ইউনিট ১৯

বৃত্ত

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- বৃত্তের চাপ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- স্পর্শক সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- বৃত্ত সংক্রান্ত কতকগুলো সম্পাদ্য অঙ্কন ও প্রমাণের দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস সম্পর্কিত উপপাদ্য

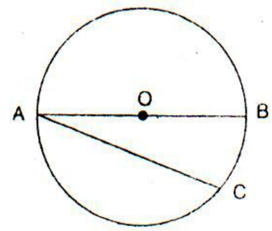
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- জ্যা ও ব্যাস সম্পর্কিত কতকগুলো উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস

সংজ্ঞা : কোন বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটির একটি জ্যা বলা হয়। যদি কোন বৃত্তের জ্যা বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে ঐ জ্যাটিকে বৃত্তটির ব্যাস বলা হয়। চিত্রে AB বৃত্তের ব্যাস কারণ তা বৃত্তের কেন্দ্রগামী এবং AC একটি জ্যা।

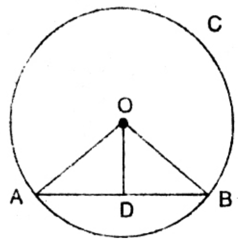


চিত্র : ১৯.১

কোন বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটির একটি জ্যা বলা হয়। যদি কোন বৃত্তের জ্যা বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে ঐ জ্যাটিকে বৃত্তটির ব্যাস বলে।

উপপাদ্য ১৯.১

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



চিত্র : ১৯.২

মনে করুন, ABC একটি বৃত্ত, O তার কেন্দ্র এবং AB ব্যাস ভিন্ন একটি জ্যা। OD রেখা AB এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে, $AD = BD$

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করুন।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, ΔAOD এবং ΔBOD সমকোণী।

তাদের মধ্যে অতিভুজ AO = অতিভুজ BO [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

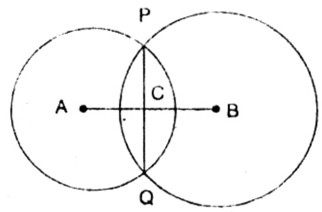
এবং OD সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOD$

অতএব, $AD = BD$।

উপপাদ্য ১৯.২

দুইটি পরস্পরছেদী বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ তাদের সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



চিত্র : ১৯.৩

মনে করুন, A ও B কেন্দ্র বিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। P, Q যোগ করুন। অতএব, PQ দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, AB রেখাংশ PQ জ্যা-কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ : ধরুন, AB রেখাংশ PQ জ্যাকে C বিন্দুতে ছেদ করে। C, PQ এর মধ্যবিন্দু।

A বৃত্তের কেন্দ্র এবং C, PQ এর মধ্যবিন্দু

অতএব, $AC \perp PQ$

সুতরাং $<ACP =$ এক সমকোণ।

অনুরূপভাবে $<BCP =$ এক সমকোণ।

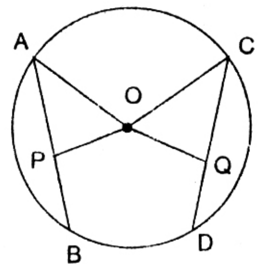
সুতরাং AC ও BC একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

অতএব, AB রেখা PQ জ্যা-কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য ১৯.৩

বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী

মনে করুন, $ABCD$ বৃত্তের O কেন্দ্র। AB ও CD তার দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে O থেকে AB ও CD জ্যা-দ্বয় সমদূরবর্তী।



চিত্র : ১৯.৪

অঙ্কন : O থেকে AB ও CD জ্যা-এর উপর যথাক্রমে OP ও OQ লম্ব রেখাংশ আঁকুন।

O, A এবং O, C যোগ করুন।

প্রমাণ : যেহেতু, OP, AB এর উপর লম্ব।

$$\therefore AP = \frac{1}{2} AB$$

একইভাবে, OQ, CD-এর উপর লম্ব।

$$\therefore CQ = \frac{1}{2} CD$$

এখন যেহেতু, $AB = CD$ অতএব, $AP = CQ$

সুতরাং $\Delta\ OAP$ এবং ΔOCQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC *[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]*

এবং $AP = CQ$

$\therefore\ \Delta\ OAP \cong \Delta OCQ$

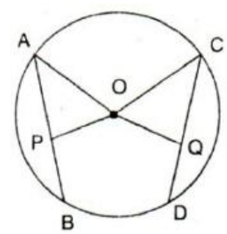
সুতরাং $OP = OQ$

কিন্তু OP ও OQ যথাক্রমে কেন্দ্র থেকে AB ও CD জ্যা-এর দূরত্ব। সুতরাং AB ও CD জ্যা-দ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

উপপাদ্য ১৯.৪

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

মনে করুন, $ABCD$ বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD জ্যাদ্বয় কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB=CD$.



চিত্র : ১৯.৫

অঙ্কন : O বিন্দু থেকে AB ও CD জ্যাদ্বয়ের উপর যথাক্রমে OP ও OQ লম্ব অঙ্কন করুন। O, A এবং OC যোগ করুন।

প্রমাণ : যেহেতু AB ও CD জ্যাদ্বয় কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী, অতএব $OP=OQ$

আবার যেহেতু, OP, AB এর উপর লম্ব

$$\therefore\ AP = \frac{1}{2}\ AB$$

অনুরূপভাবে, $CQ = \frac{1}{2}\ CD$

এখন, $\Delta\ OAP$ ও ΔOCQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ $AO =$ অতিভুজ OC *[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]*

এবং $OP = OQ$

$\therefore\ \Delta\ OAP \cong \Delta\ OCQ$

$\therefore\ AP = CQ$

অর্থাৎ, $\frac{1}{2}\ AB = \frac{1}{2}\ CD$

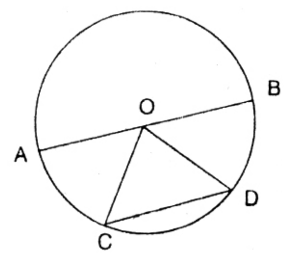
বা, $AB = CD$

অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

উপপাদ্য ১৯.৫

বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট $ABCD$ একটি বৃত্ত। AB তার ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যে কোন একটি জ্যা। প্রমাণ করতে হবে, $AB > CD$



