ইউনিট ১৭

পীথাগোরাসের উপপাদ্য ও তার ব্যবহার

ভূমিকা

আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৬০০ অব্দে বিখ্যাত গ্রিক গণিতবিদ পীথাগোরাস এই উপপাদ্যের বর্ণনা দেন। অবশ্য পীথাগোরাসের চেয়ে প্রায় ১০০০ বছর পূর্বে ও মিশরীয় ভূমি জরিপকারীদের এই উপপাদ্য সম্বন্ধে ধারণা ছিল বলে জানা যায়। এই ইউনিটে পীথাগোরাসের উপপাদ্যটির প্রমাণ ও প্রয়োগ করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- পীথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা প্রয়োগ করে বিভিন্ন সম্পাদ্য অঙ্কন করতে পারবেন।

পাঠ-১ পীথাগোরাসের উপপাদ্য

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

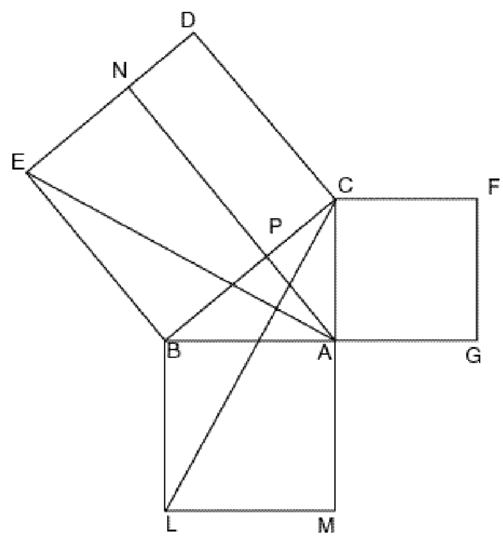
1 পীথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

পীথাগোরাসের উপপাদ্য

চিত্র : চিত্র

উপপাদ্য ১৭.১

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।



চিত্র : ১৭.১

মনে করুন, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $<A =$ এক সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, অতিভুজ BC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র $= AB$ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র$+AC$ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র।

অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2+AC^2$

অঙ্কন : ABC ত্রিভুজের বহির্ভাগে $BCDE$, $ACFG$ এবং $ABLM$ বর্গক্ষেত্র তিনটি অঙ্কন করুন। A বিন্দু দিয়ে BE রেখার সমান্তরাল AN রেখা অঙ্কন করুন যা BC রেখাংশকে P বিন্দুতে এবং ED রেখাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। A, E এবং C, L যোগ করুন।

প্রমাণ : $<BAC =$ এক সমকোণ [দেওয়া আছে] এবং

$<BAM =$ এক সমকোণ [অঙ্কনানুসারে]

$<BAC+<BAM = 2$ সমকোণ

$\therefore$ CA এবং AM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

আবার, $<CBE = <ABL =$ এক সমকোণ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore$ $<CBE+<ABC = <ABL+<ABC$ [উভয়পক্ষে $<ABC$ যোগ করে]

$\therefore$ $<ABE = <CBL$

এখন, ΔABE ও ΔCBL-এ

$AB = BL, BE = BC$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $<ABE$ = অন্তর্ভুক্ত $<CBL$

$\therefore \Delta ABE \cong \Delta\, CBL$

$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র ABE = Δ ক্ষেত্র CBL

এখন, ΔABE এবং আয়তক্ষেত্র $BPNE$ একই ভূমি BE এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BE ও AN এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র $BPNE$ = $2(\Delta$–ক্ষেত্র $ABE)$

আবার, ΔCBL এবং $ABLM$ বর্গক্ষেত্র একই ভূমি BL-এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BL এবং CM-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র $ABLM$ = $2(\Delta$-ক্ষেত্র $CBL)$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র $BPNE$ = বর্গক্ষেত্র $ABLM$

একইভাবে, A, D এবং B, F যোগ করে প্রমাণ করা যায় যে, আয়তক্ষেত্র $CDNP$ = বর্গক্ষেত্র $ACFG$

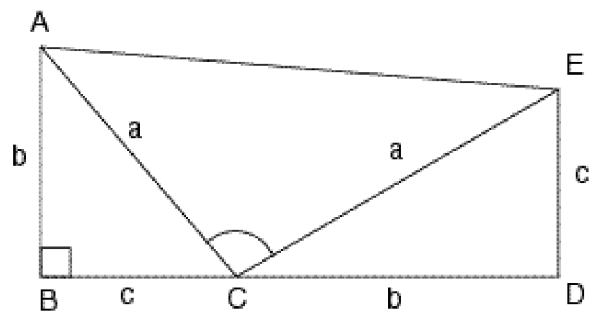
আয়তক্ষেত্র $BPNE$+আয়তক্ষেত্র $CDNP$ = বর্গক্ষেত্র $ABLM$+বর্গক্ষেত্র $ACFG$

