ইউনিট ১৪

রেখা, কোণ, ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য

ভূমিকা

গণিত শাস্ত্রের প্রাচীন শাখা জ্যামিতির ধারণা মিশরীয়রা প্রায় চার হাজার বছর পূর্বে ব্যবহার করেন। প্রাচীন মিশরে প্রধানত ভূমি চিহ্নিত করার কাজে জ্যামিতি ব্যবহার করা হতো। পরবর্তীতে জ্যামিতি শুধু ভূমি পরিমাপের কাজেই থেমে থাকেনি, বরং বহু জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানের কাজে জ্যামিতিক জ্ঞান অপরিহার্য হয়ে উঠেছে। প্রায় ৩০০০ বছর পূর্বে গ্রিক গণিতবিদ ইউক্লিড সর্বপ্রথম জ্যামিতির বিক্ষিপ্ত সূত্রগুলো তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ 'এলিমেন্টস'-এ সুবিন্যস্ত করেন। তের খণ্ডে রচিত তাঁর এই গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তি হিসেবে আজও চিহ্নিত। এই ইউনিটে আপনারা জ্যামিতির রেখা, কোণ, ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- রেখা ও কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- ত্রিভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

পাঠ ১ রেখা ও কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য

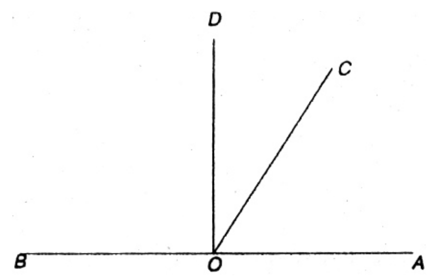
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সন্নিহিত কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান তা প্রমাণ করতে পারবেন;
- পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা সম্পর্কিত উপপাদ্যের প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

উপপাদ্য-১৪.১

একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুতে অপর একটি সরলরেখা মিলিত হলে, যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।



চিত্র : ১৪.১

মনে করুন, AB সরলরেখার O বিন্দুতে CO সরলরেখাটি মিলিত হয়েছে, তাহলে $<AOC$ ও $<BOC$ দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হল। প্রমাণ করতে হবে যে, $<AOC + <BOC = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন : BA রেখার উপর OD লম্ব আঁকুন।

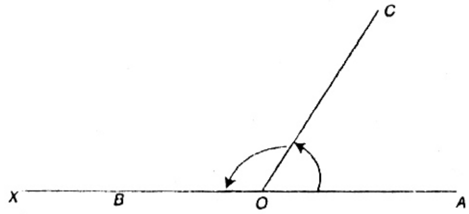
প্রমাণ : $<AOC + <BOC = <AOC+<COD+<DOB <$

$= <AOD + <DOB$ [যেহেতু $<AOC+<COD=<AOD$]

$= 2$ সমকোণ [যেহেতু $<AOD$ ও $<BOD$-এর প্রত্যেকে এক সমকোণ]। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৪.২

দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, এদের সাধারণ বাহু বাদে অপর বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।



চিত্র : ১৪.২

মনে করুন, $<AOC$ এবং $<BOC$ দুইটি সন্নিহিত কোণ, যাদের শীর্ষবিন্দু O এবং সাধারণ বাহু OC। দেওয়া আছে, $<AOC + <BOC = 2$ সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, OA, OB বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন : AO রেখাকে বামদিকে X পর্যন্ত বর্ধিত করুন।

প্রমাণ : যেহেতু অঙ্কন অনুসারে AOX একটি সরলরেখা।

$\therefore <AOC + <COX = 2$ সমকোণ।

আবার, দেওয়া আছে, $<AOC + <BOC = 2$ সমকোণ।

সুতরাং $<AOC + <COX = <AOC + <BOC$

$\therefore <COX = <BOC$ [উভয়পক্ষ হতে $<AOC$ বাদ দিয়ে]