চিত্র : ১৯.৬

অঙ্কন : O, C এবং O, D যোগ করুন।

প্রমাণ : একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে

$OA = OB = OC = OD$

এখন, $\Delta\ OCD$-এ

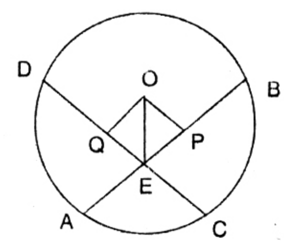
$OC + OD > CD$

বা, $OA + OB > CD$

বা, $AB > CD$।

উপপাদ্য ১৯.৬

যদি বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে ছেদ করে এবং ছেদবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোগকারী রেখাংশের সাথে তারা সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে জ্যাদ্বয় পরস্পর সমান।



চিত্র : ১৯.৭

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট $ABCD$ বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে এবং $<OEB = <OED$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = CD.$

অঙ্কন : O থেকে AB ও CD জ্যা-এর উপর যথাক্রমে OP, OQ লম্ব অঙ্কন করুন।

প্রমাণ : ΔOEP ও ΔOEQ এর মধ্যে

$<OEP = <OEQ$

$<OPE = <OQE$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

এবং OE সাধারণ বাহু।

$\therefore\ \Delta OEP \cong \Delta OEQ$

$\therefore\ OP = OQ$

সুতরাং, $AB = CD$ [উপপাদ্য ১৯.৪ অনুসারে]

অনুশীলনী ১৯.১

1. প্রমাণ করুন, বৃত্তের যে কোন জ্যা-এর লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।
2. প্রমাণ করুন, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে অঙ্কিত কোন রেখা ব্যাস ভিন্ন অন্য কোন জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।
3. প্রমাণ করুন, কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।
4. প্রমাণ করুন, দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা কেন্দ্রগামী হবে এবং জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।
5. বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তম জ্যা-টি ক্ষুদ্রতম জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতম।
6. প্রমাণ করুন, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে কেন্দ্রের নিকটবর্তী জ্যা দূরবর্তী জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর।
7. প্রমাণ করুন, বৃত্তের সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।
8. প্রমাণ করুন, বৃত্তের ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান হবে।

পাঠ ২ বৃত্তের চাপ সম্পর্কিত উপপাদ্য

উদ্দেশ্য

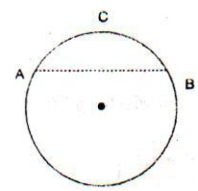
এই পাঠ শেষে আপনি–

1 বৃত্তচাপ সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;

1 বৃত্তের চাপ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

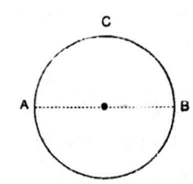
বৃত্তচাপ

কোন বৃত্তে A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হলে A, B এবং AB এর একপাশে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলা হয়। A ও B এই চাপের প্রান্তবিন্দু এবং চাপের অন্য সকল বিন্দু তার অন্তঃস্থ বিন্দু। একটি চাপের অন্তঃস্থ বিন্দু C হলে চাপটিকে ACB চাপ বলা হয় এবং প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তবে কখনও কখনও তাকে AB চাপও বলা হয়। প্রত্যেকটি চিত্রে একটি চাপ।



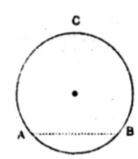
চিত্র ক

'ক' চিত্রে চাপের অন্তঃস্থ বিন্দুসমূহ AB-এর যে পাশে কেন্দ্র আছে তার বিপরীত পাশে অবস্থিত। তাই চাপকে উপচাপ বলা হয়।



চিত্র খ

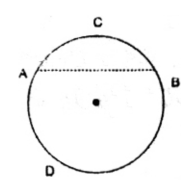
'খ' চিত্রে AB রেখাংশ কেন্দ্র দিয়ে যায়। তাই চাপকে অর্ধবৃত্ত বলা হয়।



চিত্র গ

'গ' চিত্রে চাপের সকল বিন্দু এবং কেন্দ্র AB এর একই পাশে অবস্থিত। তাই চাপকে অধিচাপ বলা হয়।

'ঘ' চিত্রে চাপ ও চাপ উভয়েরই প্রান্ত বিন্দু AB এবং C ও D বিন্দু AB-এর উভয় পাশে অবস্থিত। তাই ও চাপ দুইটি একটি অপরটির অনুবন্ধী এবং একটি উপচাপ হলে অপরটি হবে অধিচাপ।



চিত্র ঘ

চিত্র : ১৯.৮

কোন বৃত্তের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের একপাশে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলে।

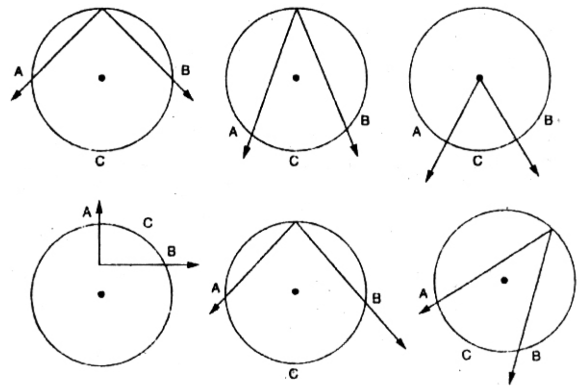
কোণ দ্বারা খণ্ডিত চাপ

একটি কোণ কোন বৃত্তে একটি চাপ খণ্ডিত করে যদি–

(১) চাপটির প্রত্যেক প্রান্তবিন্দু কোণটির বাহুতে অবস্থিত হয়।

(২) কোণটির প্রত্যেক বাহুতে চাপটির অন্তত একটি প্রান্তবিন্দু অবস্থিত হয় এবং

(৩) চাপটির প্রত্যেকটি অন্তঃস্থ বিন্দু কোণটির অভ্যন্তরে থাকে।

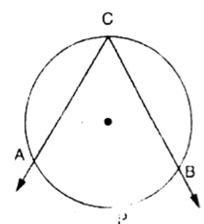


চিত্র : ১৯.৯

উপরে প্রত্যেক চিত্রে প্রদর্শিত কোণটি চাপকে খণ্ডিত করে।

বৃত্তস্থ কোণ

সংজ্ঞা : একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোণটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে একটি বৃত্তস্থ কোণ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোণ বলা হয়। চিত্রে $<ACB$ একটি বৃত্তস্থ কোণ।