অর্থাৎ, বর্গক্ষেত্র $BCDE$ = বর্গক্ষেত্র $ABLM$+ বর্গক্ষেত্র $ACFG$

$\therefore$ BC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র = AB-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র+AC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র

অর্থাৎ $BC^2 = AB^2+AC^2$

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিকল্প প্রমাণ :



চিত্র : ১৭.২

বিকল্প প্রমাণ : মনে করুন ABC সমকোণী ত্রিভুজের $<B$ সমকোণ, $AC = a, AB = b$ এবং $BC = c$ প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2+BC^2$

অর্থাৎ $a^2 = b^2+c^2$

অঙ্কন : BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করুন যেন $CD = AB$ হয়। D বিন্দুতে BD এর উপর লম্বভাবে DE রেখাংশ আঁকুন যেন, $DE = BC = c$ হয়।

C, E ও A, E যোগ করুন।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔCED-এ,

$BC = DE = c, AB = CD = b$ (অঙ্কনানুসারে)

এবং অন্তর্ভুক্ত $<ABC$ = অন্তর্ভুক্ত $<CDE$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CED$

$\therefore AC = CE = a$ এবং $<BAC = <DCE$

এখন যেহেতু, $AB \perp BD$ এবং $ED \perp BD$

সুতরাং, $AB \| ED$

অতএব, $ABDE$ একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, $<ACB+<BAC$ = এক সমকোণ

$\therefore <ACB+<ECD$ = এক সমকোণ।

$<ACB+<ACE+<ECD$ = দুই সমকোণ

$\therefore <ACE$ = এক সমকোণ

এখন, $ABDE$ ট্রপিজিয়াম ক্ষেত্র = Δ-ক্ষেত্র ABC+Δ-ক্ষেত্র ACE+Δ-ক্ষেত্র ECD

$\therefore \frac{1}{2} BD\ (AB+ED) = \frac{1}{2} bc + \frac{1}{2}\ a^2 + \frac{1}{2}\ bc$

বা, $\frac{1}{2}(c+b)\ (b+c) = bc+\frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}(b^2+2bc+c^2) = bc+\frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}b^2+bc+\frac{1}{2}\ c^2 = bc+\frac{1}{2}a^2$

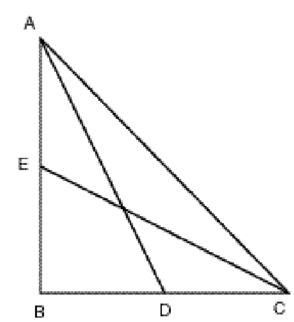
বা, $\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2$

বা, $b^2+c^2 = a^2$

বা, $AB^2+BC^2 = AC^2$

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের ব্যবহারিক প্রয়োগ

উদাহরণ 1 : ABC সমকোণী ত্রিভুজ $<B$ সমকোণ, AD ও CE মধ্যমা। প্রমাণ করুন যে, $4(AD^2+CE^2) = 5AC^2$



চিত্র : ১৭.৩

প্রমাণ : ΔBCE সমকোণী ত্রিভুজে $CE^2 = BC^2+BE^2$

এবং ΔABD সমকোণী ত্রিভুজে $AD^2 = BD^2+AB^2$

এখন, $4(AD^2+CE^2) = 4(BC^2+BE^2+AB^2+BD^2)$

$= 4(AB^2+BC^2)+4BD^2+4BE^2$

$= 4AC^2+(2BD)^2+(2BE)^2$

$= 4AC^2+BC^2+AB^2$

$= 4AC^2+AC^2$

$= 5AC^2$

উদাহরণ 2 : এক ব্যক্তি একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে যাত্রা শুরু করে ঠিক দক্ষিণে 4 কিলোমিটার যাওয়ার পর সেখান থেকে ঠিক পশ্চিম দিকে 3 কিলোমিটার গেল। যাত্রা শেষে সে যাত্রা শুরুর স্থান থেকে কত দূরে থাকবে?

সমাধান : মনে করুন, লোকটি A স্থান থেকে যাত্রা শুরু করে দক্ষিণ দিকে 4 কিলোমিটার যাওয়ার পর B স্থানে পৌঁছাল এবং B থেকে পশ্চিম দিকে গমন করে 3 কিলোমিটার যাওয়ার পর C বিন্দুতে পৌঁছাল।

তাহলে, $AB = 4$ কি.মি.