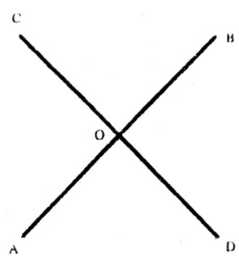
$\therefore OX$ ও OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

কিন্তু অঙ্কন অনুসারে OX ও OA একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\therefore OA, OB$ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৪.৩

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে, ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান।



চিত্র : ১৪.৩

মনে করুন, AB ও CD রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। ফলে O বিন্দুতে $<AOD, <BOC, <AOC, <BOD$ উৎপন্ন হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $<AOD =$ বিপ্রতীপ কোণ $<BOC$ এবং $<AOC =$ বিপ্রতীপ $<BOD$ ।

প্রমাণ : AO রেখা CD রেখার সাথে O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

$\therefore <AOC + <AOD = 1$ সরলকোণ $= 2$ সমকোণ।

আবার, CO রেখা AB রেখার সাথে O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

$\therefore <AOC + <BOC = 1$ সরলকোণ $= 2$ সমকোণ।

সুতরাং, $<AOC + <AOD = <AOC + <BOC$

$\therefore <AOD = <BOC$ [উভয়পক্ষ হতে $<AOC$ বাদ দিয়ে]

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $<AOC = <BOD$ (প্রমাণিত)।

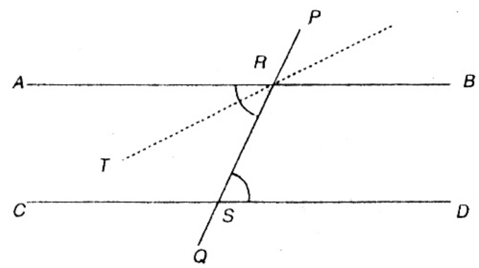
উপপাদ্য ১৪.৪

একটি সরলরেখা অপর দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করলে

(ক) একান্তর কোণ দুইটি সমান হবে,

(খ) অনুরূপ কোণ দুইটি সমান হবে এবং

(গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হবে।



চিত্র : ১৪.৪

মনে করুন, PQ সরলরেখা AB ও CD সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে R ও S বিন্দুতে ছেদ করে।

(ক) প্রমাণ করতে হবে যে, $<ARS =$ একান্তর $<RSD$।

প্রমাণ : $<ARS$ যদি $<RSD$-এর সমান না হয়, তাহলে

ধরুন, $<TRS = <RSD$ কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

সুতরাং, TR ও CD সমান্তরাল।

কিন্তু AB ও CD বা AR ও CD সমান্তরাল বলে স্বীকার করা হয়েছে।

AR ও TR পরস্পর ছেদ করা সত্ত্বেও প্রত্যেকেই CD এর সমান্তরাল।

যা প্লেফেয়ারের স্বীকার্য অনুযায়ী অসম্ভব।

সুতরাং, $<ARS$ ও $<RSD$ অসমান নয়।

অর্থাৎ, $<ARS = <RSD$

(খ) প্রমাণ করতে হবে যে, $<PRB =$ অনুরূপ $<RSD$

প্রমাণ : $<PRB =$ বিপ্রতীপ $<ARS$ এবং

$<ARS =$ একান্তর $<RSD$

সুতরাং $<PRB = <RSD$

(গ) প্রমাণ করতে হবে যে, $<BRS + <RSD =$ দুই সমকোণ।

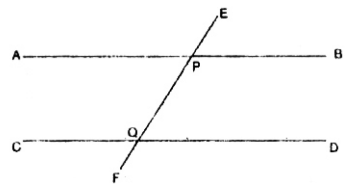
প্রমাণ : $<PRB + <BRS=$ দুই সমকোণ।

কিন্তু $<PRB = <RSD$

সুতরাং, $<BRS + <RSD =$ দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৪.৫