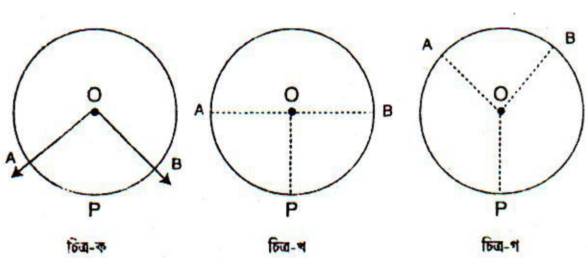


চিত্র : ১৯.১০

প্রত্যেক বৃত্তস্থ কোণ একটি চাপ খণ্ডিত করে যা উপচাপ, অর্ধচাপ বা অধিচাপ হতে পারে। কোণটি যে চাপ খণ্ডিত করে তার উপর দণ্ডায়মান এবং তার অনুবন্ধী চাপে অন্তর্লিখিত হয়। চিত্রে $<ACB$ কোণ চাপকে খণ্ডিত করে। অতএব, $<ACB$, এর উপর দণ্ডায়মান এবং এ অন্তর্লিখিত একটি বৃত্তস্থ কোণ।

কেন্দ্রস্থ কোণ

সংজ্ঞা : একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয়। চিত্রে $<AOB$ কেন্দ্রস্থ কোণ।



চিত্র : ১৯.১১

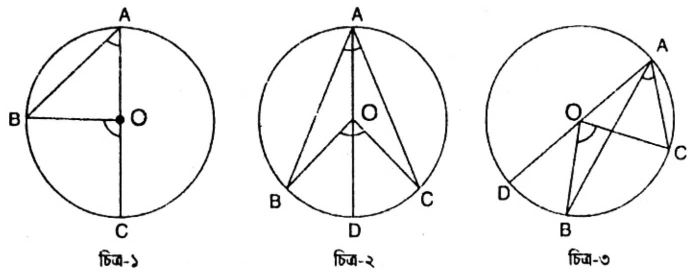
কেন্দ্রস্থ কোন বৃত্তে যে চাপ খণ্ডিত করে সেই চাপের উপর দণ্ডায়মান বলা হয়। অর্থাৎ চিত্রে $<AOB$, এর উপর দণ্ডায়মান।

চিত্র 'খ'-এ $<AOP + <BOP =$ সরল কোণ $<AOB$। সুতরাং কেন্দ্রস্থ কোণ $<AOB$ অর্ধবৃত্তের উপর দণ্ডায়মান বলা হয়।

'গ' চিত্রে $<AOP + <BOP =$ প্রবৃদ্ধ কোণ $<AOB$। অতএব, কেন্দ্রস্থ $<AOB$ অধিচাপ APB উপর দণ্ডায়মান বলা হয়।

উপপাদ্য ১৯.৭

বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক



চিত্র : ১৯.১২

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত। তার একই চাপ BC এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $<BAC$ এবং কেন্দ্রস্থ $<BOC$। প্রমাণ করতে হবে, $<BAC = \frac{1}{2} <BOC.$

প্রমাণ : (১) প্রথমে মনে করুন, AC রেখা কেন্দ্রগামী (চিত্র-১)

এক্ষেত্রে ΔAOB-এ $OA = OB$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\therefore <OBA = <OAB$

কিন্তু ΔAOB-এর বহিঃস্থ $<BOC = <OAB + <OBA$

$$= <OAB + <OAB = 2<OAB$$

$\therefore <OAB = \frac{1}{2} <BOC$

অর্থাৎ $<BAC = \frac{1}{2} <BOC$

(২) মনে করুন AC রেখা কেন্দ্রগামী নয়। এক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে ব্যাস AD অঙ্কন করুন। এখন CD চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $<CAD$-এর AD বাহু কেন্দ্রগামী।

সুতরাং চিত্র-২ অনুসারে

$<CAD = \frac{1}{2} <COD$

অনুরূপভাবে, $<BAD = \frac{1}{2} <BOD$

[যেখানে B ও C বিন্দু AD এর বিপরীত পাশে অবস্থিত]

$\therefore <CAD + <BAD = \frac{1}{2} (\angle COD + \angle BOD)$

বা, $<BAC = \frac{1}{2} <BOC$

আবার, চিত্র ৩-এ [যেখানে B ও C বিন্দু AD এর একটি পাশে অবস্থিত)

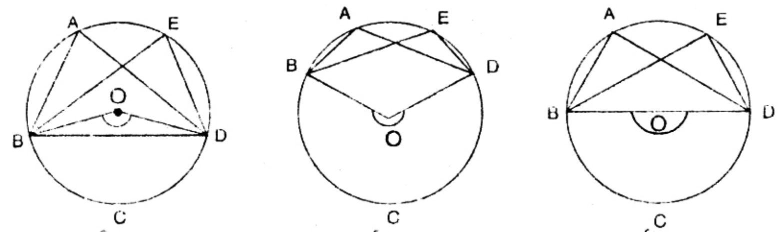
$\therefore <CAD - <BAD = \frac{1}{2} (\angle COD - \angle BOD)$

বা, $<BAC = \frac{1}{2} <BOC$

সুতরাং সকল ক্ষেত্রেই $<BAC = \frac{1}{2} <BOC$

উপপাদ্য ১৯.৮

বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।



চিত্র-১ চিত্র-২ চিত্র-৩

চিত্র : ১৯.১৩

মনে করুন O বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তের BCD চাপের উপর দণ্ডায়মান $<BAD$ ও $<BED$ দুইটি বৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে, $<BAD = <BED$

অঙ্কন : O, B ও O, D যোগ করুন।

প্রমাণ : এখানে BCD চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ O-তে চিহ্নিত $<BOD$।

যেহেতু একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।

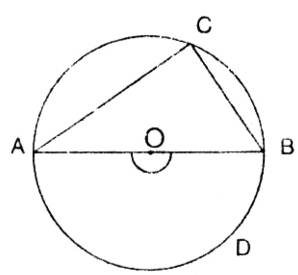
সুতরাং $<BAD = \frac{1}{2} <BOD$

এবং $<BED = \frac{1}{2} <BOD$

$\therefore <BAD = <BED$

উপপাদ্য ১৯.৯

অর্ধ বৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।



চিত্র : ১৯.১৪

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $<ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $<ACB =$ এক সমকোণ।

