



সঞ্চারণপথ বিষয়ক উপপাদ্য

ভূমিকা

সঞ্চারণপথ জ্যামিতিক বিষয়ের একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। কোন বিন্দু নির্দিষ্ট কোন শর্তাবলি মেনে যে পথ বার বার অতিক্রম করে সেই পথই হল সঞ্চারণপথ। জ্যামিতিক বিষয়ে প্রচুর সমস্যা আছে যে, যেগুলো সঞ্চারণপথের সাথে সম্পৃক্ত। আমরা বর্তমান ইউনিটে সঞ্চারণপথ বিষয়ক উপপাদ্য নিয়ে আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি—

- ১ সঞ্চারণপথের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- ১ সঞ্চারণপথের ছেদবিন্দু সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- ১ সঞ্চারণপথ বিষয়ক উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

পাঠ ১ সম্ভ্রপথ বিষয়ক উপপাদ্য



উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভ্রপথের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন;
- সম্ভ্রপথ বিষয়ক উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

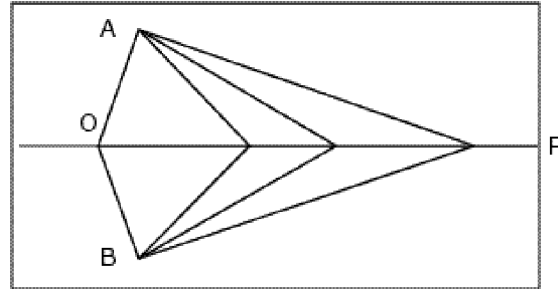


সম্ভ্রপথ

কোন শর্তাধীনে একটি চলন্ত বিন্দুর সম্ভ্রপথ হল একটি রেখা যার এবং কেবল যার বিন্দুগুলো ঐ শর্তগুলো মেনে চলে। অর্থাৎ সম্ভ্রপথ প্রদত্ত শর্ত পালনকারী সকল বিন্দুর সেট বর্ণনা করে। আমরা কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে সম্ভ্রপথকে ব্যাখ্যা করবো।

সম্ভ্রপথ প্রদত্ত শর্ত পালনকারী সকল বিন্দুর সেট।

(i) আয়তাকার মেঝের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A ও B থেকে সমান দূরত্ব রেখে মেঝা বরাবর হেঁটে গেলে হাঁটা পথটি একটি সম্ভ্রপথ।



চিত্র : ১৮.১

সে যদি A ও B দুইটি বিন্দুকে নির্দিষ্ট রেখে OP রেখা বরাবর সমান দূরত্ব বজায় রেখে হামাগুড়ি দিয়ে চলতে থাকে তবে তার চলার পথ হবে সম্ভ্রপথ। কারণ সে একটি শর্তাধীনে চলছে, তাই চলার পথটি সম্ভ্রপথ।

(ii) ধরা যাক, একটি গরু মাঠে বাঁধা আছে। গরুটি একটি খুঁটার সাথে দড়ি দিয়ে বাঁধা আছে। সে যদি খুঁটাটিকে সমান দূরত্ব বজায় রেখে চলতে থাকে তবে একটি বৃত্তাকৃতি রেখা তৈরি হবে অর্থাৎ বৃত্তাকার পথ সৃষ্টি হবে। এই পথ একটি সম্ভ্রপথ।

নিজে করুন : একটি ঘোড়াকে কোন গাছে বেঁধে রাখলে এবং ঘোড়াটি গাছের চারদিকে ঘুরলে কি সম্ভ্রপথ তৈরি হবে? ব্যাখ্যা করুন।

সম্ভারপথ বর্ণনায় লক্ষ্য রাখতে হবে যে :

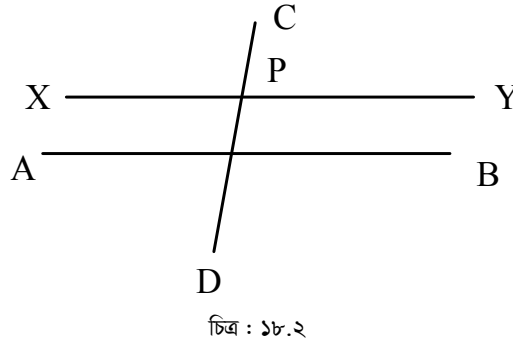
- (i) সম্ভারপথ বর্ণনাকারী শর্ত সিদ্ধ করে এমন প্রত্যেক বিন্দু সম্ভারপথে অবস্থিত হবে।
- (ii) সম্ভারপথে অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে।

সম্ভারপথের ছেদবিন্দু

যদি কোন বিন্দুসমূহ একই সময়ে দুই বা ততোধিক শর্তপূরণ করে তবে একই সময় একাধিক সম্ভারপথ পাওয়া যায়। এসব সম্ভারপথসমূহের ছেদবিন্দু প্রদত্ত সকল শর্ত পূরণ করে।

কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে নিচে আলোচনা করা হলো :

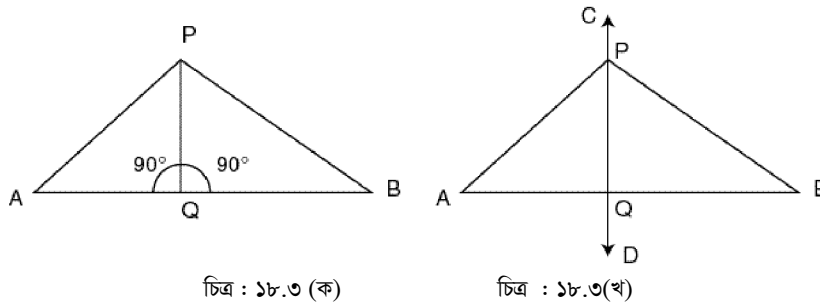
XY সরলরেখায় অবস্থিত এমন কোন বিন্দু নির্ণয় করুন যা XY এর বহিঃস্থ A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী। চিত্র দেখুন-



এখানে A ও B থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সম্ভারপথ AB সরলরেখায় লম্বসমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং নির্দিষ্ট বিন্দু CD সরলরেখায় অবস্থিত হবে। অনুরূপভাবে XY রেখাতেও নির্দিষ্ট বিন্দুর অবস্থান অবস্থিত হবে। অতএব, P , CD ও XY সরলরেখায় নির্ণেয় ছেদবিন্দু।

উপপাদ্য ১৮.১

নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সম্ভারপথ উক্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক।



ধরুন, A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, A ও B থেকে সমদূরবর্তী যে কোন বিন্দুর সম্ভারপথ AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক হবে। অর্থাৎ (১) A ও B থেকে সমদূরবর্তী যে কোন বিন্দু AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখায় অবস্থিত হবে এবং (২) AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের যে কোন বিন্দু A ও B হতে সমান দূরে অবস্থিত হবে।

এস এস সি প্রোগ্রাম

এখন, (১) প্রথমে A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দু P নিন [চিত্র ১৮.৩(ক)] এবং প্রমাণ করুন, P বিন্দু AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন : A ও B , P ও A এবং P ও B যোগ করুন। AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু Q চিহ্নিত করুন। অতঃপর P ও Q যোগ করুন।

প্রমাণ : P বিন্দু AB রেখাংশে অবস্থিত হলে P ও Q একই বিন্দু হবে এবং P অবশ্যই AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডিত রেখায় অবস্থিত। তা না হলে যদি P বিন্দুটি AB রেখাংশের বাইরে অবস্থান করে, তাহলে কল্পনানুযায়ী $PA = PB$ এবং অঙ্কনানুসারে $AQ = BQ$

এখন, $\triangle PAQ$ ও $\triangle PBQ$ -এ

$PA = PB$, $QA = QB$ এবং $QP = QP$ [সাধারণ বাহু]

$\therefore \triangle PAQ \cong \triangle PBQ$

$\therefore \angle PQA = \angle PQB$

যেহেতু, $\angle PQA$ ও $\angle PQB$ দুটি রৈখিক যুগল কোণ এবং এদের পরিমাণ সমান, সুতরাং প্রত্যেক কোণ 90° অর্থাৎ $\angle PQA = \angle PQB = 90^\circ$

অতএব, PQ রেখা AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক এবং P বিন্দু AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখায় অবস্থিত।

আবার, (২) এখন AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক CD রেখায় কোন বিন্দু P নিন [(চিত্র ১৮.৩(খ))] এবং প্রমাণ করুন, P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

অঙ্কন : P ও A এবং P ও B যোগ করুন।

প্রমাণ : CD রেখা AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু Q দিয়ে যায় (কল্পনানুসারে) অর্থাৎ,

$$AQ = BQ$$

আবার, $\angle AQP = \angle BQP = 90^\circ$

এখন, P বিন্দু AB রেখাংশের উপর অবস্থিত হলে P ও Q একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হবে। যদি P বিন্দু AB রেখাংশের বাইরে অবস্থান করে তাহলে, $\triangle PAQ$ ও $\triangle PBQ$ -এ

$$AQ = BQ, QP = QP \text{ (সাধারণ বাহু)}$$

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AQP =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BQP$

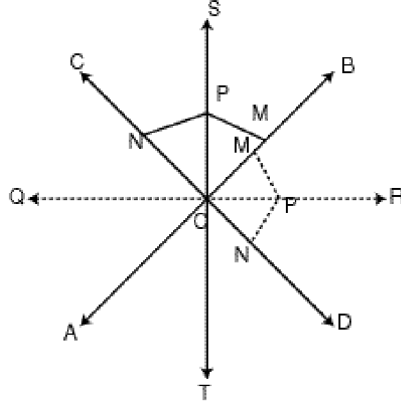
অতএব, $\triangle PAQ \cong \triangle PBQ \therefore PA = PB$

