জ্যামিতি

ইউনিট ১৩

জ্যামিতির প্রাথমিক ধারণা ও সংজ্ঞা

ভূমিকা

জ্যামিতি বা Geometry শব্দের আভিধানিক অর্থ 'ভূমি পরিমাপ'। প্রায় আড়াই হাজার বৎসর পূর্বে ৩০০ খ্রিষ্ট পূর্বাব্দে মিশরে ভূমি চিহ্নিত করার কাজে জ্যামিতি ব্যবহৃত হতো। মানুষ যখন থেকে আকার, আকৃতি, অবস্থান সম্পর্কে অবহিত হল, তখন এসব জ্ঞান শৃঙ্খলাবদ্ধ করে জ্যামিতি শাস্ত্রের উদ্ভব হল। গ্রিক পণ্ডিত ও গণিতবিদ ইউক্লিড সর্বপ্রথম জ্যামিতির বিভিন্ন সূত্রকে সুবিন্যস্ত করে তাঁর 'এলিমেন্টস' (Elements) গ্রন্থের তের খণ্ডে জ্যামিতির ধারণা শ্রেণীবদ্ধ করেন। 'এলিমেন্টস' গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তি। এই ইউনিটে শিক্ষার্থীরা জ্যামিতির প্রাথমিক ধারণা সম্পর্কে অবহিত হবেন এবং আধুনিক জ্যামিতির দৃষ্টিভঙ্গি সম্পর্কে পরিচিত হবেন। তাদের জ্যামিতি পাঠের আগ্রহ ও কৌতূহল বৃদ্ধি পাবে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- বিন্দু, রেখা, তল সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করবেন;
- জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করবেন;
- জ্যামিতির বিভিন্ন ধারণা সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- জ্যামিতিক কোণ সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করবেন;
- ত্রিভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করবেন;
- চতুর্ভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করবেন;
- বহুভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করবেন;
- স্কেল ও কম্পাসের ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ জ্যামিতির সংজ্ঞাহীন ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 জ্যামিতির সংজ্ঞাহীন ধারণাগুলো সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করবেন এবং ব্যাখ্যা করতে পারবেন;

1 সমরেখ এবং একই তল বিশিষ্ট বিন্দু সম্পর্কে ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।

জ্যামিতি কি?

জ্যামিতি শব্দটি জ্যা বা ভূমি এবং মিতি বা পরিমাপ এই দুই শব্দের সমন্বয়ে গঠিত। অতএব জ্যামিতি শব্দের অর্থ ভূমি পরিমাপ। বিন্দু, রেখা, তল ইত্যাদি সংযুক্ত করে যে সকল চিত্র অঙ্কিত হয় তাদের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কিত পাঠকে জ্যামিতি বলে। উদাহরণস্বরূপ কোণ, ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ইত্যাদি সরলরেখ ক্ষেত্রসমূহ এবং বৃত্ত, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ইত্যাদি চিত্র সম্পর্কিত অঙ্কন এবং উপপাদ্য সম্পর্কিত পাঠকে জ্যামিতি বলে।

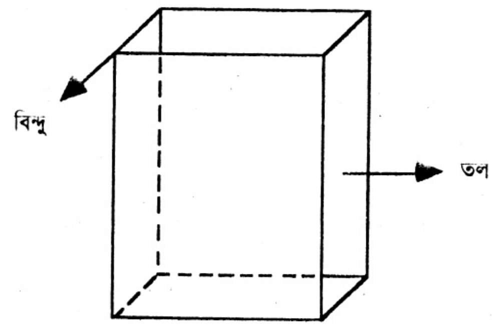
জ্যামিতি শব্দের অর্থ ভূমি পরিমাপ

জার্মান গণিতবিদ এফ ক্লেইন *(F. Klein)* এর মতে, জ্যামিতিক চিত্রের যে সকল ধর্ম ও বৈশিষ্ট্য তার রূপান্তরের *(Transformation)* ফলে পরিবর্তিত হয় না, সে সকল বৈশিষ্ট্য সম্পর্কিত পাঠকে জ্যামিতি বলা হয়। জ্যামিতিক চিত্রের রূপান্তর বলতে তার প্রতিফলন *(Reflection),* ঘূর্ণন *(Rotation)* এবং সমান্তরাল অপসারণ *(Translation)* বুঝায়।

স্থান, বিন্দু, রেখা ও তলের ধারণা

আমাদের চারপাশে যে বিস্তৃত অঞ্চল তাই স্থান *(Space)*। স্থানের আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য ইত্যাদি থেকেই জ্যামিতিক ধারণার উদ্ভব। বিন্দু, রেখা, তল হল জ্যামিতির ভিত্তি। এই ধারণাগুলো বিমূর্ত। চিত্রের সাহায্যে এগুলো অঙ্কন করা যায় না, তবে বুঝার জন্য আমরা এদের চিত্র অঙ্কন করি এবং এদের প্রতিরূপকে উপলব্ধি করার জন্য এসব চিত্র ব্যবহার করি।

বিন্দু জ্যামিতির একটি সংজ্ঞাহীন ধারণা। আমাদের বাস্তব অভিজ্ঞতা ও জ্ঞানের মাধ্যমে এ ধারণাটি উপলব্ধি করতে হবে। সাধারণত একটি ছোট ফুটকি বা ফোঁটা দিয়ে আমরা বিন্দু প্রকাশ করি। এখন আসুন আমরা বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমে বিন্দু, রেখা ও তল সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করার চেষ্টা করি। একটি বক চিত্র (চিত্র ১১.১) নিই। এই চিত্রটির মসৃণ উপরিভাগকে আমরা **তলের** প্রতিরূপ ধরি। এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ নির্ণয় করা যায়। কিন্তু উচ্চতা নির্ণয় করা যায় না। বকটির দুইটি তল যেখানে মিলিত হয়েছে তা বকটির কিনারা বা ধার। এই ধার হচ্ছে **রেখার** একটি অংশের প্রতিরূপ। এর দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু প্রস্থ, উচ্চতা নেই। কাগজে সোজা দাগ কেটে আমরা রেখার প্রতিরূপ তৈরি করি। বকটির দুইটি ধার যেখানে মিলিত হয়েছে সেখানে সৃষ্টি হয়েছে বিন্দু। বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা কিছুই নেই।



চিত্র ১৩.১

তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে কিন্তু উচ্চতা নেই, রেখার দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু প্রস্থ ও উচ্চতা নেই, বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কিছুই নেই।

বিন্দু, রেখা, তল-ধারণাগুলো সংজ্ঞাহীন কেন?

বিন্দুর থেকে সহজবোধ্য শব্দ নেই। বিন্দু হল ফুটকি, ফুটকি হল নির্দিষ্ট সঠিক অবস্থান, সঠিক অবস্থান হল মহাশূন্যে একটি সূক্ষ্মস্থান, সূক্ষ্মস্থান হল ...., এভাবে বিন্দু বুঝাতে আমরা যত চেষ্টা করি না কেন, বিন্দুর সংজ্ঞা দিতে শেষ পর্যন্ত আমরা যেখানে ছিলাম সেখানেই এসে পৌঁছলাম। দ্বিতীয় কারণ হল বিন্দুকে দেখা, ধরা বা ছোঁয়া যায় না, তার অবিকল কোন প্রতিরূপ নেই। সেজন্য যা দিয়ে বিন্দু বোঝানো হোক না কেন তা অশুদ্ধ ও অসম্পূর্ণ হবে।

রেখার ক্ষেত্রেও একই যুক্তি গ্রহণযোগ্য। রেখাকে যখনই অঙ্কন করে দেখানো হবে তখন তার অসম্পূর্ণতা ধরা পড়বে।

তলের ক্ষেত্রেও একই যুক্তি গ্রহণযোগ্য। উদাহরণস্বরূপ 1 বর্গ সেন্টিমিটার একটি তলকে একটি রেখা দ্বারা সমান দুই ভাগে ভাগ করা হয় এবং রেখাটি যদি সামান্যতম স্থানও অধিকার করে তবে 1 বর্গসেন্টিমিটারের অর্ধেক $\frac{1}{2}$ বর্গসেন্টিমিটার থেকে কম হয়ে যাবে। রেখাকে কাল্পনিক ধরলে এই বিভাজন শুদ্ধ হবে। এই কারণে তলও জ্যামিতির সংজ্ঞাহীন মৌলিক ধারণা।

জ্যামিতি শাস্ত্র পাঠ করার সময় আমরা বিন্দু, রেখা ও তলের চিত্র অঙ্কন করে থাকি এবং নাম দিয়ে প্রকাশ করে থাকি।

$.B$

$.A \qquad .C$

A, B এবং C বিন্দুর চিত্র।

চিত্র : ১৩.২

ইউক্লিড তার 'এলিমেন্টস' গ্রন্থের প্রথম খণ্ডের শুরুতেই বিন্দু, রেখা ও তলের যে সংজ্ঞা উলেখ করেছেন তাও আধুনিক দৃষ্টিভঙ্গি অনুসারে অসম্পূর্ণ। ইউক্লিড প্রদত্ত বর্ণনা নিম্নরূপ :

(১) যার কোন <u>অংশ</u> নেই তাই <u>বিন্দু।</u>

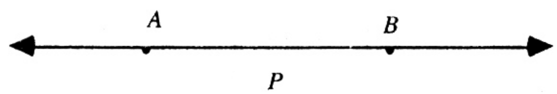
(২) যার কেবল <u>দৈর্ঘ্য</u> আছে, কিন্তু <u>প্রস্থ</u> বা <u>উচ্চতা</u> নেই তাই <u>রেখা।</u>

(৩) রেখার <u>প্রান্ত</u> বিন্দু।

(৪) যার <u>দৈর্ঘ্য</u> ও <u>প্রস্থ</u> আছে কিন্তু <u>উচ্চতা</u> নেই, তাই তল।

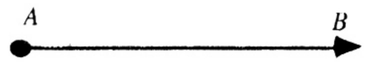
(৫) তলের প্রান্ত রেখা।

রেখা, রশ্মি ও রেখাংশ



চিত্র : ১৩.৩

উপরের চিত্রে একটি রেখা P দেখানো হয়েছে। এই রেখাটির কোন প্রান্তবিন্দু নেই, অর্থাৎ রেখাটির দুই দিকেই তার প্রসার অসীম। যদি রেখাটির উপর A ও B দুটি বিন্দু হয়, তবে এই অসীম রেখাকে প্রকাশ করার প্রতীক হল, $\overset{\times}{AB}$ ।



চিত্র : ১৩.৪

যদি রেখাটির একদিকে একটি প্রান্তবিন্দু থাকে এবং অন্যদিকে অসীম হয়, তবে তাকে রশ্মি বলে। রশ্মিকে প্রকাশ করার প্রতীক $\overset{\varnothing}{AB}$ । চিত্র **১১.৪** দ্বারা $\overset{\varnothing}{AB}$ রশ্মিকে বুঝান হচ্ছে।