প্রমাণ : AB এর যে পাশে C বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশে একটি বিন্দু D নিন।

এখন, ADB চাপের উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $<ACB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ সরলকোণ AOB

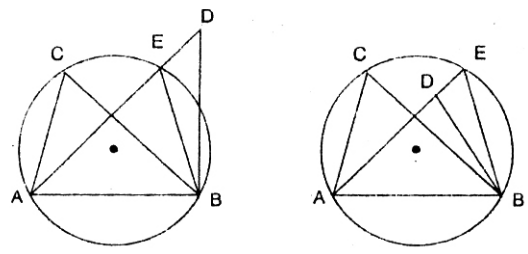
কিন্তু সরলকোণ $AOB =$ দুই সমকোণ।

$\therefore <ACB = \frac{1}{2}$ (এক সমকোণ)

অর্থাৎ, $<ACB =$ এক সমকোণ।

উপপাদ্য ১৯.১০

দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পাশে অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করলে, বিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।



চিত্র : ১৯.১৫

মনে করুন, A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু। AB রেখাংশের একই পাশে অবস্থিত C ও D বিন্দুতে উৎপন্ন $<ACB$ ও $<ADB$ সমান অর্থাৎ $<ACB = <ADB$। প্রমাণ করতে হবে, A, B, D, C বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অঙ্কন : A, B, C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় বলে এই তিনটি বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন। মনে করুন তা AD কে E বিন্দুতে ছেদ করে। B, E যোগ করুন।

প্রমাণ : $<ACB = <AEB$ (একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ)

কিন্তু $<ACB = <ADB$ (দেওয়া আছে)

$\therefore <AEB = <ADB$

কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ চিত্র-১ এ ΔBDE এর বহিঃস্থ $<AEB >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $<ADB$

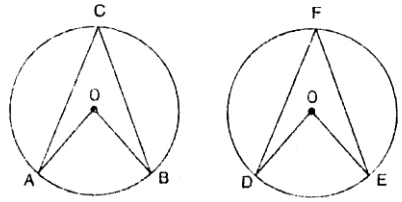
এবং চিত্র-২ এ ΔBDE-এর বহিঃস্থ $<ADB >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $<AEB$

সুতরাং E এবং D বিন্দু ভিন্ন হতে পারে না। E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

অতএব, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

উপপাদ্য ১৯.১১

সমান সমান বৃত্তচাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ বা বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান



চিত্র : ১৯.১৬

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তের চাপ AB এবং DEF বৃত্তের চাপ DE সমান।

AB চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ও কেন্দ্রস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $<ACB$ ও $<AOB$। DE চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ও কেন্দ্রস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $<DFE$ ও $<DOE$। প্রমাণ করতে হবে যে,

(১) $<AOB = <DOE$ এবং

(২) $<ACB = <DFE$

প্রমাণ : যেহেতু চাপ AB = চাপ DE

সুতরাং বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ সমান এবং চাপ দুইটির ডিগ্রি পরিমাপ সমান।

কিন্তু AB চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = কেন্দ্রস্থ $<AOB$ এর ডিগ্রি পরিমাপ এবং DE চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = কেন্দ্রস্থ $<DOE$ এর ডিগ্রি পরিমাপ

$\therefore <AOB$ এর ডিগ্রি পরিমাপ = $<DOE$ এর ডিগ্রি পরিমাপ

$\therefore <AOB = <DOE$ ……………… (1)

যেহেতু কোন চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক

সুতরাং $<ACB = \frac{1}{2} <AOB$

এবং $<DFE = \frac{1}{2} <DOE$

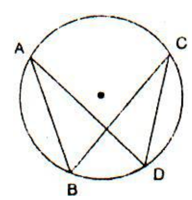
কিন্তু (1) থেকে পাই,

$\frac{1}{2} <AOB = \frac{1}{2} <DOE$

$\therefore <ACB = <DFE$ ……………(2)

অনুশীলনী ১৯.২

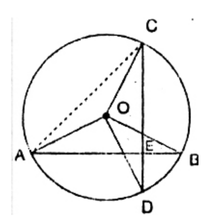
1. চিত্রে $AB = CD$, প্রমাণ করুন $AD = BC$



চিত্র : ১৯.১৭

2. O কেন্দ্র বিশিষ্ট $ABCD$ বৃত্তে $<ADB + <BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ করুন যে, A, O এবং C সমরেখ।

3. চিত্রে O কেন্দ্র এবং জ্যা $AB \perp$ জ্যা CD। AC ও BD চাপদ্বয় যথাক্রমে $<AOC$ ও $<BOD$ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করুন, $<AOC + <BOD$ = দুই সমকোণ।



চিত্র : ১৯.১৮

4. AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করুন যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে তাদের সমষ্টি $<AEC$ এর দ্বিগুণ।

পাঠ ৩ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য

উদ্দেশ্য

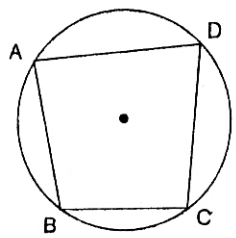
এই পাঠ শেষে আপনি–

1 বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলোর প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ

সংজ্ঞা : কোন চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো একই বৃত্তে অবস্থিত হলে চতুর্ভুজটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়েছে বলা হয়। সেক্ষেত্রে বৃত্তটিকে চতুর্ভুজটির পরিবৃত্ত বলা হয়।

চিত্রে $ABCD$ চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়েছে। বৃত্তটি চতুর্ভুজ $ABCD$ এর পরিবৃত্ত। এক্ষেত্রে $ABCD$ এর শীর্ষবিন্দুগুলো সমবৃত্ত হয়েছে বলা হয় অর্থাৎ A, B, C, D সমবৃত্ত।



চিত্র : ১৯.১৯

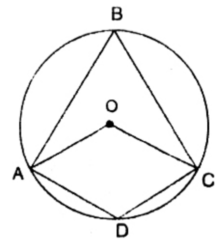
মন্তব্য : সমরেখ নয় এমন তিনটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে সবসময় একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। সুতরাং প্রত্যেক ত্রিভুজকে একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যায়। কিন্তু ত্রিভুজ ব্যতীত অন্য কোন বহুভুজকে বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যায় না।