অর্থাৎ P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

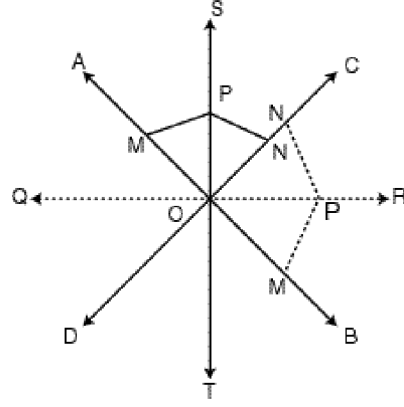
নিজে করুন : ত্রিভুজের যে কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও অপর দুইটি বহিঃকোণদ্বয় সমবিন্দু।

উপপাদ্য ১৮.২

পরস্পরছেদী দুইটি সরলরেখা থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সম্ভারপথ উক্ত নির্দিষ্ট রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক হয় হবে।



চিত্র : ১৮.৮ (ক)



চিত্র : ১৮.৮ (খ)

চিত্র : ১৮.৮

মনে করুন, AB ও CD দুইটি পরস্পরছেদী রেখা O বিন্দুতে ছেদ করেছে। তা হতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দু P নেওয়া হল। প্রমাণ করতে হবে, P বিন্দু AB ও CD রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের একটিতে অবস্থিত। অর্থাৎ (১) AB ও CD হতে সমান দূরে অবস্থিত কোন বিন্দু AB এবং CD এর অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের যে কোনটির উপর অবস্থিত হবে এবং (২) উক্ত সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের যে কোনটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু AB এবং CD হতে সমান দূরবর্তী অবস্থিত হবে।

এখন, (১) প্রথমে AB ও CD রেখা থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দু P নেওয়া হল [চিত্র ১৮.৮(ক)] প্রমাণ করতে হবে যে, P বিন্দু AB ও CD রেখা দুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের একটিতে অবস্থিত।

অঙ্কন : P, O যোগ করে উভয় দিকে বর্ধিত করুন এবং P থেকে AB ও CD রেখার উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব রেখাংশ অঙ্কন করুন।

প্রমাণ : PM ও PN যথাক্রমে AB ও CD এর উপর লম্বদূরত্ব।

$$\therefore PM = PN$$

এখন, $\triangle POM$ ও $\triangle PON$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ $PO =$ অতিভুজ PO (সাধারণ বাহু)

আবার, $PM = PN$

$$\therefore \triangle POM \cong \triangle PON \therefore \angle POM = \angle PON$$

সুতরাং PO রেখা AB ও CD রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অর্থাৎ P রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের একটিতে অবস্থিত।

আবার, (২) এখন AB ও CD এর অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক QR রেখা অথবা ST রেখা যে কোণটিতে অবস্থিত P বিন্দু নিন [চিত্র- ১৮.৮(খ)] এবং প্রমাণ করুন, P বিন্দুটি AD রেখা ও CD রেখা থেকে সমদূরবর্তী।

অঙ্কন : P বিন্দু থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব রেখাংশ অঙ্কন করুন।

প্রমাণ : PM ও PN যথাক্রমে AB ও CD থেকে P বিন্দুর দূরত্ব নির্দেশ করে। $\triangle POM$ ও $\triangle PON$ -এ $\angle POM = \angle PON$ (কল্পনানুসারে)

এস এস সি প্রোগ্রাম

$$\angle PMO = \angle PNO = \angle 90^\circ$$

এবং $PO = PO$ (সাধারণ বাহু)

$$\therefore \Delta POM \cong \Delta PON$$

$$\therefore PM = PN$$

অর্থাৎ P বিন্দু AB রেখা ও CD রেখা থেকে সমদূরবর্তী।

নিজে করুন :

দুইটি রেখা AB ও CD এর সমদূরবর্তী P বিন্দুর সঞ্চারণপথ রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক।



অনুশীলনী

1. সঞ্চারণপথের সংজ্ঞা লিখুন। ΔABC এর AB , BC ও CA বাহু তিনটি থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুটি নির্ণয় করুন।
2. A ও B বিন্দু হতে সমদূরবর্তী কোণ চলমান বিন্দুর চলার পথ কি সঞ্চারণপথ, ব্যাখ্যা করুন। ΔABC এর AB , BC ও CA বাহু তিনটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয় যথাক্রমে DE , PG ও RS সমবিন্দু হবে, প্রমাণ করুন।
3. ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু। AB ও AC দুটি সরলরেখা। AB হতে 2 সে.মি. এবং AC থেকে 3 সে.মি. দূরবর্তী বিন্দু নির্ণয় করুন।