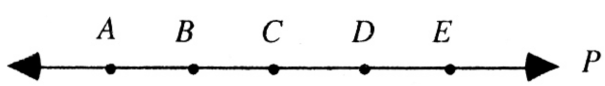
চিত্র ১৩.৫

একটি রেখার দুটি প্রান্ত বিন্দু থাকলে তাকে রেখাংশ বলে। রেখাংশ প্রকাশের প্রতীক $\overline{AB}$ চিত্র **১১.৫** দ্বারা $\overline{AB}$ রেখাংশকে বুঝান হচ্ছে।

> **$\overset{\times}{AB}$ প্রতীক দ্বারা রেখা, $\overrightarrow{AB}$ প্রতীক দ্বারা রশ্মি এবং $\overline{AB}$ দ্বারা রেখাংশ বুঝায়।**

সমরেখ বিন্দু *(Collinear points)*

সংজ্ঞা : যে সকল বিন্দু একই রেখার উপর অবস্থান করে তাদেরকে সমরেখ বিন্দু বলে।

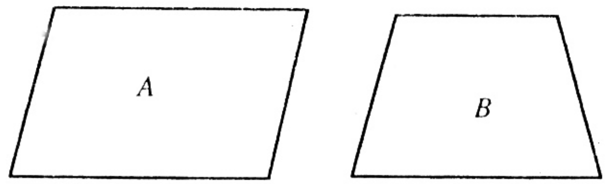


চিত্র : ১৩.৬

উপরের চিত্রে P রেখার উপর A, B, C, D, E বিন্দুগুলো অবস্থিত। অতএব, A, B, C, D, E বিন্দুগুলি সমরেখ বিন্দু।

তল *(Plane)*

পূর্বে আমরা আলোচনা করেছি, কোন মসৃন বস্তুর উপরিভাগকে তল বলা হয়। চারকোণ চিত্র দিয়ে তল প্রকাশ করা হয় এবং ইংরেজি বা বাংলা অক্ষর দিয়ে তল এর নাম দেয়া হয়।



তল A তল B

চিত্র : ১৩.৭

একই তল বিশিষ্ট বিন্দু *(Co-planer points)*

সংজ্ঞা : যে সকল বিন্দু একই তলে অবস্থান করে তাদের সমতল বিশিষ্ট বিন্দু বলা হয়।

এখন আসুন আমরা নিচের টেবিলের মাধ্যমে জ্যামিতির সংজ্ঞাহীন ধারণাগুলো একনজরে জেনে নিই।

জ্যামিতিক চিত্র	বর্ণনা	প্রতীক	পড়ার নিয়ম
· A বিন্দু	নির্দিষ্ট অবস্থান	A বিন্দু	A বিন্দু
রেখা	সীমাহীন সরলরেখা	× AB অথবা × BA	AB রেখা
রশ্মি	একটি প্রান্তবিন্দু থেকে শুরু করে একটি নির্দিষ্ট দিকে সীমাহীন সরলপথ।	∅ AB	AB রশ্মি
রেখাংশ	একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু পর্যন্ত সরলপথ।	$\overline{AB}$ অথবা $\overline{AB}$	AB রেখাংশ
সমরেখ বিন্দু	একই রেখায় অবস্থিত বিন্দু	সমরেখ $ABCD$	সমরেখ বিন্দু $ABCD$
তল	মসৃণ উপরিভাগ	তল ABC	ABC তল

অনুশীলনী ১৩.১

1. একটি বইয়ের কোথায় রেখাংশ বা ধার দেখা যায়?
2. তলের প্রতিরূপ আমরা কোথায় দেখি।
3. শূন্যস্থান পূরণ করুন :
   (ক) স্থান হল কতকগুলো -------- সেট।
   (খ) রেখা কতকগুলো ---------- সমাবেশ।
   (গ) রশ্মির একটি ---------- আছে।
   (ঘ) যে সকল বিন্দু একই রেখায় অবস্থান করে তাদের ------- বিন্দু বলে।
4. রেখা, রেখাংশ ও রশ্মি প্রকাশের প্রতীক কি?

পাঠ ২ স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য কাকে বলে তা বর্ণনা করতে পারবেন;
- জ্যামিতিতে স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য কিভাবে ব্যবহৃত হয় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- স্বতঃসিদ্ধ এবং স্বীকার্যের নমুনা দিতে পারবেন।

স্বতঃসিদ্ধ *(Axioms)*

সমগ্র গণিত শাস্ত্র যুক্তিনির্ভর। এই যুক্তির প্রয়োগ জ্যামিতিতে খুবই সুস্পষ্ট। যুক্তিতো শূন্যকে নির্ভর করে গড়ে ওঠে না। তাই যুক্তি প্রয়োগের ক্ষেত্র প্রস্তুত করার জন্য কতকগুলো অভিজ্ঞতালব্ধ সু স্পষ্ট সত্যকে ধরে নেয়া হয়। এই সুস্পষ্ট সহজ ও সরল সত্যগুলোকে স্বতঃসিদ্ধ *(Axioms)* বলা হয়। ইউক্লিড এগুলোকে সাধারণ ধারণা বলেছিলেন। নিম্নে কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ দেয়া হল :

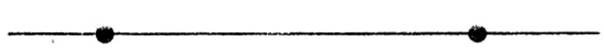
১. যে সকল বস্তুর প্রত্যেকটি একই বস্তুর সমান তারা পরস্পর সমান।
২. সমান সমান রাশির সঙ্গে সমান সমান রাশি যোগ করলে সমষ্টিগুলো সমান হয়।
৩. সমান সমান রাশি থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলো সমান হয়।
৪. সমান সমান রাশিকে সমান সমান রাশি দিয়ে গুণ করলে গুণফলগুলো সমান হয়।
৫. সমান সমান রাশিকে সমান সমান রাশি দিয়ে ভাগ করলে ভাফলগুলো সমান হয়।
৬. একটি সম্পূর্ণ রাশি তার যে কোন অংশ থেকে বৃহত্তর।

স্বীকার্য *(Postulate)*

যে কোন গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নিতে হয়। বর্তমানে জ্যামিতিতে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলকে প্রাথমিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করে তাদের কিছু বৈশিষ্ট্যকে স্বীকার করে নেয়া হয়। এই স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যসমূহকে জ্যামিতিক স্বীকার্য *(Postulate)* বলা হয়। বাস্তব ধারণার সঙ্গে সঙ্গতি রেখেই স্বীকার্যসমূহ নির্ধারণ করা হয়।

নিম্নে কয়েকটি স্বীকার্যের উদাহরণ দেয়া হল :

স্বীকার্য ১ : যে কোন দুইটি পৃথক বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।



চিত্র : ১৩.৮

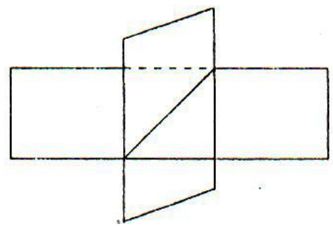
স্বীকার্য ২ : দুটি পৃথক রেখা কেবলমাত্র একটি বিন্দুতেই ছেদ করে।

চিত্র : ১৩.৯

স্বীকার্য ৩ : একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল অঙ্কন করা যায়।

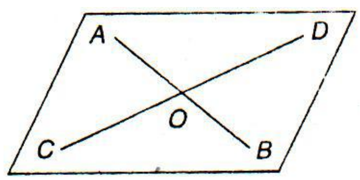
স্বীকার্য ৪ : কোন সমতলের উপর অবস্থিত দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখা সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত।

স্বীকার্য ৫ : যদি দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করে, তবে তারা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় ছেদ করবে।



চিত্র : ১৩.১০

স্বীকার্য ৬ : যদি দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করে তবে তারা একটি এবং কেবলমাত্র একটি তলেই অবস্থান করে।



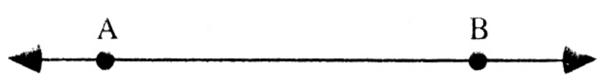
চিত্র : ১৩.১১

স্বীকার্য ১ থেকে স্বীকার্য ৬ কে আপতন স্বীকার্য বলে।

দূরত্ব ও সংখ্যারেখা

জ্যামিতিতে আমাদের দুটো বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় ও প্রকাশ করতে হয়। দূরত্বের ধারণাও জ্যামিতির একটি প্রাথমিক ধারণা। এজন্য স্বীকার করে নেয়া হয় যে,

স্বীকার্য ৭ : (ক) প্রত্যেক বিন্দুযুগল (A, B) একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে যাকে A বিন্দু হতে B বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং AB দ্বারা সূচিত করা হয়।



চিত্র ১৩.১২

(খ) A ও B ভিন্ন বিন্দু হলে AB সংখ্যাটি ধনাত্মক। তানাহলে $AB = 0$

(গ) A থেকে B এর দূরত্ব এবং B থেকে A এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ $AB = BA$.

উপরোক্ত স্বীকার্যকে দূরত্ব স্বীকার্য বলে।

স্বীকার্য ৮ : রুলার বা স্কেল সম্পর্কিত স্বীকার্য

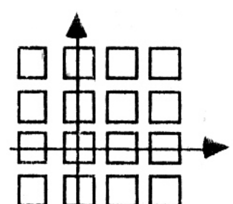
একটি রুলার বা সংখ্যারেখার উপরিস্থিত বিন্দু এবং প্রান্ত সংখ্যার *(Real number)* সঙ্গে এক-এক মিল করা যায় যেন প্রদত্ত রেখার উপরিস্থিত যে কোন দুটি বিন্দু A ও B এমন হয় যে,

(ক) A বিন্দুর সঙ্গে শূন্যের এক-এক মিল হয়

(খ) B বিন্দু একটি ধনাত্মক সংখ্যার সঙ্গে এক-এক মিল করে।
এই স্বীকার্য অনুসারে আপনি যে কোন রেখার বিন্দুর সঙ্গে প্রান্ত্য সংখ্যার এক-এক মিল করতে পারেন যেন–
(ক) প্রত্যেক বিন্দুর সঙ্গে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সংখ্যা মিল হয়।
(খ) প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দুকে নির্দেশ করে।
(গ) যে কোন বিন্দুকে শূন্য হিসেবে ধরা যেতে পারে এবং
(ঘ) যে কোন বিন্দুকে একটি ধনাত্মক সংখ্যা হিসাবে চিহ্নিত করা যায়।