কোন চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো একই বৃত্তে অবস্থিত হলে চতুর্ভুজটিকে বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ বলা হয়।

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য

উপপাদ্য ১৯.১২

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।



চিত্র : ১৯.২০

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তে $ABCD$ চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে, $<ABC + <ADC =$ দুই সমকোণ এবং $<BCD + <BAD =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করুন।

প্রমাণ : একই চাপ ADC-এর উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $<ABC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $<AOC$

অর্থাৎ $<ABC = \frac{1}{2} <AOC$

আবার একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $<ADC = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $<AOC$

অর্থাৎ $<ADC = \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ $<AOC$

এখন, $<ABC + <ADC = \frac{1}{2}$ $(\angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC)$

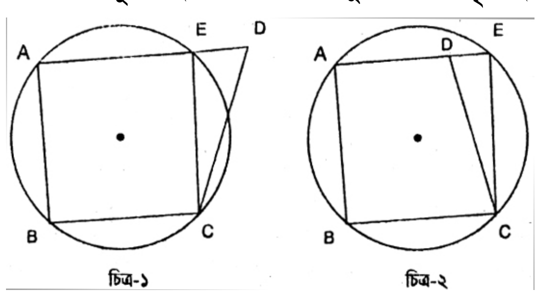
কিন্তু $\frac{1}{2}$ $(\angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC)$ $= \frac{1}{2}$ (চার সমকোণ) $=$ দুই সমকোণ।

অতএব, $<ABC + <ADC =$ দুই সমকোণ।

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $<BCD + <BAD =$ দুই সমকোণ।

উপপাদ্য ১৯.১৩

কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হয়।



চিত্র : ১৯.২১

মনে করুন, $ABCD$ চতুর্ভুজে $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অঙ্কন : যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়, সুতরাং এই তিনটি বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। ধরুন, বৃত্তটি AD সরলরেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করুন।

প্রমাণ : যেহেতু $ABCE$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

সুতরাং $\angle ABC + \angle AEC =$ দুই সমকোণ।

কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ। [দেওয়া আছে]

$\therefore\ \angle AEC = \angle ADC$

কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ চিত্র-১ এ ΔCED-এর

বহিঃস্থ $\angle AEC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle ADC$

এবং চিত্র-২ এ ΔCED-এর বহিঃস্থ $\angle ADC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle AEC$

সুতরাং E ও D বিন্দু ভিন্ন হতে পারে না। তাই E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

অতএব, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অনুশীলনী ১৯.৩

1. ΔABC সমদ্বিবাহু এবং BC এর সমান্তরাল রেখা AB ও AC কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন, B, C, D, E সমবৃত্ত।
2. প্রমাণ করুন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে।
3. ΔABC-এর $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে ছেদ করে। দেখান যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।
4. বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক একটি আয়ত।
5. $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$-এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ করুন $BC = CD$।

পাঠ ৪ বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক সম্পর্কিত উপপাদ্য

উদ্দেশ্য

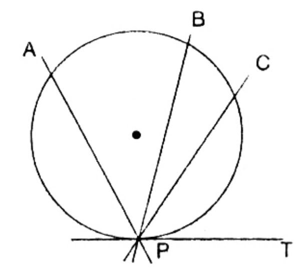
এই পাঠ শেষে আপনি–

- বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করবেন;
- স্পর্শক সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞাগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ছেদক ও স্পর্শক

সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার সর্বাধিক দুইটি সাধারণ বিন্দু বা ছেদবিন্দু থাকতে পারে।

সংজ্ঞা : সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয়। কিন্তু যদি কেবলমাত্র একটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়। শেষোক্ত ক্ষেত্রে সাধারণ বিন্দুটিকে ঐ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু বলা হয়।



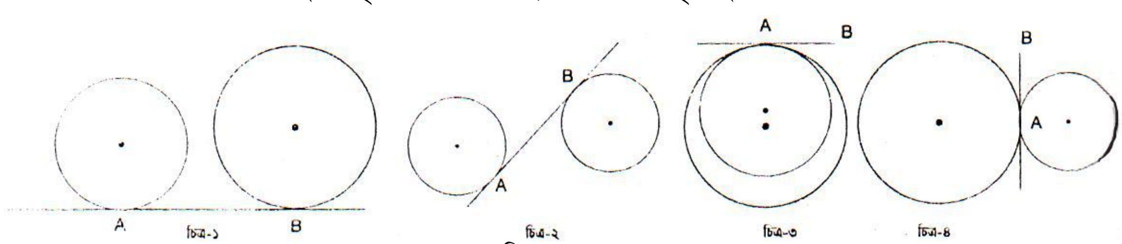
চিত্র : ১৯.২২

চিত্রে $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$ ও $\overleftrightarrow{PC}$ বৃত্তটির ছেদক এবং $\overleftrightarrow{PT}$ বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং P বিন্দু এই স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু।

সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয়। কিন্তু যদি কেবলমাত্র একটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়।

সাধারণ স্পর্শক

সংজ্ঞা : একটি সরলরেখা যদি দুইটি বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে তাকে বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শক বলা হয়।



চিত্র : ১৯.২৩

উপরের চিত্রগুলোতে $\overset{\times}{AB}$ উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক। চিত্র-১ ও চিত্র-২ এ স্পর্শবিন্দু ভিন্ন ভিন্ন। চিত্র-৩ ও চিত্র-৪-এ স্পর্শবিন্দু একই।

দুইটি বৃত্তের কোন সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি ভিন্ন হলে স্পর্শকটিকে (ক) **সরল সাধারণ স্পর্শক** বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং (খ) **তীর্যক সাধারণ স্পর্শক** বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে। চিত্র-১ ও চিত্র-৩ এ স্পর্শকটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং চিত্র-২ ও চিত্র-৪ এ স্পর্শকটি তীর্যক সাধারণ স্পর্শক।