যদি দুইটি সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করে এবং
(ক) একান্তর কোণুগলো সমান হয়, অথবা
(খ) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়, অথবা
(গ) ছেদকের একই পার্শ্বের অন্তঃস্থ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তবে ঐ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।



চিত্র : ১৪.৫

চিত্রে, AB ও CD রেখাদ্বয়কে EF রেখা যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং

(ক) $<APQ$ = একান্তর $<PQD$

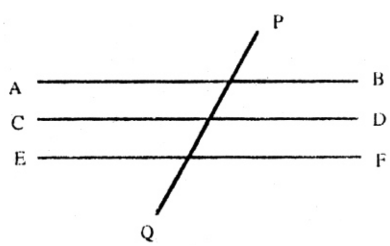
(খ) $<EPB$ = অনুরূপ $<PQD$

(গ) $<BPQ + <PQD$ = দুই সমকোণ।

সুতরাং, AB ও CD রেখা দুইটি সমান্তরাল।

উপপাদ্য ১৪.৬

যেসব রেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল তারা পরস্পর সমান্তরাল।



চিত্র : ১৪.৬

চিত্রে, AB ও EF রেখাদ্বয় সমান্তরাল।
এবং CD ও EF রেখাদ্বয় সমান্তরাল
সুতরাং, AB ও CD রেখাদ্বয় সমান্তরাল।

অনুশীলনী ১৪.১

1. কোন সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু উক্ত সরলরেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।
2. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দু উক্ত নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।
3. কোন সরলরেখা যদি দুইটি সমান্তরাল রেখাকে ছেদ করে, তাহলে প্রমাণ করুন যে, একান্তর কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান্তরাল।
4. প্রমাণ করুন যে, কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের উপর যে কোন বিন্দু সেই কোণের বাহুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

পাঠ ২ ত্রিভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য

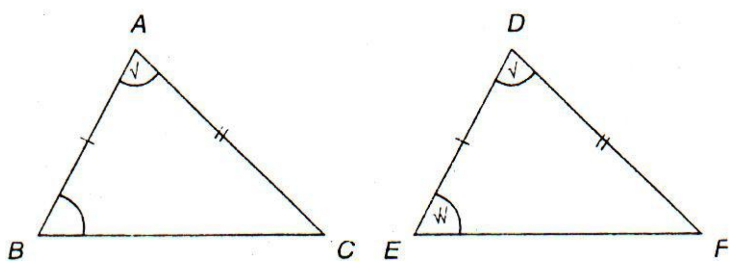
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- ত্রিভুজ সর্বসম হওয়া বিষয়ক উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- ত্রিভুজের বাহু সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- ত্রিভুজের কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

উপপাদ্য- ১৪.৭

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।



চিত্র : ১৪.৭

মনে করুন, ΔABC এবং ΔDEF-এ $AB= DE, AC=DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $<A=$ অন্তর্ভুক্ত $<D$। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC এবং $\Delta\ DEF$ সর্বসম, অর্থাৎ $\Delta ABC \cong \Delta DEF.$

প্রমাণ : ΔABC কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করুন যেন, A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DF বাহুর উপর পড়ে। যেহেতু $AB=DE,$ সুতরাং B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়বে। আবার যেহেতু, $<BAC=<EDF$ এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে, তাই AC বাহু DE বাহুর উপর পড়বে। এখন, $AC = DF$, কাজেই C বিন্দু অবশ্যই F বিন্দুর উপর পড়বে।

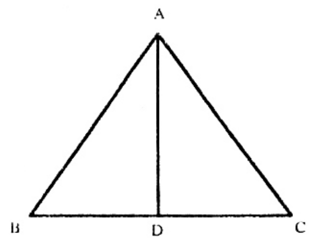
B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়ে বলে BC বাহু অবশ্যই EF বাহুর সাথে পুরোপুরি মিলে যাবে।

$\therefore\ \Delta\ ABC, \Delta DEF$ এর সাথে সর্বতোভাবে মিলে যাবে। সুতরাং প্রমাণিত হল যে,

$\Delta\ ABC \cong \Delta DEF.$

উপপাদ্য- ১৪.৮

যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান।



চিত্র : ১৪.৮

মনে করুন, ABC ত্রিভুজে $AB = AC$. প্রমাণ করতে হবে যে, $<ABC = <ACB$.