অনুশীলনী ১৩.২

1. শূন্যস্থান পূরণ করুন
   (ক) যে কোন দুটি পৃথক বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি -------- অঙ্কন করা যায়।
   (খ) দুটি পৃথক রেখা কেবলমাত্র একটি -------- ছেদ করে।
   (গ) সমরেখ নয় এরূপ তিনটি বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি ------- অঙ্কন করা যায়।
   (ঘ) যদি দুটি তল পরস্পরকে ছেদ করে তবে তাদের ছেদ বিন্দুগুলোর সেট একটি -------- সরলরেখায় হবে।
   (ঙ) যদি দুটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করে তবে তারা অবশ্যই একটি এবং কেবলমাত্র একটি --------- অবস্থান করবে।
2. রুলার স্বীকার্য অনুসারে সংখ্যারেখার বিন্দুর সঙ্গে কোন ধরনের সংখ্যার এক-এক মিল হয়?
3. সংখ্যারেখা বিন্দুর সঙ্গে যে সংখ্যার মিল হয় তাকে ঐ বিন্দুর কি বলে?
4. জ্যামিতির স্বতঃসিদ্ধগুলো বর্ণনা করুন।
5. কোন হল ঘরের সারি ও কলামে সাজান আসন ব্যবস্থায় একটি নির্দিষ্ট সারি এবং একটি নির্দিষ্ট কলামের মিলন স্থানে একটি এবং কেবলমাত্র একটি আসন থাকে কেন ব্যাখ্যা করুন।



চিত্র : ১৩.১৩

পাঠ ৩ জ্যামিতির বিভিন্ন ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 জ্যামিতির বিভিন্ন ধারণা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন।

সমতল জ্যামিতি *(Plane Geometry)*

স্বীকার্য-৩ অনুসারে একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এরূপ তিনটি বিন্দু একটি সমতল নির্দিষ্ট করে এবং স্বীকার্য-৪ অনুসারে কোন সমতলের উপর অবস্থিত দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত। জ্যামিতির যে শাখায় একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, রেখা বা রেখাংশ এবং তাদের সাথে সম্পর্কিত বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্তা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে সমতল জ্যামিতি বলে। এই বইটির জ্যামিতি অংশে সমতল জ্যামিতিই আমাদের আলোচ্য বিষয়। সুতরাং বিশেষ কোন বিষয় উলেখ না থাকলে বুঝতে হবে আলোচ্য সকল বিন্দু, রেখা ইত্যাদি একই সমতলে অবস্থিত।

জ্যামিতির যে শাখায় একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, রেখা বা রেখাংশ এবং তাদের সাথে সম্পর্কিত বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্তা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে সমতল জ্যামিতি বলে।

জ্যামিতির উপাদান

বিন্দু, রেখা এবং তল এদের বৈশিষ্ট্য বা সম্পর্ক এবং বিন্দু, রেখা বা তল দ্বারা সৃষ্ট জ্যামিতিক চিত্র বা ক্ষেত্র এবং তাদের সম্পর্ক বা বৈশিষ্ট্য হল জ্যামিতির উপাদান।

উপপাদ্য

জ্যামিতিক উপাদান সম্পর্কিত কোন সত্য, তাদের বৈশিষ্ট্য বা সম্পর্ক যুক্তির সাহায্যে প্রমাণ করার প্রস্তাবকে উপপাদ্য বলা হয়।

সম্পাদ্য

জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন বা বিভাজন সম্পর্কিত প্রস্তাবকে সম্পাদ্য বলা হয়।

জ্যামিতিক প্রমাণ

কোন জ্যামিতিক তত্ত্বকে প্রমাণ করতে হলে কিছু প্রাথমিক ধারণা, সংজ্ঞা এবং স্বীকার্যের মাধ্যমে ঐ তত্ত্ব সম্পর্কিত বিভিন্ন উক্তি ধাপে ধাপে যৌক্তিকভাবে প্রমাণ করতে হয়। এরূপ উক্তিকে সাধারণ প্রতিজ্ঞা বলা হয়। জ্যামিতিক প্রমাণে বিভিন্ন তথ্য চিত্রের সাহায্যে বর্ণনা করা হয়। জ্যামিতিক প্রমাণ অবশ্যই যুক্তি নির্ভর হতে হবে।

জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা বর্ণনায় সাধারণ নির্বাচন *(General enunciation)* এবং বিশেষ নির্বচন *(Particular enunciation)* ব্যবহার করা হয়। সাধারণ নির্বাচন হচ্ছে চিত্র নিরপেক্ষ বর্ণনা এবং বিশেষ নির্বচন হচ্ছে চিত্র নির্ভর বর্ণনা।

কোন প্রতিজ্ঞায় সাধারণ নির্বচন দেওয়া থাকলে প্রতিজ্ঞার বিষয়বস্তু চিত্রের সাহায্যে বিশেষ নির্বচনে রূপান্তরিত করা যায়। এজন্য চিত্র অঙ্কন করতে হয়। জ্যামিতিক উপপাদ্যের আলোচনায় সাধারণত নিম্নলিখিত ধাপগুলো থাকে।

(ক) সাধারণ নির্বচন

(খ) বিশেষ নির্বচন

(গ) প্রয়োজনীয় অঙ্কনের বর্ণনা

(ঘ) প্রমাণের যৌক্তিক ধাপগুলোর বর্ণনা।

যদি কোন প্রতিজ্ঞা সরাসরিভাবে একটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত থেকে প্রমাণিত হয়, তবে তাকে অনেক সময় ঐ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত *(Corollary)* হিসেবে উলেখ করা হয়।

জ্যামিতিক সম্পাদ্যের আলোচনায় চিত্র অংকন করে চিত্রের বর্ণনা এবং যৌক্তিকতা উলেখ করতে হয়।

জ্যামিতিক চিত্রের স্থানান্তর

সমতল জ্যামিতিতে একই সমতলে অবস্থিত বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র এবং তাদের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে আলোচনা করা হয়। এসব চিত্র ঐ সমতলেরই অংশ বিশেষ। এরূপ একটি জ্যামিতিক চিত্রকে কোনরূপ পরিবর্তন না করে সমতলের উপর স্থানান্তর করা যায় বলে ধরে নেয়া হয়। সাধারণত প্রতিফলন *(Reflection),* ঘূর্ণন *(Rotation)* বা সমান্তরাল অপসারণ *(Translation)* দ্বারা এই স্থানান্তর *(Transformation)* করা হয়। এই স্থানান্তরের ফলে চিত্রের আকার এবং আকৃতি অপরিবর্তিত থাকে। এভাবে একটি চিত্রকে স্থানান্তর করে অপর একটি চিত্রের উপর স্থানান্তর করার প্রক্রিয়াকে উপরিস্থাপন বা উপরিপাতন *(Superposition)* বলা হয়।

উপরিপাতন প্রক্রিয়ায় জ্যামিতিক চিত্র যদি অঙ্গাঙ্গিভাবে মিলে যায় তবে চিত্র দুটির সমাপাতন *(Coincidence)* হয়েছে ধরা যায় এবং চিত্র দুইটি সর্বসম *(congruent)* ধরা হয়। সর্বসমতার একটি ধর্ম এই যে, A, B, C তিনটি চিত্রের মধ্যে A ও B সর্বসম এবং B ও C সর্বসম হলে A ও C অবশ্যই সর্বসম হবে।

রেখাংশের সমতা

দুটি রেখাংশ যদি এমন হয় যে, উপরিপাতন প্রক্রিয়ায় তাদের সমাপাতন সম্ভব, তবে তারা সর্বসম হবে। এ অর্থেই দুটি রেখাংশকে সমান বলা হয়।

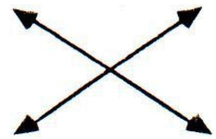
চিত্র : ১৩.১৪

AB রেখাংশকে যদি CD রেখাংশের উপর এমনভাবে উপরিপাত করা হয় যে, A বিন্দু C বিন্দুর উপর পড়ে এবং AB রেখাংশ CD রেখাংশ বরাবর পড়ে, তবে রেখাংশদ্বয়ের সমাপাতন হবে যদি এবং বেবলমাত্র যদি $AB = CD$ হয়। তাহলে B বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর উপর পড়বে।

সুতরাং বলা যায়, দুটি রেখাংশ সমান হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি তাদের দৈর্ঘ্য সমান হয়। এজন্য AB এবং CD রেখাংশের সমতা বুঝাতে $AB = CD$ লেখাই যথেষ্ট।

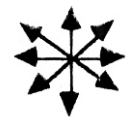
পরস্পরছেদী ও সমান্তরাল রেখা

স্বীকার্য-২ অনুসারে দুইটি পৃথক রেখা কেবলমাত্র একটি বিন্দুতেই ছেদ করে। দুইটি ভিন্ন রেখার যদি একটি সাধারণ বিন্দু থাকে তবে তাদেরকে পরস্পরছেদী *(Intersecting)* রেখা বলা হয় এবং সাধারণ বিন্দুটিকে তাদের ছেদ বিন্দু বলা হয়। ছেদবিন্দুতে রেখা দুইটি পরস্পরকে ছেদ করে বা পরস্পরের সাথে মিলিত হয়।



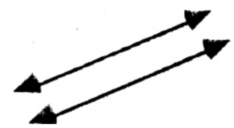
চিত্র : ১৩.১৫

তিন বা ততোধিক রেখার যদি একটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তবে তারা ঐ বিন্দুতে সমবিন্দু *(Concurrent)* হয়েছে বলা হয়।



চিত্র : ১৩.১৬

যদি দুইটি সরলরেখার কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে তবে তাদেরকে সমান্তরাল *(Parallel)* সরলরেখা বলা হয়। AB রেখাংশ ও CD রেখাংশ সমান্তরাল বলতে বুঝায় AB রেখা ও CD রেখা সমান্তরাল। AB ও CD রেখা বা রেখাংশ সমান্তরাল হলে $AB||CD$ লেখা হয়।

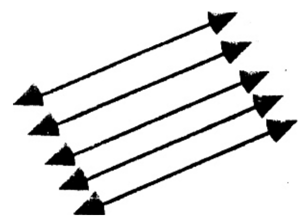


চিত্র : ১৩.১৭

তিন বা ততোধিক সরলরেখার কোন দুইটিই যদি পরস্পরছেদী না হয়, তবে তাদের পরস্পর সমান্তরাল বলা হয়।

এখানে লক্ষণীয় যে,

(ক) দুইটি ভিন্ন সরলরেখার সর্বাধিক একটি সাধারণ বিন্দু থাকতে পারে। কারণ স্বীকার্য-১ অনুসারে দুইটি পৃথক বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।



চিত্র : ১৩.১৮

(খ) সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখা হয় সমান্তরাল, না হয় কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদতে করে।

অনুশীলনী ১৩.৩

1. শূন্যস্থান পূরণ করুন :
   - (ক) একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এরূপ তিনটি বিন্দু একটি ------ নির্দিষ্ট করে।
   - (খ) জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন বা বিভাজন সম্পর্কিত প্রস্তাবকে -------- বলে।
   - (গ) একটি চিত্রকে স্থানান্তর করে অপর একটি চিত্রের উপর স্থানান্তর করার প্রক্রিয়াকে -------- বলে।
   - (ঘ) দুটি ভিন্ন রেখার একটি সাধারণ -------- থাকলে তাদেরকে ------- রেখা বলে।
   - (ঙ) দুইটি ভিন্ন সরলরেখার কোন সাধারণ --------- না থাকলে ------তাদেরকে রেখা বলে।
2. জ্যামিতিক চিত্রের স্থানান্তর বলতে কি বোঝায়?
3. জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা কাকে বলে?
4. সম্পাদ্য ও উপপাদ্য কাকে বলে?
5. সমতল জ্যামিতি বলতে কি বুঝায় বর্ণনা করুন।
6. জ্যামিতির উপাদান কি?
7. রেখাংশের সমতা বলতে কি বুঝায়?
8. পরস্পরছেদী ও সমান্তরাল রেখা কাকে বলে?