$BC = 3$ কি.মি.

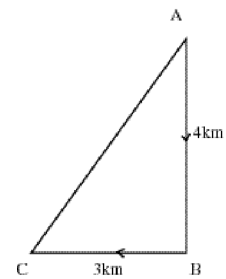
$AC =$ কত?

এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$AC^2 = AB^2+BC^2 = (4)^2+(3)^3 = 16+9 = 25$

$\therefore AC = 5$

$\therefore$ লোকটি যাত্রা শুরুর স্থান থেকে 5 কিলোমিটার দূরে থাকবে।



চিত্র : ১৭.৪

পাঠ ২ পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা

উদ্দেশ্য

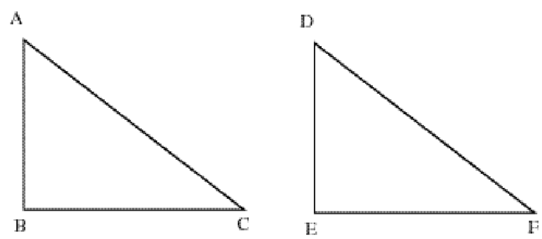
এই পাঠ শেষে আপনি-

1 পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞাটির প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা

উপপাদ্য ১৭.২

যদি কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তবে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে।



চিত্র : ১৭.৫

মনে করুন, ΔABC-এ $AC^2 = AB^2+BC^2$। প্রমাণ করতে হবে যে, $<B =$ সমকোণ।

অঙ্কন : DEF একটি ত্রিভুজ আঁকুন, যার $<E =$ এক সমকোণ,

$DE = AB$ এবং $EF = BC$

প্রমাণ : যেহেতু $<E =$ এক সমকোণ, সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$DF^2 = DE^2+EF^2$

$= AB^2+BC^2$ [অঙ্কনানুসারে]

$= AC^2$ [দেওয়া আছে]

$\therefore DF = AC$

এখন, ΔABC এবং ΔDEF-এ

$AB = DE,$

$BC = EF$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং $AC = DF,$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF,$

$\therefore <B = <E$

কিন্তু $<E =$ এক সমকোণ

$\therefore <B =$ এক সমকোণ।

অনুশীলনী ১৭.১

1. একটি মই-এর এক প্রান্ত 12 মিটার উঁচুতে একটি গাছের সাথে লাগানো আছে এবং অপর প্রান্ত ভূমিতে গাছ থেকে 5 মিটার দূরে আছে। মই-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
2. দুইটি খুঁটি 35 ও 30 মিটার উঁচু এবং পরস্পর থেকে 12 মিটার দূরে অবস্থিত। খুঁটি দুইটির শীর্ষ ও দুইটির দূরত্ব নির্ণয় করুন।
3. এক ব্যক্তি কোন নির্দিষ্ট স্থান থেকে যাত্রা শুরু করে ঠিক উত্তরে 12 কি.মি. যায়। সেখান থেকে 4 কি.মি. ঠিক পূর্বদিকে যায় এবং সবশেষে 9 কি.মি. ঠিক দক্ষিণে যায়। যাত্রা শেষে লোকটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে কত দূরে থাকবে?
4. কোন সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহু 5 সে.মি. হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
5. ABC ত্রিভুজের $<B$ = এক সমকোণ। D, AB-এর উপরস্থ একটি বিন্দু, প্রমাণ করুন যে,
   $AC^2+BD^2 = CD^2+AB^2$.
6. ABC ত্রিভুজে AD, BC-এর উপর লম্ব এবং $AB>AC$। প্রমাণ করুন যে, $AB^2-AC^2 = BD^2-CD^2$.
7. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC-এর উপর লম্ব। প্রমাণ করুন যে, $4AD^2 = 3AB^2$.
8. ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। AC-এর অতিভুজ এবং M, AC এর উপর যে কোন বিন্দু। প্রমাণ করুন যে, $MA^2+MC^2 = 2MB^2$.
9. ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। $<C$ সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর উপর লম্ব। দেখান যে, $AB^2 = AC^2+BC^2+2BC.CD$.
10. ABC ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা। দেখান যে,
    $AB^2+AC^2 = 2(BD^2+AD^2)$

পাঠ ৩ পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ সম্পর্কিত কতিপয় সম্পাদ্য

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

1 পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ সম্পর্কিত সম্পাদ্য অঙ্কনে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সম্পাদ্য ১৭.১