অঙ্কন : $<BAC$-এর সমদ্বিখন্ডক AD অঙ্কন করুন যেন তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\Delta\, ABD$ এবং ΔACD-এ

$AB = AC$ (প্রদত্ত)

AD সাধারণ বাহু।

এবং অন্তর্ভুক্ত $<BAD =$ অন্তর্ভুক্ত $<CAD$ [অঙ্কনানুসারে]

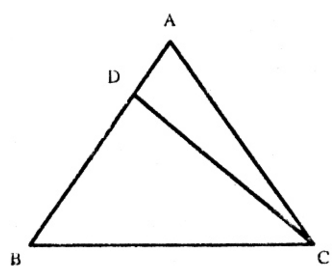
সুতরাং, $\Delta\, ABD \cong \Delta\, ACD$

$\therefore\ <ABD = <ACD$

অর্থাৎ, $<ABC = <ACB$। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৪.৯

যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হবে।



চিত্র : ১৪.৯

মনে করুন, ΔABC-এ $<ACB = <ABC$. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB=AC$

প্রমাণ : যদি AB ও AC সমান না হয়, তবে মনে করুন, $AB>AC$.

এখন, BA থেকে CA এর সমান করে BD অংশ কেটে নিন এবং C, D যোগ করুন।

এখন, ΔABC ও ΔDBC-এ

$AC=BD$, BC সাধারণ বাহু এবং

অন্তর্ভুক্ত $<ACB =$ অন্তর্ভুক্ত $<DBC$

$\therefore\ \Delta\, ABC \cong \Delta DBC$

অর্থাৎ, Δ ক্ষেত্র $ABC = \Delta$ ক্ষেত্র DBC

কিন্তু এরা সমান হতে পারে না; কারণ Δ ক্ষেত্র DBC, Δ ক্ষেত্র ABC এর অংশ। কিন্তু অংশ সম্পূর্ণের সমান হতে পারে না।

$\therefore AB > AC$ হতে পারে না।

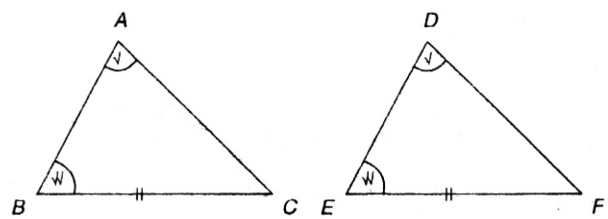
অনুরূপভাবে, দেখানো যায় যে,

$AC > AB$ হতে পারে না।

$\therefore AB = AC$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ১৪.১০

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।



চিত্র : ১৪.১০

মনে করুন, ΔABC এবং ΔDEF-এ $<BAC = <EDF$, $<ABC = <DEF$ এবং BC বাহু = অনুরূপ EF বাহু। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

প্রমাণ : ΔABC-এ $<A+<B+<C =$ দুই সমকোণ

এবং ΔDEF-এ $<D+<E+<F =$ দুই সমকোণ।

$\therefore <A+<B+<C = <D+<E+<F$

আবার, $<A = <D, <B=<E$

$\therefore <C = <F$

এখন ΔABC কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করুন যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং BC বাহু EF বাহু বরাবর পড়ে এবং A বিন্দু EF রেখার যে পার্শ্বে D বিন্দু আছে সেই পাশে পড়ে।

যেহেতু, $BC = EF$, সেহেতু, C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়বে।