পাঠ ৪ জ্যামিতিক কোণের ধারণা

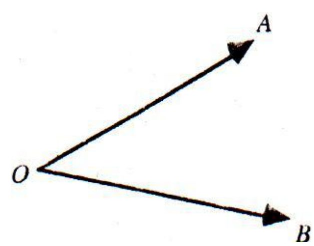
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- কোণের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- বিভিন্ন কোণের সংজ্ঞা দিতে পারবেন এবং অঙ্কন করতে পারবেন।

কোণ (*Angle*)

সংজ্ঞা : সমতলস্থ একই প্রান্তবিন্দুতে দুইটি স্বতন্ত্র রশ্মির মিলন স্থলে কোণ উৎপন্ন হয়। রশ্মিগুলোকে কোণের বাহু এবং প্রান্তবিন্দুকে কোণের শীর্ষ বলা হয়।



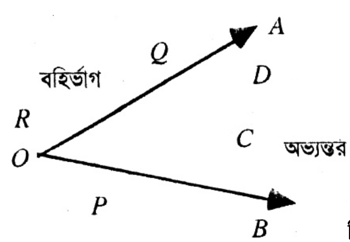
চিত্র : ১৩.১৯

উপরের চিত্রে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ রশ্মির প্রান্তবিন্দু O তে উৎপন্ন কোণটিকে $<AOB$ বা $<BOA$ বা সংক্ষেপে $<O$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি কোণটির বাহু এবং তাদের প্রান্তবিন্দু O কোণটির শীর্ষবিন্দু।

সমতলস্থ একই প্রান্তবিন্দুতে দুইটি স্বতন্ত্র রশ্মির মিলন স্থলে কোণ উৎপন্ন হয়।

কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ

কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ লক্ষ করুন। অভ্যন্তর ভাগে যে কোন দুইটি বিন্দুকে যোগ করলে তাদের সংযোজক রেখা অভ্যন্তর ভাগেই অবস্থান করবে। যেমন C ও D বিন্দু। কিন্তু বহির্ভাগের যে কোন দুইটি বিন্দুকে যোগ করলে তাদের সংযোজক রেখা বহির্ভাগে থাকবে না। যেমন P ও Q বিন্দু।

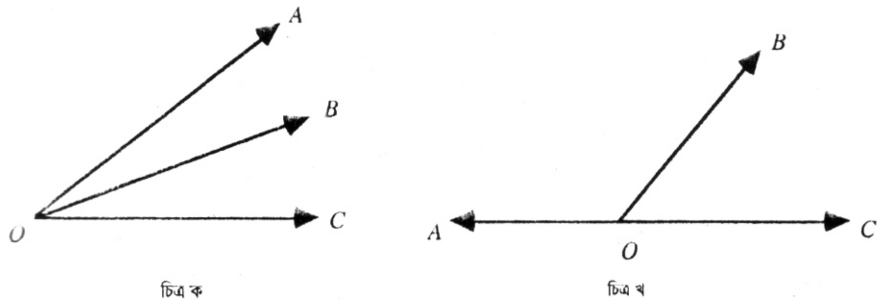


চিত্র : ১৩.২০

সন্নিহিত কোণ (*Adjacent angles*)

সংজ্ঞা : যদি দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু এবং একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং ঐ সাধারণ বাহুটি যদি কোণ দুইটির অভ্যন্তরভাগে অবস্থিত না হয়, তবে কোণ দুইটিকে সন্নিহিত কোণ বলা হয়। এরূপ দুইটি কোণের

একটিকে অপরটির সন্নিহিত কোণও বলা হয়। দুইটি সন্নিহিত কোণের সাধারণ বাহু ব্যাতিত অপর দুই বাহুকে কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহু বলে।



চিত্র : ১৩.২১

চিত্রে $<AOB$ ও $<BOC$ সন্নিহিত কোণ, O বিন্দু কোণ দুইটির শীর্ষবিন্দু, $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি কোণ দুইটির সাধারণ বাহু এবং $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OC}$ রশ্মিদ্বয় তাদের বহিঃস্থ বাহু।

দ্রষ্টব্য : কোন রশ্মি তার প্রান্তবিন্দুতে একটি সরলরেখার সাথে মিলিত হলে, যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয় তারাও সন্নিহিত কোণ (চিত্র **১৩.২১** এর খ)। এখানে বহিঃস্থ বাহুদ্বয় $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OC}$ একই সরলরেখা $\overleftrightarrow{AC}$ এর অংশ।

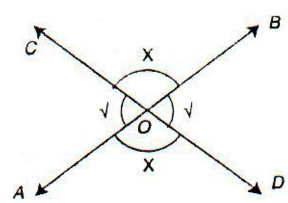
রৈখিক যুগল কোণ

সংজ্ঞা : দুইটি সন্নিহিত কোণের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় যদি বিপরীত রশ্মি হয় অর্থাৎ একই সরলরেখার অংশ হয়, তবে কোণ দুইটিকে রৈখিক যুগল কোণ বলে। চিত্র **১৩.২১** এর খ-এ $<AOB$ ও $<BOC$ রৈখিক যুগল কোণ।

বিপ্রতীপ কোণ *(Vertically opposite angles)*

সংজ্ঞা : যদি দুইটি কোণের একটির বাহুদ্বয় অপরটির বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মি হয় এবং কোণ দুইটির শীর্ষবিন্দু একই হয়, তাহলে কোণ দুইটিকে বিপ্রতীপ কোণ বলে।

চিত্রে $<AOC$ ও BOD বিপ্রতীপ কোণ এবং $<AOD$ ও $<BOC$ বিপ্রতীপ কোণ। O উভয় বিপ্রতীপ কোণ যুগলের শীর্ষবিন্দু।

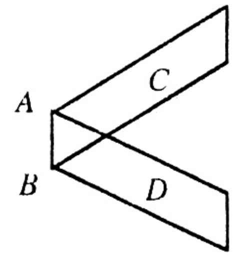


চিত্র : ১৩.২২

ডাইহেড্রাল কোণ

সংজ্ঞা : দুইটি স্বতন্ত্র অর্ধতল এবং তাদের ছেদরেখার সংযোগ সেটকে ডাইহেড্রাল কোণ বলে।

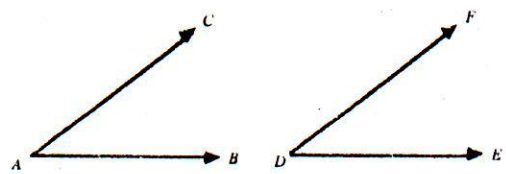
প্রত্যেক অর্ধতল এবং তাদের ছেদ ধারকে ডাইহেড্রাল কোণের সম্মুখভাগ বলা হয়। ডাইহেড্রাল কোণকে প্রকাশ করার প্রতীক হল $\left(C - \underset{AB}{\rightarrow} - D\right)$ অর্থাৎ ধার রেখাকে মাঝখানে লিখে সম্মুখভাগের দুটো বিন্দুর নাম দিতে হবে।



চিত্র : ১৩.২৩

কোণের সমতা

উপরিপাতন প্রক্রিয়ায় দুইটি কোণের একটির শীর্ষবিন্দু এবং এক বাহু যথাক্রমে অপরটির শীর্ষবিন্দু ও এক বাহুর উপর পতিত হলে প্রথমটির অপর বাহুও দ্বিতীয়টির অপর বাহুর উপর পতিত হয়, তবে কোণ দুইটিকে পরস্পর সমান বলা হয়।



চিত্র : ১৩.২৪

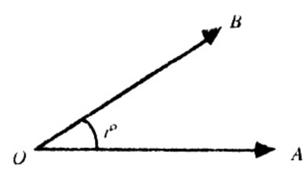
উপরিপাতন প্রক্রিয়ায় $<BAC$ এর শীর্ষবিন্দু A কে $<EDF$ এর শীর্ষবিন্দু D এর উপর, AB বাহুকে DE বাহু বরাবর এবং DE রেখার যে পাশে F অবস্থিত C সেই পাশে অবস্থিত হলে AC বাহু DF বাহু বরাবর পড়বে। তাহলে বলা যায় $<BAC = <EDF.$

কোণ পরিমাপ

কোণ পরিমাপের একক হল ডিগ্রি *(Degree)*। এ সম্পর্কে স্বীকার করে নেয়া হয়

কোণ পরিমাপের একক হল ডিগ্রি

স্বীকার্য : প্রত্যেক কোণ $<O$ এর সাথে সম্পর্কিত একটি প্রান্ত সংখ্যা r আছে, যেন $0<r<180$। উপরোক্ত স্বীকার্যতে প্রান্ত সংখ্যা r কে <O এর ডিগ্রি পরিমাপ বলা হয় এবং লেখা হয় $m<O= r$ *বা*, $<O = r°$



চিত্র : ১৩.২৫

কোণ পরিমাপের ক্ষেত্রে নিচের মন্তব্যগুলো সত্য :

(ক) যদি কোন কোণের দুইটি বাহু একই রশ্মি হয়, তাহলে কোণের পরিমাপ শূন্য হবে।

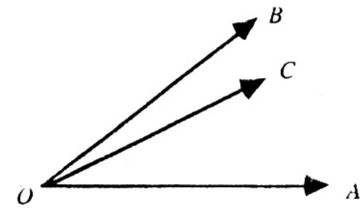
(খ) যদি কোন কোণের দুইটি বাহু বিপরীত রশ্মি হয়, তাহলে কোণের পরিমাপ হবে $180°$।

(গ) OB রশ্মির অর্ধতলে একটি নির্দিষ্ট OA এমনভাবে অঙ্কন করা যায় যে, $<BOA$ কোণের পরিমাপ $0°$ থেকে $180°$ এর মধ্যে নির্দিষ্ট সংখ্যা হবে।

সাধারণত চাঁদার সাহায্যে কোণের পরিমাপ করা হয়।

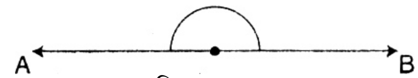
কোণের যোগ

যদি C বিন্দু $<AOB$ এর অভ্যন্তরে অবস্থান করে, তাহলে $m<AOC+$ $m<COB = m<AOB$



চিত্র : ১৩.২৬

কয়েকটি বিশেষ কোণ



চিত্র : ১৩.২৭

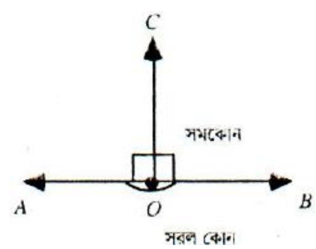
সরলকোণ *(Straight angle)*

সংজ্ঞা : কোন কোণের বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং তারা বিপরীত রশ্মি হলে, সেই কোণকে সরলকোণ বলে।