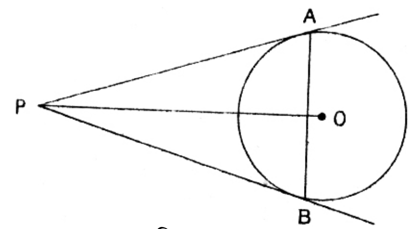
দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক যদি বৃত্ত দুইটিকে একই বিন্দুকে স্পর্শ করে তবে ঐ বিন্দুতে বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করে বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে বৃত্ত দুইটির **অন্তঃস্পর্শ** হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং **বহিঃস্পর্শ** হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে। চিত্র-৩ এ বৃত্ত দুইটির অন্তঃস্পর্শ এবং চিত্র ৪-এ বৃত্ত দুইটির বহিঃস্পর্শ হয়েছে।

স্পর্শ জ্যা ও স্পর্শ রেখাংশ

O কেন্দ্র বিশিষ্ট কোন বৃত্তের একটি বহিঃস্থ বিন্দু P। P বিন্দু দিয়ে যায় বৃত্তটির এরূপ দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি স্পর্শক রয়েছে এবং এই স্পর্শক দুইটির স্পর্শবিন্দুদ্বয় PO সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। চিত্রে PA ও PB এরূপ দুইটি স্পর্শক।

সংজ্ঞা : বৃত্তের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় বৃত্তের এরূপ দুইটি স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটিতে ঐ বিন্দুর স্পর্শ জ্যা বলা হয়। চিত্রে AB রেখাংশ P বিন্দুর স্পর্শ জ্যা।

সংজ্ঞা : বৃত্তের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু P দিয়ে যার এমন একটি স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু A হলে PA রেখাংশকে P হতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত একটি স্পর্শ রেখাংশ বলা হয়। চিত্রে PA রেখাংশ এবং PB রেখাংশ P বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ রেখাংশ।

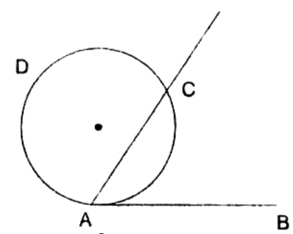


চিত্র : ১৯.২৪

একান্তর বৃত্তাংশ

একটি কোণ যদি এমন হয় যে তার শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের একটি বিন্দু এবং তার বাহু দুইটির একটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক ও অপরটি বৃত্তটির একটি ছেদক, তবে কোণটি বৃত্তটির যে চাপ ছিন্ন করে সেই চাপের অনুবন্ধী চাপকে বৃত্তটিতে কোণটির একান্তর বৃত্তাংশ বা একান্তর চাপ বলা হয়।

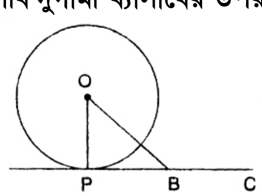
চিত্রে A বৃত্তস্থ বিন্দু, AB রেখা A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক এবং AC রেখা বৃত্তটিকে C বিন্দুতে ছেদ করেছে। ADC চাপ $<BAC$ এর একান্তর চাপ বা একান্তর বৃত্তাংশ।



চিত্র : ১৯.২৫

উপপাদ্য ১৯.১৪

বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।



চিত্র : ১৯.২৬

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তের উপরস্থ P বিন্দুতে PC স্পর্শক এবং OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। প্রমাণ করতে হবে $PC \perp OP$।

অঙ্কন : PC স্পর্শকের উপর যে কোন একটি বিন্দু B নিন। O, B যোগ করুন।

প্রমাণ : যেহেতু বৃত্তের P বিন্দুতে PC স্পর্শক, সুতরাং ঐ P বিন্দু ব্যতীত PC এর অন্য সকল বিন্দু বৃত্তের বাইরে থাকবে। সুতরাং B বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত। সুতরাং OB রেখাংশ বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP এর চেয়ে বড়, অর্থাৎ $OB>OP$ এবং তা স্পর্শবিন্দু P ব্যতীত PC এর উপরস্থ সকল B বিন্দুর জন্য সত্য। অতএব, কেন্দ্র হতে PC এর উপর OP হল ক্ষুদ্রতম দূরত্ব।

সুতরাং $PC \perp OP$

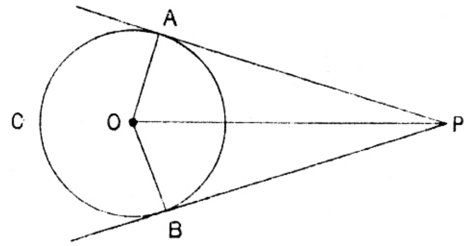
অনুসিদ্ধান্ত-১ : বৃত্তের কোন বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত-২ : স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত-৩ : বৃত্তের কেন্দ্র থেকে এর কোন স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায়।

উপপাদ্য ১৯.১৫

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান হবে।



চিত্র : ১৯.২৭

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তে P একটি বহিঃস্থ বিন্দু। PA ও PB রেখাদ্বয় বৃত্তের দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে, $PA=PB$

অঙ্কন : O, A, O, B এবং O, P যোগ করুন।

প্রমাণ : $<OAP = <OBP =$ এক সমকোণ।

এখন, ΔPAO ও ΔPBO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

OA বাহু $= OB$ বাহু [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

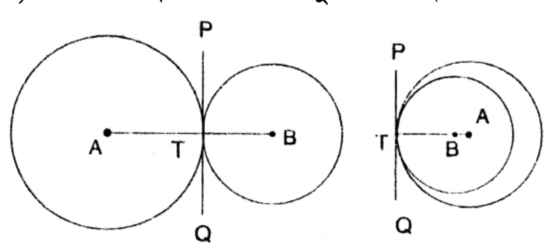
এবং অতিভুজ PO সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$

সুতরাং $PA = PB$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৯.১৬

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে।



চিত্র : ১৯.২৮

মনে করুন, A ও B কেন্দ্র বিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে T বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করতে হবে, A, T ও B বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পর T বিন্দুতে স্পর্শ করেছে, সুতরাং তাদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকবে। এখন T বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক PTQ অঙ্কন করুন। T, A ও T, B যোগ করুন।

প্রমাণ : AT ও BT স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায় $<PTA =$ এক সমকোণ এবং $<PTB =$ এক সমকোণ।