যেহেতু, $<B = <E$

$\therefore BA$ বাহু ED বাহুর উপর পড়বে।

আবার যেহেতু, $<C = <F$, সেহেতু, CA বাহু FD বাহু বরাবর পড়বে।

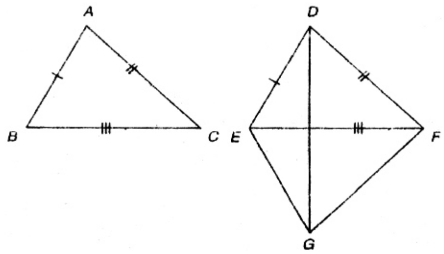
$\therefore BA$ ও CA বাহুর সাধারণ বিন্দু A, ED এবং FD বাহুর সাধারণ বিন্দু D এর উপর পড়বে।

তাহলে, $\Delta\ ABC$ এবং $\Delta\ DEF$-এর উপর সমাপতিত হবে।

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta\ DEF$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ১৪.১১

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।



চিত্র : ১৪.১১

মনে করুন, $\Delta\ ABC$ ও ΔDEF এ $AB=DE,\ AC=DF$ এবং $BC=EF;$ প্রমাণ করতে হবে যে,

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

প্রমাণ : $\Delta\ ABC$ কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করুন যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর BC বাহু EF বাহুর উপর এবং EF রেখার যে পাশে D বিন্দু অবস্থিত, A বিন্দু তার বিপরীত পাশে পড়ে। এখন $BE=EF,$ তাই C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়বে।

মনে করুন, G বিন্দু A বিন্দুর নতুন অবস্থান। D, G যোগ করুন।

ΔGEF হবে ΔABC-এর নতুন অবস্থান যেখানে,

$EG=BA,\ FG=CA$ এবং $<EGF=<BAC$

এখন, $\Delta\ EDG$ এ $ED = EG\ [\because\ ED=BA=EG]$

$\therefore\ <EGD = <EDG$ [ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হলে তাদের বিপরীত কোণ দুইটি সমান]

অনুরূপভাবে, $\Delta\ FDG$-এ $FD=FG\ [\because FD=CA=FG]$

$\therefore\ <FGD = <FDG$

অর্থাৎ, $<BAC = <EDF$

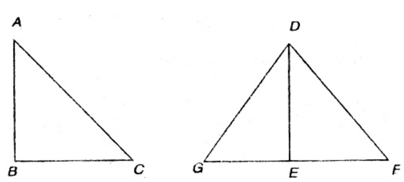
অতএব, ΔABC ওΔDEF এর মধ্যে $AB=DE,\ AC=DF$

এবং অন্তর্ভুক্ত $<BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $<EDF$

$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৪.১২

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির অতিভুজ ও অন্য একটি বাহু যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের অতিভুজ ও অন্য একটি বাহুর সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।



চিত্র : ১৪.১২

মনে করুন, ABC ও DEF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ AC=অতিভুজ DF এবং AB বাহু = DE বাহু। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF.$

প্রমাণ : ΔABC কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করুন যেন, A বিন্দু D বিন্দুর উপর, AB বাহু DE বাহুর উপর এবং DE এর যে পাশে F বিন্দু অবস্থিত C বিন্দু তার বিপরীত পাশে পড়ে। মনে করুন G বিন্দু C বিন্দুর নতুন অবস্থান। যেহেতু $AB=DE$। অতএব B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়বে। তাহলে ΔDEG হবে ΔABC এর নতুন অবস্থান।

$\therefore DG = AC = DF$

$<DEG = <ABC = 90^\circ$ এবং $<DGE = <ACB$

যেহেতু, $<DEG + <DEF =$ এক সমকোণ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।

$\therefore GE$ ও EF একই সরলরেখায় অবস্থিত।

এখন, ΔDGF-এ $DG = DF$

$\therefore <DGF = <DFG$

বা, $<DGF = <DFE$

বা, $<ACB = <DFE$

এখন, ΔABC এবং ΔDEF-এর মধ্যে $<ABC = <DEF$ [প্রত্যেকেই সমকোণ]