যেমন, O বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী বিন্দু হলে O বিন্দুতে $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখার প্রত্যেক পার্শ্বে একটি সরলকোণ উৎপন্ন হয়েছে বলা হয়। যে কোন সরলকোণের ডিগ্রি পরীমাপ হল $180°$।

সমকোণ *(Right angle)*

একটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপ $90°$ হলে তাকে সমকোণ বলা হয়। দুই সমকোণ একত্রে একটি সরলকোণ উৎপন্ন করে। চিত্রে $<AOC$ ও $<BOC$ প্রত্যেকটি সমকোণ। অর্থাৎ প্রত্যেকটির ডিগ্রি পরিমাপ $90°$।

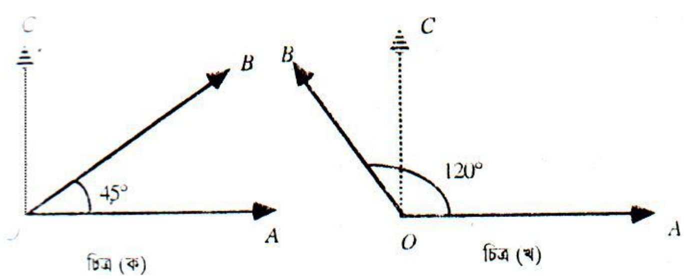


চিত্র : ১৩.২৮

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ

এক সমকোণ অপেক্ষা ছোট পরিমাপের কোণকে সূক্ষ্মকোণ *(Acute angle)* বলে।

এক সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট পরিমাপের কোণকে স্থূলকোণ *(Obtuse angle)* বলে।

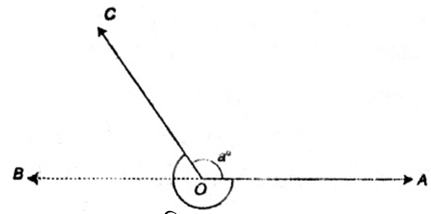


চিত্র : ১৩.২৯

চিত্র ১৩.২৯-এর ক চিত্রে $<AOB$ এর পরিমাপ হল $45°$। অতএব উক্ত কোণটি সূক্ষ্মকোণ। কিন্তু চিত্র খ-এ $<AOB$ এর পরিমাপ হল $120°$ যা এক সমকোণ অপেক্ষা বড়। অতএব, উক্ত কোণটি হল স্থূলকোণ।

প্রবৃদ্ধ কোণ *(Reflex angle)*

সংজ্ঞা : একই প্রান্তবিশিষ্ট দুইটি রশ্মি যদি একই সরলরেখায় অবস্থিত না হয়, তবে তারা প্রান্ত বিন্দুতে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে; যার একটির পরিমাপ দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট এবং অপরটির পরিমাপ দুই সমকোণ অপেক্ষা বড়।



চিত্র : ১৩.৩০

সাধারণ রাশিদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন কোন বলতে ছোট পরিমাপের কোণটিই বুঝায়। তবে অনেক সময় বড় পরিমাপের কোণটিও বিবেচনা করতে হয়। এরূপ দুই সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু চার সমকোণ অপেক্ষা ছোট পরিমাপের কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলে।

চিত্রে ধরুন $<AOC = a°$। অতএব, $<BOC = 180°–a°$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ কোণ AOC $= <BOC +$ সরলকোণ AOB

$= 180°–a°+180°$

$= 360°–a°$

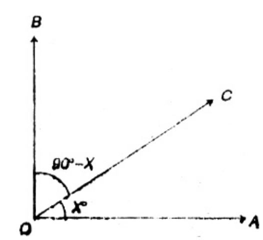
$= (360–a)°$

পূরক কোণ *(Complementary angle)*

সংজ্ঞা : দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি $90°$ হলে, তাদের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলে।

চিত্রে $<AOC + <BOC = 90°$

সুতরাং $<AOC$ ও $<BOC$ পরস্পর পূরক। যেমন $30°$ কোণ এবং $60°$ কোণ পরস্পরের পূরক।



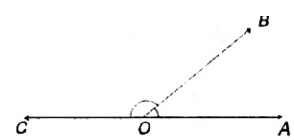
চিত্র : ১৩.৩১

সম্পূরক কোণ *(Supplementary angle)*

সংজ্ঞা : দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি $180°$ হলে, তাদের একটিকে অপরটির সম্পূরক কোণ বলে।

চিত্রে $<AOB + <BOC = 180°$

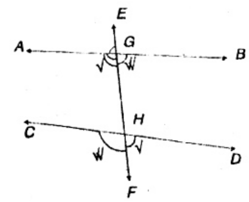
সুতরাং $<AOB$ ও $<BOC$ পরস্পর সম্পূরক। যেমন $60°$ ও $120°$ কোণ পরস্পর সম্পূরক।



চিত্র : ১৩.৩২

একান্তর ও অনুরূপ কোণ

দুইটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ কে অপর একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{EF}$ যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করলে $<AGF$ ও $<BGF$ কে যথাক্রমে $<DHF$ ও $<CHF$ এর একান্তর কোণ *(Alternate angles)* এবং $<AGE, <AGF, <BGE$ ও $<BGF$ কে যথাক্রমে $<CHE, <CHF, <DHE$ ও $<DHF$ এর অনুরূপ কোণ *(Corresponding angles)* বলে।



চিত্র ১৩.৩৩

এদের মধ্যে $<AGE, <BGE, <CHF, <DHF$ কে বহিঃস্থ কোণ *(Exterior angles)* এবং $<AGF, <BGF, <CHE$ ও $<DHE$ কে অন্তঃস্থ কোণ *(Interior angles)* বলে।

অনুশীলনী ১৩.৪

1, কোণ কিভাবে সৃষ্টি হয় বর্ণনা করুন। আপনার পরিবেশে কয়েকটি কোণের নাম করুন।

2, একটি কোণে কি কি উপাদান আছে? উপাদানগুলো বর্ণনা করুন।

3, কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা বর্ণনা করুন।

4, সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দিন এবং চিত্রের সাহায্যে এর বহিঃস্থ বাহুসহ ব্যাখ্যা করুন।

5, রৈখিক যুগল কোণের সংজ্ঞা দিন এবং চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করুন।

6, বিপ্রতীপ কোণের বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করুন।

7, একটি ডাইহেড্রাল কোণ অংকন করে তার নাম দিন। আপনার পরিবেশে ডাইহেড্রাল কোণের উদাহরণ দিন।

8, নিম্নলিখিত কোণগুলোর সংজ্ঞা দিন এবং চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করুন।

সরলকোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকাণ, স্থূলকোণ, প্রবৃদ্ধ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, একান্তর কোণ ও অনুরূপ কোণ।

9, কিভাবে কোণ পরিমাপ করা হয় বর্ণনা করুন।

10, কোণের সমতা বর্ণনা করুন।

11, একটি কোণের পরিমাপ 70° হলে তার পূরক কোণ ও সম্পূরক কোণের পরিমাপ কত?

12, একটি কোণের পরিমাণ 60°। ঐ কোণের পূরক কোণের দ্বিগুণ হল $<A$-এর পরিমাপ। $<A$ কোণের সম্পূরক কোণের পরিমাপ কত?

পাঠ ৫ ত্রিভুজ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

l ত্রিভুজের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;

l বিভিন্ন ত্রিভুজের সংজ্ঞা দিতে পারবেন এবং অঙ্কন করতে পারবেন।

ত্রিভুজ *(Triangle)*

সংজ্ঞা : সমতলস্থ তিনটি বিন্দু যদি সমরেখ না হয় তবে তাদের দুইটি করে সংযোগ করে প্রান্ত রেখাংশ তিনটির সংযোগকে একটি ত্রিভুজ বলা হয়।

সমতলস্থ A, B, C বিন্দু তিনটি যদি সমরেখ না হয় A ও B, B ও C এবং C ও A এর সংযোজক রেখাংশ তিনটি দ্বারা ABC ত্রিভুজ গঠিত হয় এবং ΔABC প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। A, B ও C বিন্দু তিনটিকে ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু এবং AB, BC ও CA রেখাংশ তিনটিকে তার বাহু বলা হয়।

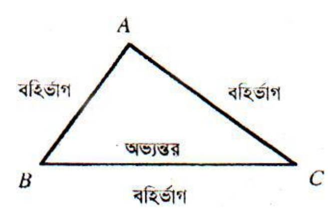
চিত্র : ১৩.৩৪

$<BAC$, $<ABC$ ও $<ACB$ (সংক্ষেপে যথাক্রমে $<A$, $<B$ ও $<C$) ত্রিভুজটির তিনটি কোণ। সুতরাং একটি ত্রিভুজ তিনটি শীর্ষবিন্দু, তিনটি বাহু ও তিনটি কোণের সমন্বয়ে গঠিত।

সমতলস্থ তিনটি বিন্দু যদি সমরেখ না হয় তবে তাদের দুইটি করে সংযোগ করে প্রান্ত রেখাংশ তিনটির সংযোগকে একটি ত্রিভুজ বলা হয়।

ত্রিভুজের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ

কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণের অভ্যন্তরে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেটকে ত্রিভুজের অভ্যন্তর বলা হয় এবং যে সমস্ত বিন্দু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অথবা ত্রিভুজের বাহুতে অবস্থিত নয় তাদের সেটকে ত্রিভুজের বহির্ভাগ বলা হয়।



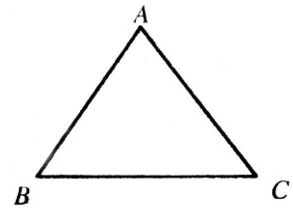
চিত্র : ১৩.৩৫

ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুকে তার অন্তঃস্থ বিন্দু এবং বহির্ভাগে অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুকে তার বহিঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

কয়েকটি বিশেষ ত্রিভুজ

সমবাহু ত্রিভুজ (*Equilateral triangle)*

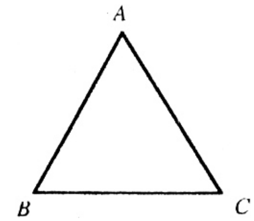
সংজ্ঞা : যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যই সমান, তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে। উলেখ্য সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণের পরিমাণও সমান।



চিত্র : ১৩.৩৬

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ *(Isosceles triangle)*

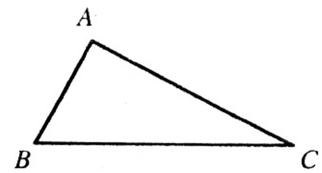
কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে, তাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান দৈর্ঘ্যের বাহু দুইটির ছেদবিন্দুর বিপরীত বাহুকে তার ভূমি এবং ঐ ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন কোণকে তার শিরঃকোণ বলা হয়। চিত্রে $<ABC$-এ AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য সমান, BC ভূমি এবং $<A$ শিরঃকোণ।



