -18$

বা, $9x - 9y = -18$ .... (2)

এখন (1) নং হতে পাই,

$x = 8 - y$ … … … … (3)

(3) নং হতে x-এর মান (2) নং এ বসিয়ে পাই,

$9(8 - y) - 9y = -18$

বা, $72 - 9y - 9y = -18$

বা, $-18y = -18 - 72$

বা, $-18y = -90$

$y = \frac{-90}{-18} = 5$

এখন y-এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x = 8 - 5 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $= 10y + x$

$= 10 \times 5 + 3$

$= 50 + 3$

$= 53$

উদাহরণ 3 : একটি ভগ্নাংশের হর থেকে 1 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান $\frac{1}{2}$ হয় এবং লবের সাথে 7 যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান 1 হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, ভগ্নাংশটির লব $= x$

এবং হর $= y$

$\therefore$ ভগ্নাংশটি $= \frac{x}{y}$

এখন শর্তানুসারে, $\frac{x}{y-1} = \frac{1}{2}$

বা, $2x = y - 1$

বা, $y = 2x + 1$ … … … … (1)

আবার, দ্বিতীয় শর্তানুসারে $\frac{x+7}{y} = 1$

বা, $x + 7 = 7$

বা, $x - y + 7 = 0$ … … … … (2)

এখন (1) নং সমীকরণ হতে y – এর মান (2) নং এ বসিয়ে পাই,

$x - (2x + 1) + 7 = 0$

বা, $x - 2x - 1 + 7 = 0$

বা, $-x + 6 = 0$

বা, x=6

আবার, x-এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই

y=2 X 6 + 1 = 12 + 1 = 13

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি = $\frac{x}{y} = \frac{6}{13}$

উদাহরণ 4 : পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 70 বছর। পাঁচ বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ ছিল। তাদের বর্তমান বয়স কত?

সমাধান : মনে করুন পিতার বর্তমান বয়স = x বছর

এবং পুত্রের বর্তমান বয়স = y বছর

$\therefore$ প্রথম শর্তানুসারে $x + y = 70$ … … … … (1)

এবং দ্বিতীয় শতানুসারে, $(x - 5) = 2(y - 5)$ … … … … (2)

(1) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x = 70 - y$ … … … … (3)

এখন (3) নং সমীকরণ হতে x-এর মান (2) নং এর বসিয়ে পাই,

$70 - y - 5 = 2y - 10$

বা, $-y - 2y = -10 + 5 - 70$

বা, $-3y = -75$

বা, $y = \frac{-75}{-3} = 25$

এখন y-এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x = 70 - 25 = 45$

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স = 45 বৎসর

এবং পুত্রের বর্তমান বয়স = 25 বৎসর

উদাহরণ 5 : এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বেয়ে 10 ঘণ্টায় 80 মাইল গেল এবং স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বেয়ে ফিরে আসতে 40 ঘণ্টা লাগল। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x মাইল এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y মাইল

তাহলে স্রোতের অনুকূলে বেগ ঘণ্টায় (x+y) মাইল

এবং স্রোতের প্রতিকূলে বেগ ঘণ্টায় (x–y) মাইল।

যেহেতু স্রোতের অনুকূলে 10 ঘন্টায় 80 মাইল যায়, সুতরাং

$10(x+y) = 80$

বা, $x+y = 8$……… (1)

যেহেতু স্রোতের প্রতিকূলে 40 ঘণ্টায় 80 মাইল ফিরে আসে। সুতরাং

$40(x-y) = 80$

বা, $x-y = 2$ ……… (2)

(1) **নং** সমীকরণ ও (2) নং সমীকরণ যোগ করে পায়,

$2x = 10$

$$\therefore \quad x = \frac{10}{2} = 5$$

আবার, x-এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$5 + y = 8$$

বা, $y = 8 - 5 = 3$

$\therefore$ দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় 5 মাইল এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল।

অনুশীলনী ১১.৩

1. কোন ভগ্নাংশের লবকে দ্বিগুণ ও হরের সাথে 7 যোগ করলে এর মান $\frac{2}{3}$ হয় এবং হরকে দ্বিগুণ ও লবের সাথে 2 যোগ করলে এর মান $\frac{3}{5}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করুন।
2. একটি ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে এর মান হয় $\frac{1}{2}$ । আবার লব থেকে 7 এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে এর মান হয় $\frac{1}{3}$ । ভগ্নাংশটি নির্ণয় করুন।
3. দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যার অনুপাত 1 : 2। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করুন।
4. কোন ভগ্নাংশের লবের সাথে 1 যোগ করলে তার মান $\frac{1}{2}$ হয়। কিন্তু হরের সাথে 1 যোগ করলে তার মান $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি কত?
5. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা তার অঙ্কদ্বয়ের যোগফলের তিনগুণ। সংখ্যাটিকে 3 দিয়ে গুণ করলে গুণফল অঙ্ক দুইটির যোগফলের বর্গের সমান হয়। সংখ্যাটি কত?
6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককের অঙ্ক দশকের অঙ্ক অপেক্ষা 3 বেশি। সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির তিনগুণ অপেক্ষা 4 বেশি। সংখ্যাটি কত?
7. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 7। সংখ্যাটি থেকে 9 বিয়োগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি কত?
8. কোন সংখ্যার তিনগুণ এবং অপর এক সংখ্যার পাঁচগুণের সমষ্টি 41। প্রথম সংখ্যার দ্বিগুণ দ্বিতীয় সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 6 বেশি হলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করুন।
9. 27 কিলোমিটার ব্যবধানে থেকে দুই ব্যক্তি একই সময়ে একই দিকে যাত্রা করলে 9 ঘণ্টয় মিলিত হতে পারে। কিন্তু পরস্পরের দিকে যাত্রা করলে 3 ঘণ্টায় মিলিত হতে পারে। তাদের প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় করুন।
10. একটি ঘরের পরিসীমা 70 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার হলে এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।
11. পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চেয়ে 20 বৎসর বেশি। ছয় বৎসর আগে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল। বর্তমানে কার বয়স কত?
12. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত?
13. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বেয়ে 5 ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার গেল। স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বেয়ে ফিলে আসতে তার 20 ঘণ্টা লাগল। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় করুন।
14. একটি আয়তকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 6 মিটার বেশি। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়কে 2 মিটার করে বর্ধিত করলে এর ক্ষেত্রফল 64 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?