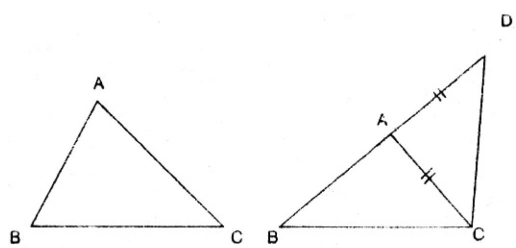
$<ACB = <DFE$

এবং AB বাহু = অনুরূপ বাহু DE বাহু

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ১৪.১৩

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।



চিত্র : ১৪.১৩

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, এর যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

ধরুন BC হল ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু, তাহলে $AB+AC>BC$, প্রমাণ যথেষ্ট হবে।

অঙ্কন : BA বাহুকে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন $AD=AC$ হয়। C, D যোগ করুন।

প্রমাণ : ΔADC-এ $AD = AC$

$<ACD = <ADC$

এখন, $<BCD > <ACD$ [কারণ $<ACD$ হল $<BCD$ এর অংশ]

অর্থাৎ, ΔBDC-এ

$<BCD > <ACD$

বা, $<BCD > <ADC$

বা, $<BCD > <BDC$

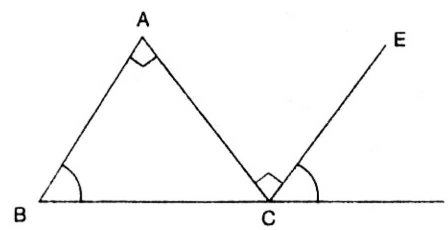
$\therefore BD > BC$

কিন্তু $BD = AB+AD = AB+AC$ $[\because AD=AC]$

$\therefore AB+AC > BC$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ১৪.১৪

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।



চিত্র : ১৪.১৪

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে,

$<BAC + <ABC + <ACB =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন : BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করুন এবং C বিন্দু দিয়া BA এর সমান্তরাল CE অঙ্কন করুন।

প্রমাণ : যেহেতু $BA \parallel CE$ এবং AC তাদের ছেদক,

$\therefore <BAC = <ACE$ [একান্তর কোণ]

আবার, যেহেতু $BA \parallel CE$ এবং BCD তাদের ছেদক

$\therefore <ABC = <ECD$ [অনুরূপ কোণ]

অতএব, $<BAC + <ABC = <ACE + <ECD = <ACD$

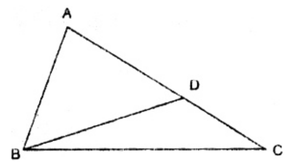
বা, $<BAC + <ABC + <ACB = <ACD + <ACB$ [উভয়পক্ষকে $<ACB$ যোগ করে]

কিন্তু $<ACD + <ACB =$ এক সরলকোণ = দুই সমকোণ।

$\therefore <BAC + <ABC + <ACB =$ দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৪.১৫

কোন ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।



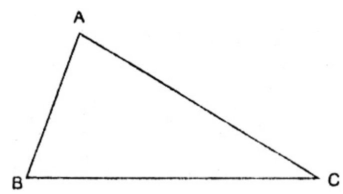
চিত্র : ১৪.১৫

চিত্রে ΔABC-এ $AC>AB$

সুতরাং, $<ABC > <ACB$

উপপাদ্য ১৪.১৬

কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হলে বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।



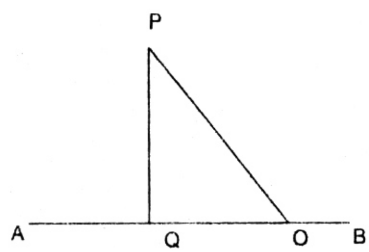
চিত্র : ১৪.১৬

ΔABC-এ $<ABC > <ACB$

সুতরাং, $AC > AB$

উপপাদ্য ১৪.১৭

কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে উক্ত সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলো রেখাংশ টানা যায় তন্মধ্যে লম্ব রেখাংশটি ক্ষুদ্রতম।