চিত্র : ১৩.৩৭

বিষমবাহু ত্রিভুজ *(Scalene triangle)*

যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যই অসমান, তাকে বিষমবাহু ত্রিভুজ বলে।

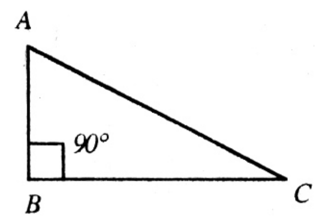


চিত্র : ১৩.৩৮

বাহুর দিক থেকে ত্রিভুজকে তিন ভাগে এবং কোণের দিক থেকে তিন ভাগে ভাগ করা হয়।

সমকোণী ত্রিভুজ *(Right-angled triangle)*

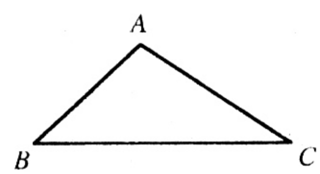
যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ, তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে অতিভুজ এবং সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের একটিকে ভূমি এবং অপরটিকে লম্ব বলা হয়।



চিত্র : ১৩.৩৯

সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ *(Acute-angled triangle)*

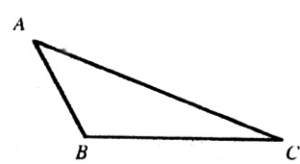
যে ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ সূক্ষ্মকোণ, তাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলে।



চিত্র : ১৩.৪০

স্থূলকোণী ত্রিভুজ *(Obtuse-angled triangle)*

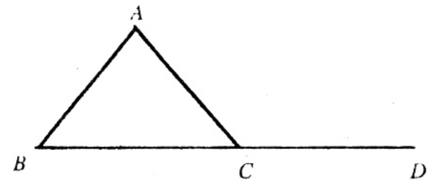
যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, তাকে স্থূলকোণী ত্রিভুজ বলে।



চিত্র : ১৩.৪১

ত্রিভুজের অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ কোণ

ত্রিভুজের কোণগুলোকে সাধারণত এর অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়। ত্রিভুজের একটি বাহুকে একদিকে বর্ধিত করলে সংশিষ্ট শীর্ষবিন্দুতে অন্তঃস্থ কোণের সন্নিহিত যে কোণটি উৎপন্ন হয় তাকে ত্রিভুজের একটি বহিঃস্থ কোণ বলা হয়।

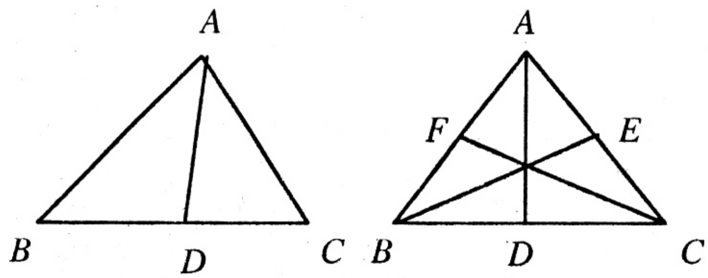


চিত্র : ১৩.৪২

চিত্রে $<ACD$, ΔABC এর একটি বহিঃস্থ কোণ। $<ACB$ এর অন্তঃস্থ কোণ এবং $<BAC$ ও $<ABC$-এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ।

ত্রিভুজের মধ্যমা

সংজ্ঞা : ত্রিভুজের কোন শীর্ষবিন্দু এবং এর বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে ত্রিভুজের একটি মধ্যমা বলা হয়। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা আছে।



চিত্র 'ক' **চিত্র 'খ'**

চিত্র : ১৩.৪৩

চিত্র ক-এ ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু A এর বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু D। অতএব সংজ্ঞানুসারে AD, ΔABC-এর একটি মধ্যমা। চিত্র খ এ ΔABC এর মধ্যমাত্রয় হচ্ছে AD, BE ও CF। উলেখ্য ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় একটি এবং কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

ত্রিভুজের সর্বসমতা

ΔABC ও ΔDEF এমন হয় যে, উপরিপাতন প্রক্রিয়ায় একটিকে অপরটির উপর সমাপতিত করা যায়, তবে তারা সর্বসম হয় এবং $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ লেখা হয়। দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে এদের দ্বারা সীমাবদ্ধ ত্রিভুজ -ক্ষেত্র দুইটিও সর্বসম হবে।

অনুশীলনী ১৩.৫

1. ত্রিভুজ কিভাবে গঠিত হয় বর্ণনা করুন।
2. ত্রিভুজের উপাদানগুলো কি কি? উপাদানগুলো চিত্র সহকারে বর্ণনা করুন।
3. ত্রিভুজের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা দিন।
4. ত্রিভুজের মধ্যমা চিত্র সহকারে বর্ণনা করুন।
5. দুইটি ত্রিভুজ কখন সর্বসম হয় বর্ণনা করুন।
6. চিত্র সহকারে নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলোর সংজ্ঞা দিন :

   সমবাহু ত্রিভুজ, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, বিষমবাহু ত্রিভুজ, সমকোণী ত্রিভুজ, স্থূলকোণী ত্রিভুজ ও সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ।
7. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, লম্ব ও ভূমি চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করুন।
8. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ ও ভূমির সংজ্ঞা দিন।
9. ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ ও বহিঃস্থ কোণ চিত্রসহ ব্যাখ্যা করুন।

পাঠ ৬ চতুর্ভুজ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

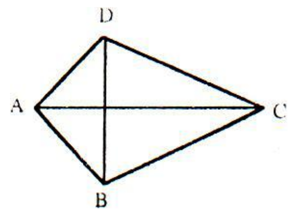
1 চতুর্ভুজের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;

1 বিভিন্ন শ্রেণীর চতুর্ভুজ সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন।

চতুর্ভুজ

সংজ্ঞা ও ধারণা

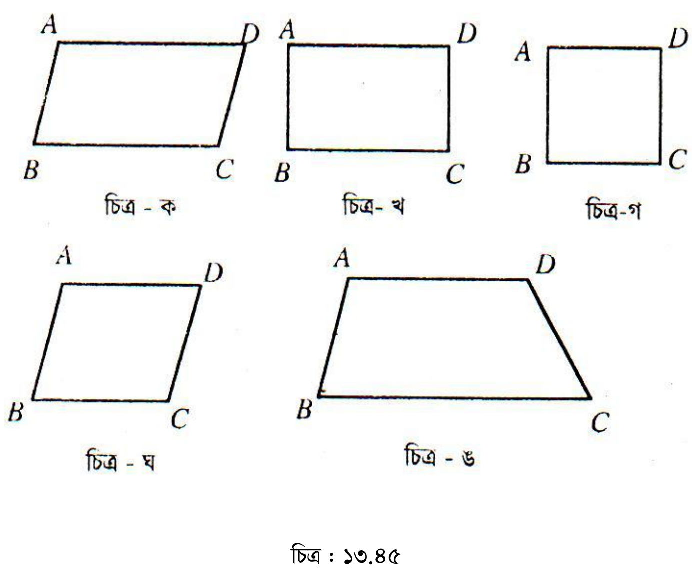
A, B, C ও *D* বিন্দু চারটি যদি সমতলস্থ হয় এবং বিন্দু চারটির কোন তিনটিই যদি সমরেখ না হয়, তাহলে $\overline{AB}$, $\overline{BC}$,$\overline{CD}$ S $\overline{DA}$ রেখাংশ চারটির সংযোগকে *ABCD* চতুর্ভুজ বলা হয়।



চিত্র: ১৩.৪৪

ABCD চতুর্ভুজকে অনেক সময় *ABCD* আকারে লেখা হয়। *A, B, C* ও *D* বিন্দু চারটিকে চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দু এবং *AB, BC, CD* ও *DA* তার বাহু। *AB* ও *CD* বাহু পরস্পর বিপরীত এবং *BC* ও *AD* বাহুও পরস্পর বিপরীত। একই শীর্ষবিন্দুতে যে দুইটি বাহু মিলিত হয়েছে (যেমন, *AB* ও *BC* বাহু অথবা *AD* ও *CD* বাহু) তারা সন্নিহিত বাহু। *A* ও *B* শীর্ষ যথাক্রমে *C* ও *D* শীর্ষের বিপরীত শীর্ষ। *AC* ও *BD* রেখাংশদ্বয়কে চতুর্ভুজটির কর্ণ বলা হয়।

বিভিন্ন শ্রেণীর চতুর্ভুজ



চিত্র : ১৩.৪৫

সামান্তরিক

যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো সমান্তরাল, তাকে সামান্তরিক (*Parallelogram*) বলা হয়। সামান্তরিক দ্বারা সীমাবদ্ধ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রকে সামান্তরিক-ক্ষেত্র বলা হয়। (চিত্র-ক)

আয়ত

যে চতুর্ভুজের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ তাকে আয়ত *(Rectuagle)* বলা হয় (চিত্র-খ)। আয়ত দ্বারা সীমাবদ্ধ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রকে আয়তক্ষেত্র বলা হয়। উলেখ্য যে, যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ তাহাই আয়ত এবং সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে সব কোণই সমকোণ হয়।

বর্গ

যে চতুর্ভুজের সবগুলো বাহু সমান এবং প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ তাকে বর্গ *(Square)* বলা হয় (চিত্র-গ)। বর্গ দ্বারা সীমাবদ্ধ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রকে বর্গক্ষেত্র বলা হয়। উলেখ্য যে, আয়তের কোন এক শীর্ষগামী বাহুদ্বয় সমান হলে তা বর্গ হয়।

রম্বস

যে চতুর্ভুজের চারটি বাহু সমান কিন্তু কোন কোণ সমকোণ নয়, তাকে রম্বস (*Rhombus)* বলা হয় (চিত্র-ঘ)। উলেখ্য যে, রম্বস একটি সামান্তরিক।

ট্রাপিজিয়াম

যে চতুর্ভুজের দুইটি বাহু সমান্তরাল এবং অপর দুইটি বাহু অসমান্তরাল, তাকে ট্রাপিজিয়াম *(Trapezium)* বলা হয় (চিত্র-ঙ)। ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটিকে ভূমি এবং অসমান্তরাল বাহুদ্বয়কে তীর্যক বাহু বলা হয়। তীর্যক বাহু দুইটি সমান হলে তাকে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম বলা হয়। উলেখ্য যে, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় কখনও সমান হতে পারে না।

অনুশীলনী ১৩.৬

1. চতুর্ভুজের ধারণা ব্যাখ্যা করুন।
2. বিভিন্ন শ্রেণীর চতুর্ভুজের সংজ্ঞা দিন।
3. সামান্তরিক কখন আয়ত এবং কখন রম্বস হয়?
4. আয়াত ও বর্গের মধ্যে পার্থক্য কি?
5. ট্রাপিজিয়ামের তীর্যক বাহু কোনটি?