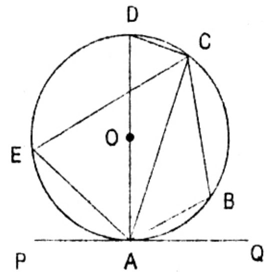
কিন্তু এরা রৈখিক এক যুগল কোণ এবং প্রত্যেকটি এক সমকোণ।

সুতরাং A, T, B একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অর্থাৎ A, T ও B সমরেখ।

উপপাদ্য ১৯.১৭

বৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং ঐ বিন্দুগামী যে কোন জ্যা-এর অন্তর্গত কোণ তার একান্তর বৃত্তাংশস্থ যে কোন কোণের সমান।



চিত্র : ১৯.২৯

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের উপরস্থ A বিন্দুতে PAQ একটি স্পর্শক এবং ঐ বিন্দুগামী AC একটি জ্যা। ধরুন, AC জ্যাটি বৃত্তটিকে ABC ও AEC চাপে বিভক্ত করেছে যেখানে B বিন্দু Q বিন্দুর দিকে এবং E বিন্দু P বিন্দুর দিকে আছে। তাহলে $<AEC$, $<QAC$-এর একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ এবং $<ABC$, $<PAC$ এর একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $<QAC=$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $<AEC$ এবং $<PAC =$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $<ABC$

অঙ্কন : A বিন্দুগামী ব্যাস AD অঙ্কন করুন এবং C, D যোগ করুন।

প্রমাণ : যেহেতু, A বিন্দুতে PAQ স্পর্শক এবং AD ব্যাস

সুতরাং, $<DAQ =$ এক সমকোণ

অর্থাৎ, $<DAC + <QAC =$ এক সমকোণ।

আবার, $<ACD =$ এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore$ $<DAC + <ADC =$ এক সমকোণ

অতএব, $<DAC + <QAC = <DAC + <ADC$

$\therefore$ $<QAC = <ADC$

কিন্তু, $<ADC = <AEC$ [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বলে]

সুতরাং, $<QAC = <AEC$

আবার, $ABCE$ চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত

$\therefore$ $<ABC + <AEC =$ দুই সমকোণ

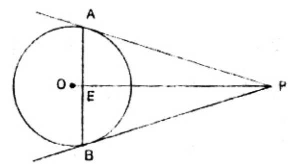
এবং $<PAC + <QAC =$ দুই সমকোণ

$\therefore$ $<PAC + <QAC = <ABC + <AEC$

সুতরাং, $<PAC = <ABC$ [$\because <QAC = <AEC$]

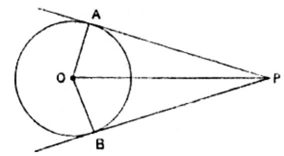
অনুশীলনী ১৯.৪

1. পাশের চিত্রে PA ও PB স্পর্শক। প্রমাণ করুন, $PE \perp AB$ এবং $AE=BE$



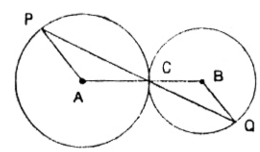
চিত্র : ১৯.৩০

2. পাশের চিত্রে PA ও PB স্পর্শক। প্রমাণ করুন, PO, $<APB$-এর সমদ্বিখণ্ডক।



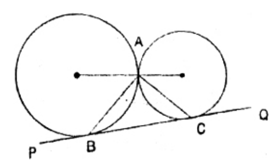
চিত্র : ১৯.৩১

3. প্রমাণ করুন যে, যে সব বৃত্ত একই বিন্দু দিয়ে যায় এবং উক্ত বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে, তাদের কেন্দ্রগুলো একই সরলরেখায় অবস্থিত।
4. P কোন বৃত্তের APB চাপের মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করুন যে, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি AB জ্যা-এর সমান্তরাল।
5. প্রমাণ করুন যে, যে সকল বৃত্ত দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে তাদের কেন্দ্রসমূহ সমরেখ।
6. পাশের চিত্রে বৃত্ত দুইটি C বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। প্রমাণ করুন $AP \parallel BQ$



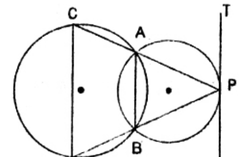
চিত্র : ১৯.৩২

7. A ও B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করেছে এবং C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত একটি সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করুন $AP \parallel BQ$
8. পাশের চিত্রে বৃত্ত দুইটি A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ তাদের সরল সাধারণ স্পর্শক। প্রমাণ করুন $<BAC =$ এক সমকোণ।



চিত্র : ১৯.৩৩

9. AB ও AC কোন বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করুন যে, BC রেখা A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমান্তরাল।
10. AB কোন বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করুন যে, ΔACD সমবাহু।
11. চিত্রে বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। PAC ও PBD দুইটি সরলরেখা এবং P বিন্দুতে PT স্পর্শক। প্রমাণ করুন যে, $PT \parallel AB$.



চিত্র : : ১৯.৩৪

পাঠ-৫ বৃত্ত সম্পর্কিত সম্পাদ্য

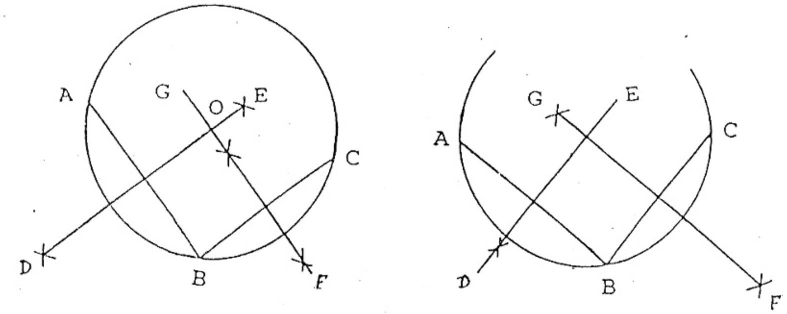
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করতে পারবেন;
- নির্দিষ্ট চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে পারবেন;
- বৃত্তের নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করতে পারবেন;
- বৃত্ত সম্পর্কিত কতিপয় সম্পাদ্য অঙ্কনে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সম্পাদ্য ১৯.১

একটি বৃত্ত বা বৃত্তচাপ দেওয়া আছে। তার কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র-১ চিত্র-২

চিত্র : ১৯.৩৫

চিত্র-১ এ ABC একটি বৃত্ত এবং চিত্র-২ এ একটি বৃত্তচাপ। বৃত্তটির বা বৃত্তচাপটির কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।