চিত্র : ১৪.১৭

চিত্রে, AB রেখার বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে AB রেখার উপর PQ লম্ব এবং AB রেখার উপর PO যে কোন রেখাংশ।

সুতরাং $PQ < PO$

অনুশীলনী ১৪.২

1. প্রমাণ করুন যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে।
2. প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তার তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর।
3. ΔABC এর অভ্যন্তরে D একটি বিন্দু, প্রমাণ করুন যে, $AD+BD+CD > \frac{1}{2}(AB+AC+BC)$ ।
4. ΔABC-এর AD মধ্যমা BC এর অর্ধেক। প্রমাণ করুন যে, $<A$ সমকোণ।
5. প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
6. প্রমাণ করুন যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু।
7. প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের যে কোণ দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।
8. ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ করুন যে, $AB+AC > 2AD$।
9. ΔABC-এ $<B$ ও $<C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ করুন যে, $<BOC = 90°+\frac{1}{2}<A.$
10. ΔABC-এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করুন যে, $<BOC = 90°-\frac{1}{2} <A.$
11. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।
12. প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
13. ΔABC এর $<A$ সমকোণ এবং D, অতিভুজ BC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করুন যে, $AD = \frac{1}{2} BC.$
14. দেখান যে, ত্রিভুজের এক বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।
15. ΔABC এর B ও C শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে BE ও CF। যদি $BE = CF$ হয় তবে দেখান যে, $AB = AC.$

পাঠ ৩ চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য

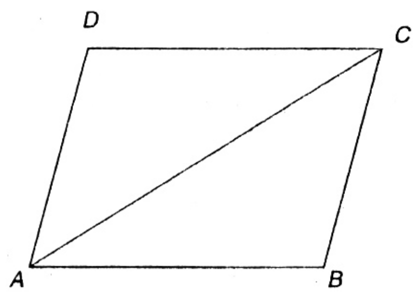
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- রম্বস সম্পর্কিত উপপাদ্যের প্রমাণ করতে পারবেন;
- সামান্তরিক সংক্রান্ত উপপাদ্যের প্রমাণ করতে পারবেন।

উপপাদ্য ১৪.১৮

চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে, তার অপর বাহু দুটিও সমান ও সমান্তরাল হবে।



চিত্র : ১৪.১৮

মনে করুন, $ABCD$ চতুর্ভুজের AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। প্রমাণ করতে হবে যে, চতুর্ভুজটির BC বাহু ও AD বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

অঙ্কন : A, C যোগ করুন।

প্রমাণ : যেহেতু $AB \parallel DC$ এবং AC তাদের ছেদক,

অতএব, $<BAC = <DCA$ [একান্তর কোণ]

এখন, ΔABC ও ΔADC-এ

$AB = DC$

AC সাধারণ বাহু।

এবং অন্তর্ভুক্ত $<BAC$ = অন্তর্ভুক্ত $<DCA$

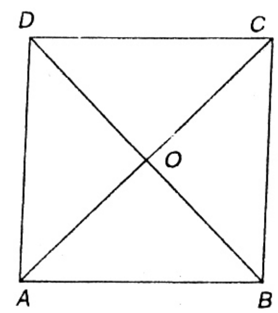
অতএব, $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

সুতরাং $BC = AD$ এবং $<ACB = <CAD$

এখন BC ও AD রেখাদ্বয়ের ছেদক AC দ্বারা উৎপন্ন একান্তর কোণদ্বয় সমান হওয়ায় BC ও AD রেখাদ্বয় সমান্তরাল। সুতরাং BC ও AD বাহু সমান ও সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৪.১৯