পাঠ ৭ বহুভুজ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 বহুভুজ সম্পর্কে বাস্তব জ্ঞান অর্জন করবেন।

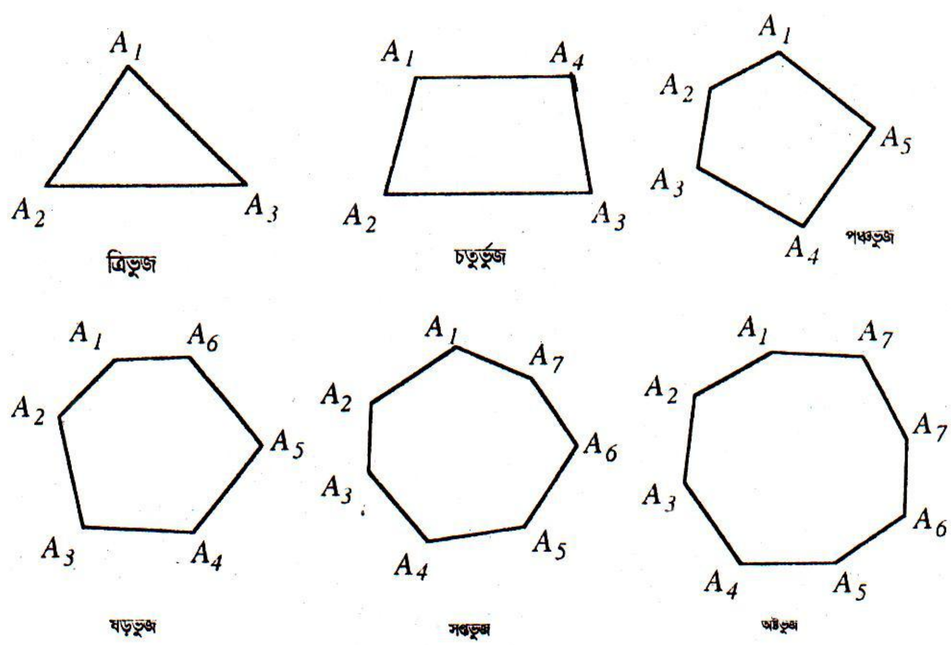
বহুভুজ

সংজ্ঞা : কয়েকটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্রকে বহুভুজ বলে। বহুভুজের কোণ এবং বাহুর সংখ্যা একই হয়। সমবাহু বিশিষ্ট বহুভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য এবং কোণের পরিমাপ একই হয়।

যে সকল রেখাংশ দ্বারা বহুভুজ আবদ্ধ হয় তাদের একত্রে ঐ ক্ষেত্রের সীমারেখা বলা হয়। সীমারেখার দৈর্ঘ্য পরিমাপকে পরিসীমা বলে। বহুভুজের বাহুগুলোর ছেদবিন্দুকে তার শীর্ষ বা শীর্ষবিন্দু বলা হয়। বহুভুজের নাম সাধারণত তাদের বাহুর সংখ্যানুসারে হয়।

কয়েকটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্রকে বহুভুজ বলে। বহুভুজের বাহু ও কোণের সংখ্যা এক।

যেহেতু বহুভুজের নাম তাদের বাহুর সংখ্যানুসারে হয়, অতএব, যদি বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোকে A_1, A_2, A_3 ...., A_n $(n \geq 3)$ দ্বারা সূচিত করা হয় তাহলে বাহুর সংখ্যানুসারে বহুভুজটিকে n ভুজ বলা হয়। যদি $n=3$ হয় তবে বহুভুজটি হবে ত্রিভুজ, $n = 4$ হলে বহুভুজটি হবে চতুর্ভুজ। তদ্রূপ $n = 5, 6, 7, 8$ হলে বহুভুজটিকে যথাক্রমে পঞ্চভুজ, ষড়ভুজ, সপ্তভুজ, অষ্টভুজ বলা হয়। নিচের চিত্রগুলোর সাহায্যে বিষয়টি আপনারা ভালভাবে বুঝতে পারবেন।

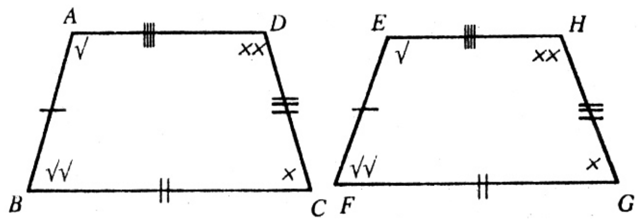


চিত্র : ১৩.৪৬

দুইটি বহুভুজের সর্বসমতা

উপরিপাতন প্রক্রিয়ায় দুইটি জ্যামিতিক চিত্র যদি অঙ্গাঙ্গিভাবে মিলে যায়, তবে চিত্র দুইটির সমাপাতন হয়েছে ধরা হয় এবং চিত্র দুইটি সর্বসম ধরা হয়।

উপরিপাতন প্রক্রিয়ায় $ABCD$ চতুর্ভুজকে যদি $EFGH$ চতুর্ভুজের উপর স্থাপন করা হয় এবং A, B, C ও D বিন্দুগুলো যদি যথাক্রমে E, F, G ও H বিন্দুর সাথে মিলে যায়, তাহলে $<A, <B, <C$ ও $<D$ অবশ্যই যথাক্রমে $<E, <F, <G$ ও $<H$-এর সাথে মিলে যাবে। অতএব, AB, BC, CD ও DA বাহু অবশ্যই EF, FG, GH ও EH বাহুর সাথে মিলে যাবে। অতএব, আমরা বলতে পারি $ABCD$ চতুর্ভুজ এবং $EFGH$ চতুর্ভুজে $<A = <E$, $<B=<F$, $<C = <G$ ও $<D = <H$ এবং $AB=EF$, $BC=FG$, $CD=GH$ ও $DA=HE$.



চিত্র : ১৩.৪৭

অতএব, চতুর্ভুজ দুইটি সর্বসম।

ত্রিভুজ এবং অন্যান্য বহুভুজের ক্ষেত্রে একই নিয়ম প্রযোজ্য।

অনুশীলনী ১৩.৭

1. বহুভুজের সংজ্ঞা দিন এবং চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করুন।
2. ব্যাখ্যা করুন :
   (ক) একটি বহুভুজ কখন ত্রিভুজ হয়?
   (খ) একটি বহুভুজ কখন চতুর্ভুজ হয়?
   (গ) একটি বহুভুজ কখন পঞ্চভুজ হয়?
   (ঘ) একটি বহুভুজ কখন অষ্টভুজ হয়?
3. দুইটি বহুভুজ কখন সর্বসম হয়?

পাঠ ৮ স্কেল ও কম্পাসের ব্যবহার

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনে স্কেল ও কম্পাসের ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করবেন।

জ্যামিতিক বিভিন্ন চিত্র অঙ্কনে স্কেল ও কম্পাসের ব্যবহার জানা একান্ত অপরিহার্য। এই পাঠে আপনারা বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে স্কেল ও কম্পাসের ব্যবহার সম্বন্ধে জ্ঞান অর্জন করবেন।

জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনের ক্ষেত্রে স্কেল ও কম্পাসের ব্যবহার একান্ত অপরিহার্য।

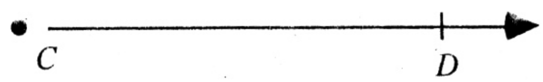
উদাহরণ ১ : একটি রেখাংশের সমান আর একটি রেখাংশ অঙ্কন করুন।

সমাধান :

চিত্র : ১৩.৪৮

একটি রেখাংশ AB এর সমান অপর একটি রেখাংশ অঙ্কন করতে হবে।

স্তর ১ : প্রথমে স্কেলের সাহায্যে একটি রশ্মি অঙ্কন করুন যার একটি প্রান্তবিন্দু C

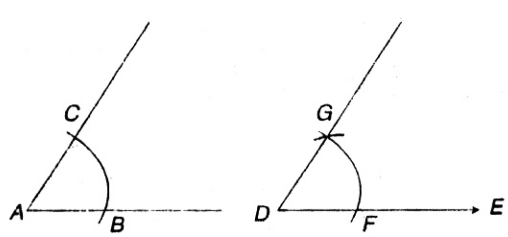


চিত্র : ১৩.৪৯

স্তর ২ : এবার একটি কম্পাস নিয়ে তার মুখটি উন্মুক্ত করে AB এর সমান করুন। তারপর C বিন্দু থেকে AB এর সমান করে CD অংশ কাটুন। তাহলে $AB=CD$।

উদাহরণ ২ : একটি কোণের সমান আর একটি কোণ অঙ্কন করুন।

সমাধান : $<A$ কোণের সমান অপর একটি কোণ অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র : ১৩.৫০

স্তর-১ : প্রথমে স্কেলের সাহায্যে DE অঙ্কন করুন।

স্তর-২ : একটি কম্পাস নিয়ে $<A$ এর A-কে প্রান্তবিন্দু ধরে একটি চাপ অঙ্কন করুন যেন তা $<A$-এর দুই বাহুকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

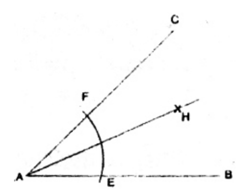
স্তর-৩ : কম্পাসটিকে সমান খোলা রেখে এর প্রান্ত $\overrightarrow{DE}$ -এর D বিন্দুতে রেখে একটি চাপ অঙ্কন করুন যেন তা $\overrightarrow{DE}$ কে F বিন্দুতে ছেদ করে।

স্তর-৪ : এবার কম্পাসের মুখকে উন্মুক্ত করে BC এর সমান করুন। তারপর কম্পাসের একপ্রান্ত F বিন্দুতে ধরে BC এর সমান করে FG অংশ কাটুন। D,G যোগ করুন। ফলে $<FDG$ উৎপন্ন হয় এবং $<D=<A$.