এমন একটি বর্গ অঙ্কন করতে হবে যেন বর্গক্ষেত্রটি কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের নির্দিষ্ট গুণিতক হয়।

চিত্র : ১৭.৬

মনে করুন, একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $OA = a$ একক।

সুতরাং, $OA^2 = a^2$ বর্গ একক। এখন, এমন একটি বর্গক্ষেত্র নির্ণয় করতে হবে যার ক্ষেত্রফল a^2 এর একটি নির্দিষ্ট গুণিতক।

মনে করুন নির্ণেয় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Ka^2, যেখানে K একটি যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা।

অঙ্কন : O বিন্দুতে পরস্পর লম্ব দুটি রশ্মি OX এবং OY নিন। এখন OX এবং OY থেকে a এককের সমান করে যথাক্রমে OA ও OP কেটে নিন। P, A যোগ করুন।

সুতরাং $PA^2 = OA^2+OP^2 = a^2+a^2 = 2a^2$

অর্থাৎ, PA-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ এবং $PA = \sqrt{2}\ a$

আবার, OX থেকে PA-এর সমান করে OB কেটে নিন এবং P, B যোগ করুন।

তাহলে $PB^2 = OB^2+OP^2 = 2a^2+a^2 = 3a^2$

অর্থাৎ, PB -এর উপর বর্গক্ষেত্র প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ এবং $PB = \sqrt{3}\ a$

এরূপ, $(K–1)$ সংখ্যকবার করে OX থেকে ON কেটে নিন।

এবং P, N যোগ করি।

তাহলে, $PN^2 = Ka^2$ হবে;

অর্থাৎ $(K–1)$তম ধাপে প্রাপ্ত PN এর উপর বর্গক্ষেত্র প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের K গুণ এবং $PN = \sqrt{K}\ a$

সম্পাদ্য ১৭.২

কোন নির্দিষ্ট রেখাংশকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করতে হবে যেন অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

চিত্র : ১৭.৭

মনে করুন, AB একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ এবং $CD = a$ কোন বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু। AB রেখাংশের উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করতে হবে যেন অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি CD-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

অঙ্কন : B বিন্দুতে $<ABP = 45^0$ আঁকুন। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে $CD = a$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকুন। মনে করুন তা BP কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। E ও F বিন্দু থেকে AB এর উপর যথাক্রমে EM ও FN লম্ব আঁকুন। তাহলে, M বা N-ই নির্ণেয় বিন্দু হবে।

প্রমাণ : $<ABP = 45^0$ এবং $<EMB = 90^0$ [অঙ্কনানুসারে]

$<BEM = 45^0$

আবার, $EM = BM$ [$\therefore <EBM = <BEM$]

সুতরাং, $AM^2+MB^2 = AM^2+EM^2 = AE^2 = CD^2 = a^2$

একইভাবে, $AN^2+NB^2 = AN^2+FN^2 = AF^2 = CD^2 = a^2$

সুতরাং, E বা F-ই নির্ণেয় বিন্দু।

সম্পাদ্য ১৭.৩

কোন নির্দিষ্ট রেখাংশকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করতে হবে যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হয়।

চিত্র : ১৭.৮

মনে করুন, AB একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। AB-এর উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করতে হবে যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হয়।

অঙ্কন : AB-এর A বিন্দুতে $<BAE = 45$ এবং B বিন্দুতে $<ABC = 22\frac{1}{2}^{\circ}$ আঁকুন। মনে করুন BC, AE কে C বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দুতে $<BCD = <B$ আঁকুন। মনে করি, CD, AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, AD ও BD-ই নির্ণেয় অংশদ্বয়।

প্রমাণ : যেহেতু, $<BCD = <CBD, \therefore CD=BD$

আবার, $<CDA = <BCD + <CBD = 45$

$\therefore AC = CD\ [<CAD = <CDA = 45\ ]$

সুতরাং, $AC = CD = BD$

আবার, ΔACD-এ, $<ACD = 90$ এবং AD তার অতিভুজ।

$\therefore AD^2 = AC^2+CD^2 = BD^2+BD^2 = 2BD^2$

অর্থাৎ AB-এর AD অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, এর BD অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

অতএব, AD এবং BD-ই হল AB-এর বিভক্ত অংশ।

অনুশীলনী ১৭.২

1. দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করুন।
2. দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করুন।
3. একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে এমন দুই ভাগে ভাগ করুন যেন, দুই অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির অন্তর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।
4. একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে এরূপ দুই ভাগে ভাগ করুন যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অন্য অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।
5. এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করুন, যার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ হয়।