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



চিত্র : ১৪.১৯

মনে করুন, $ABCD$ রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $AO = CO$ এবং $BO = DO$

(ii) $<AOB = <AOD = <BOC = <COD =$ এক সমকোণ।

প্রমাণ : AB ও CD সমান্তরাল এবং AC ও BD তাদের দুইটি ছেদক।

অতএব, $<BAC = <ACD$ [একান্তর কোণ]

এবং $<ABD = <BDC$ [একান্তর কোণ]

এখন, ΔAOB ও $\Delta\ COD$-এ

$<OAB = <OCD, <OBA = <ODC$ এবং $AB = DC$

সুতরাং $\Delta\ AOB \cong \Delta\ COD$

অতএব, $AO = CO$ এবং $BO = DO$

এখন, ΔAOB ও ΔAOD-এ

$AB = AD, BO = DO$ এবং AO সাধারণ বাহু।

$\therefore\ \Delta AOB \cong \Delta AOD.$

অতএব, $<AOB = <AOD =$ এক সমকোণ [$\therefore$ এরা সমান ও সন্নিহিত কোণ]

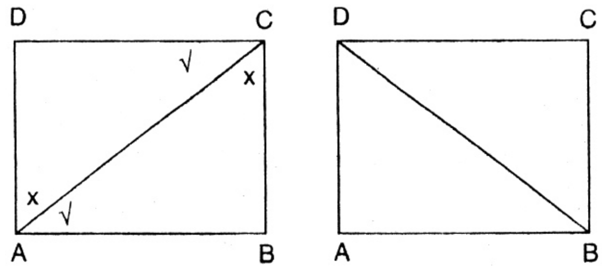
আবার, $<COD =$ বিপ্রতীপ $<AOB =$ এক সমকোণ

এবং $<BOC =$ বিপ্রতীপ $<AOD =$ এক সমকোণ

অতএব, $<AOB = <AOD = <BOC = <COD =$ এক সমকোণ। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৪.২০

সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণগুলো পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।



চিত্র : ১৪.২০

মনে করুন, $ABCD$ একটি সামান্তরিক। AC ও BD তার দুটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $AB = DC, AD = BC$

(ii) $<BAD = <BCD, <ABC = <ADC$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta ADC, \Delta ABD \cong \Delta BDC$

প্রমাণ : যেহেতু $AB \parallel DC$ এবং AC তাদের ছেদক

অতএব, $<BAC = <ACD$ [একান্তর কোণ]

আবার, যেহেতু $AD \parallel BC$ এবং AC তাদের ছেদক

সুতরাং $<ACB = <CAD$ [একান্তর কোণ]

এখন, ΔABC ও ΔACD-এ

$<BAC = <ACD, <ACB = <CAD.$

AC সাধারণ বাহু।

সুতরাং $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

অতএব, $AB = DC, BC=AD$

এবং $<ABC = <ADC$

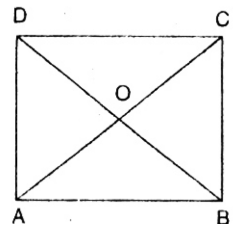
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়,

$\Delta ABD \cong \Delta BDC$

এবং $<BAD = <BCD$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ১৪.২১

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



চিত্র : ১৪.২১

চিত্রে, $ABCD$ সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

সুতরাং, $AO = CO$

$BO = DO$

অনুশীলনী ১৪.৩

1. প্রমাণ করুন যে, চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হলে তা একটি সামান্তরিক।
2. প্রমাণ করুন যে, যে সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান তা একটি আয়তক্ষেত্র।
3. প্রমাণ করুন যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হলে এবং পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি বর্গ।
4. প্রমাণ করুন যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি তার পরিসীমার অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর।
5. প্রমাণ করুন যে, চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হবে।
6. দেখান যে, রম্বসের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করলে একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হবে।