উদাহরণ ৩ : $<BAC$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করুন।

সমাধান :

স্তর-১ : কম্পাসের একপ্রান্ত A বিন্দুতে ধরে যে কোন চাপ অঙ্কন করুন যা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

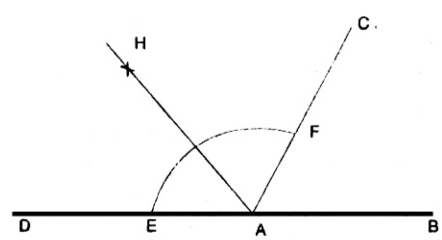


চিত্র : ১৩.৫১

স্তর-২ : এখন কম্পাসের একই দূরত্ব নিয়ে E ও F কে প্রান্তবিন্দু ধরে $<BAC$ এর অভ্যন্তরে দুটো চাপ অঙ্কন করুন, যারা পরস্পরকে H বিন্দুতে ছেদ করে। A, H যোগ করুন। তাহলে $<EAH \cong <FAH$। অতএব, AH হল $<BAC$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক।

বহির্দ্বিখণ্ডক

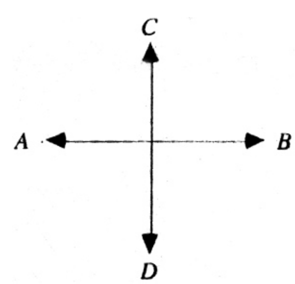
কোন কোণের একটি বাহুকে বর্ধিত করে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তার দ্বিখণ্ডককে ঐ কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বলা হয়। অন্তর্দ্বিখণ্ডক অঙ্কনের ন্যায় কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক অঙ্কন করতে হয়। চিত্রে $<BAC$-এর বহির্দ্বিখণ্ডক AH রাশি।



চিত্র : ১৩.৫২

লম্ব

সংজ্ঞা : দুইটি পরস্পচ্ছেদী রেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ যদি এমন হয় যে, ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলোর মধ্যে একটি সমকোণ হয়, তাহলে রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব *(Perpendicular)* অথবা এদের একটির উপর অপরটি লম্ব বলা হয় এবং তাদেরকে $AB \perp CD$ আকারে লেখা হয়।



চিত্র : ১৩.৫৩

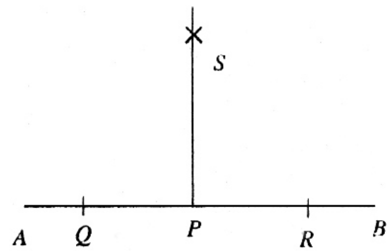
লম্ব অঙ্কন

একটি রেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করুন।

অঙ্কন :

মনে করুন AB রেখার উপর P যে কোন একটি বিন্দু। P বিন্দুতে AB রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করতে হবে।

স্তর-১ : P কে কেন্দ্র করে সুবিধামত দূরত্ব নিয়ে P বিন্দু দুই পাশে দুইটি চাপ অঙ্কন করুন, যেন তারা AB রেখাকে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে।



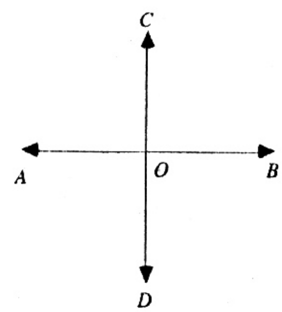
চিত্র : ১৩.৫৪

স্তর-২ : এখন Q ও R কে কেন্দ্র করে সুবিধামত সমান দূরত্ব নিয়ে AB রেখার একই পাশে দুটো চাপ অঙ্কন করুন, যেন তারা পরস্পরকে S বিন্দুতে ছেদ করে।

স্তর-৩ : P, S যোগ করুন। তাহলে PS রেখাংশ AB রেখার উপর P বিন্দুতে লম্ব অর্থাৎ $PS \perp AB$।

লম্ব-দ্বিখণ্ডক

সংজ্ঞা : একটি রেখাংশের লম্ব-দ্বিখণ্ডক এমন একটি রেখা যা ঐ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর উপর লম্বভাবে দণ্ডায়মান।



চিত্র : ১৩.৫৫

OC রেখা AB রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক হলে স্পষ্টত: $OA \cong OB$ এবং $OC \perp AB$.

লম্ব-দ্বিখণ্ডক অঙ্কন

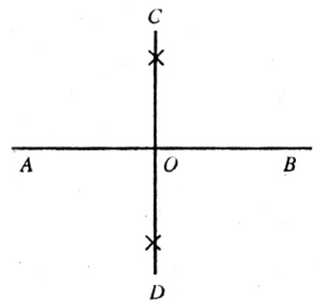
AB রেখাংশের উপর CD লম্ব-দ্বিখণ্ডক অঙ্কন করুন।

অঙ্কন :

স্তর-১ : স্কেলের সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের রেখাংশ AB অঙ্কন করুন।

স্তর-২ : A ও B কে কেন্দ্র করে AB এর অর্ধেকের বেশি দূরত্ব নিয়ে A ও B এর উভয়পার্শ্বে বৃত্তচাপ আঁকুন, যেন তারা পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।

স্তর-৩ : C, D যোগ করুন। তাহলে CD রেখা হল AB রেখাংশের লম্ব-দ্বিখণ্ডক।



চিত্র : ১৩.৫৬

অনুশীলনী ১৩.৮

1. একটি রেখাংশ PQ অঙ্কন করুন এবং তার সমান আর একটি রেখাংশ অঙ্কন করুন।
2. একটি সূক্ষ্মকোণ $<ABC$ অঙ্কন করুন। এই কোণের সমান করে $<DEF$ অঙ্কন করুন।
3. একটি সরলকোণ অঙ্কন করে একে দ্বিখণ্ডিত করুন। দ্বিখণ্ডিত কোণটি কোন্ ধরনের।
4. একটি রেখার উপর যে কোন বিন্দুতে একটি লম্ব অঙ্কন করুন।
5. $\overleftrightarrow{AB}$ -এর A ও B বিন্দুতে দুইটি লম্ব অঙ্কন করুন।
6. AB-এর O বিন্দুতে CD লম্ব-দ্বিখণ্ডক অঙ্কন করুন। CD-এর উপর P ও Q এমন দুইটি বিন্দু নিন যেন $OP=OQ=AO$ হয়। এখন AP, PB, BQ এবং QA যোগ করুন। চাঁদার সাহায্যে দেখুন চিত্রে কয়টি সমকোণ, কয়টি লম্ব-দ্বিখণ্ডক এবং কয়টি সমবাহু ত্রিভুজ আছে।

পাঠ ৯ যৌক্তিক প্রমাণ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- “যদি ------- তবে” ধরনের উক্তির সাথে পরিচিত হবেন এবং এ ধরনের উক্তি তৈরি করতে পারবেন;
- “যদি ------- তবে” ধরনের উপপাদ্য বিশেষণ ও প্রমাণ করতে পারবেন;
- যৌক্তিক প্রমাণের উপলব্ধি অনুধাবন করতে পারবেন।

উপপাদ্য কাকে বলে তা আমরা পাঠ-৩ এ আলোচনা করেছি। যুক্তির সাহায্যে যখন কোন জ্যামিতিক সম্পর্ক বা বৈশিষ্ট্য প্রমাণের জন্য প্রস্তাব করা হয় তখন তাকে উপপাদ্য বলা হয়। উপপাদ্যে কতক-গুলো তথ্য দেওয়া থাকে। সেগুলোকে কল্পনা বলা হয় এবং সেই কল্পনার সাহায্যে যা প্রমাণ করতে বলা হয়, তাকে সিদ্ধান্ত বলা হয়।

উপপাদ্য সাধারণত “যদি ...... তবে” ধরনের বাক্যে বর্ণিত হয়। যদি এর পরে কল্পনা এবং তবে-এর পরে সিদ্ধান্ত দেওয়া হয়।

প্রত্যক্ষ প্রমাণের ধারা নিম্নরূপ হয়।

যদি ক সত্য হয়, তবে খ যে সত্য তা প্রমাণ করতে হবে। খ প্রমাণিত হবে, যদি গ প্রমাণিত হয়, আবার গ প্রমাণিত হবে যদি ঘ প্রমাণিত হয়। ঘ একটি জানা সত্য। অতএব, ক অবশ্যই সত্য হবে।

এবার কয়েকটি উদাহরণ লক্ষ করুন।

উপপাদ্য-১৩.১

সাধারণ নির্বচন

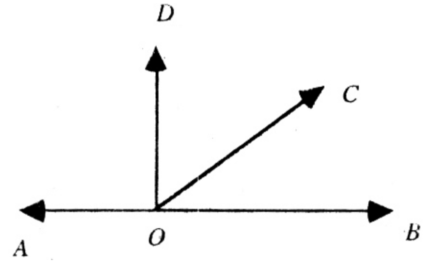
যদি একটি সরলরেখা কোন একটি বিন্দুতে অন্য আর একটি সরলরেখার সাথে মিলিত হয়, তবে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন :

AB রেখার O বিন্দুতে OC রেখা মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে m$<AOC+ m<BOC$ = দুই সমকোণ।

অঙ্কন :

AB রেখার O বিন্দুতে OD লম্ব অঙ্কন করুন।



চিত্র : ১৩.৫৭

প্রমাণ :

উক্তি	কারণ
১। $m<AOD = m<BOD =$ এক সমকোণ।	১। অঙ্কন অনুসারে।
২। $m<BOC+m<COD=$ এক সমকোণ।	২। OC রেখা $<BOD$ কে অন্তঃস্থভাবে ভাগ করেছে এবং $<BOD=$ এক সমকোণ।
৩। $m<AOD+m<DOC+m<COB =$ $m<AOD+(m<DOC+m<COB) =$ $m<AOD+m<DOB$	৩। যোগের সংযোগ বিধি।
৪। $m<AOD+m<DOB=$ এক সমকোণ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।	৪। (লম্বের ধর্ম) প্রমাণিত।

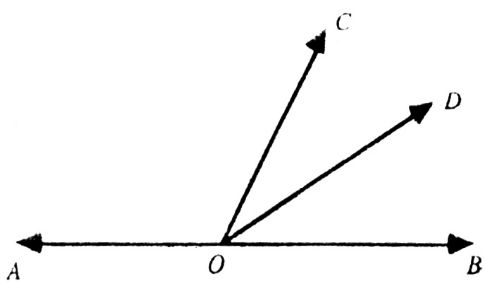
উপপাদ্য-১৩.২

সাধারণ নির্বচন

যদি দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তবে তাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই রেখায় অবস্থিত হবে।

বিশেষ নির্বচন

$<AOC$ ও $<BOC$ দুইটি সন্নিহিত কোণ এবং $<AOC + <BOC =$ দুই সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে OA এবং OB একই রেখায় অবস্থিত।



চিত্র : ১৩.৫৮

প্রমাণ :

(ক) OA এবং OB একই রেখায় অবস্থিত অথবা

(খ) OA এবং OB একই রেখায় অবস্থিত নয়।

ক সত্য হলে প্রমাণের কিছুই নেই অর্থাৎ প্রস্তাব সত্য।

খ সত্য হলে, মনে করুন OA এর বর্ধিতাংশ OD যা একই রেখায় অবস্থিত।

তাহলে নিচের উক্তি ও কারণগুলো লক্ষ করুন–

উক্তি	কারণ
১। $m<AOC + m<COD =$ দুই সমকোণ।	১। উপপাদ্য ১৩.১।
২। কিন্তু দেওয়া আছে, $m<AOC+ m<BOC=$ দুই সমকোণ।	২। কল্পনা।
৩। $m<COD=m<BOC$, যেহেতু $m<COD$, $m<BOC$-এর অংশ, সেহেতু (৩) সত্য হওয়া সম্ভব নয়।	৩। (১) ও (২) থেকে সিদ্ধান্ত স্বতঃসিদ্ধ। কোন বস্তুর অংশ সমগ্র বস্তুর সমান হতে পারে না।
∴ OA এবং OB একই রেখায় অবস্থিত।	প্রমাণিত।