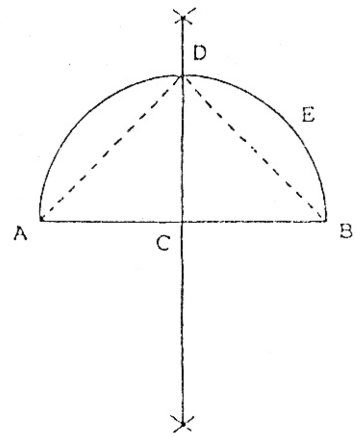
অঙ্কন : A, B ও B, C যোগ করুন। এখন AB ও BC জ্যা দুইটির লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে DE ও FG রেখা দুইটি টানুন। মনে করুন তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে O বিন্দুই নির্ণেয় বৃত্ত বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

প্রমাণ : DE রেখা AB এর লম্বদ্বিখণ্ডক। সুতরাং তা কেন্দ্রগামী। আবার FG রেখা BC জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক। সুতরাং তা কেন্দ্রগামী।

$\therefore$ DEও FG রেখার সাধারণ বিন্দু O-ই প্রদত্ত বৃত্ত বা বৃত্তচাপ ABC-এর কেন্দ্র।

সম্পাদ্য ১৯.২

বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট চাপকে সমদ্বিখণ্ডক করতে হবে।



চিত্র : ১৯.৩৬

মনে করুন, কোন বৃত্তের AEB একটি নির্দিষ্ট চাপ। একে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হবে।

অঙ্কন : A, B যোগ করুন। AB জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক CD অঙ্কন করুন। মনে করুন তা চাপটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AEB চাপ D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হল।

প্রমাণ : A, D ও B, D যোগ করুন।

ΔACD ও ΔBCD-এ

$AC = BC$ [অঙ্কনানুসারে]

CD সাধারণ বাহু।

এবং $<ACD = <BCD$ [প্রত্যেকে সমকোণ]

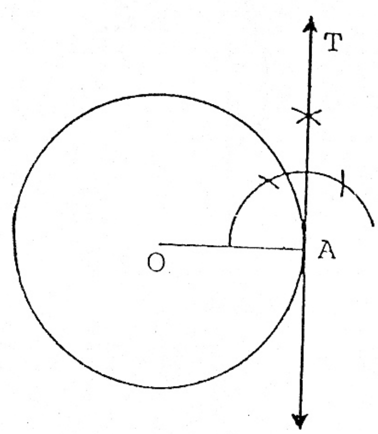
$\therefore \Delta ACD \cong \Delta BCD$

সুতরাং জ্যা $AD =$ জ্যা BD

অতএব, চাপ $AD =$ চাপ BD

সম্পাদ্য ১৯.৩

বৃত্তের কোন একটি বিন্দুতে স্পর্শক আঁকতে হবে।



চিত্র : ১৯.৩৭

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের A একটি বিন্দু। A বিন্দুতে বৃত্তে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।

অঙ্কন : O, A যোগ করুন। A বিন্দুতে OA এর উপরে AT লম্ব আঁকুন। তাহলে AT নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ : যেহেতু OA রেখাংশ A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং AT তার উপর লম্ব। সুতরাং AT সরলরেখা নির্ণেয় স্পর্শক।

সম্পাদ্য ১৯.৪

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হতে বৃত্তটির স্পর্শক আঁকতে হবে।

চিত্র : : ১৯.৩৮

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত এবং P একটি বহি:স্থ বিন্দু। P বিন্দু হতে বৃত্তটির স্পর্শক আঁকতে হবে।

অঙ্কন : P, O যোগ করুন এবং OP রেখাংশের মধ্যবিন্দু M নির্ণয় করুন। M কে কেন্দ্র করে OM এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন। মনে করুন, অঙ্কিত বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলো। A, P ও B, P যোগ করুন। তাহলে AP বা BP নির্ণেয় স্পর্শক।

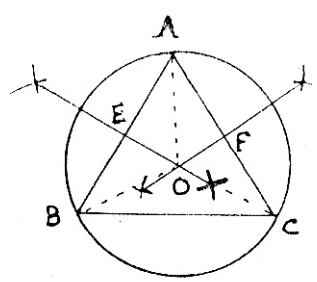
প্রমাণ : A, O ও B, O যোগ করুন। এখন ABP বৃত্তে OP ব্যাস।

$\therefore < PAO =$ এক সমকোণ।

অতএব, O কেন্দ্রিক বৃত্তের A বিন্দুতে AP রেখা একটি স্পর্শক। অনুরূপভাবে BP রেখাও একটি স্পর্শক।

সম্পাদ্য ১৯.৫

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।



চিত্র : ১৯.৩৯

মনে করুন ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C দিয়ে যায়।

অঙ্কন : AB ও AC এর লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EO ও FO রেখা আঁকুন। মনে করুন, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল। A, O যোগ করুন। O কে কেন্দ্র করে AO এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকুন। তাহলে বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC-এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : B, O ও C, O যোগ করুন।

O বিন্দুটি AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

$\therefore OA = OB$

একইভাবে $OA = OC$

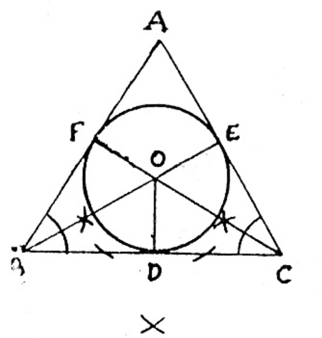
সুতরাং $OA=OB=OC$

অর্থাৎ O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে।

সুতরাং এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত।

সম্পাদ্য ১৯.৬

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।



চিত্র : ১৯.৪০

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। এর অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ ΔABC এর ভিতরে এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা BC, CA ও AB বাহু তিনটির প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন : $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BE ও CF আঁকুন। মনে করুন, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে BC এর উপর OD লম্ব আকুন। মনে করুন, তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকুন। তাহলে এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

প্রমাণ : O বিন্দু থেকে AB ও AC এর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব আঁকুন। এখন O বিন্দু $\angle ABC$ এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। $\therefore OD = OE,$ একইভাবে $OD=OF$

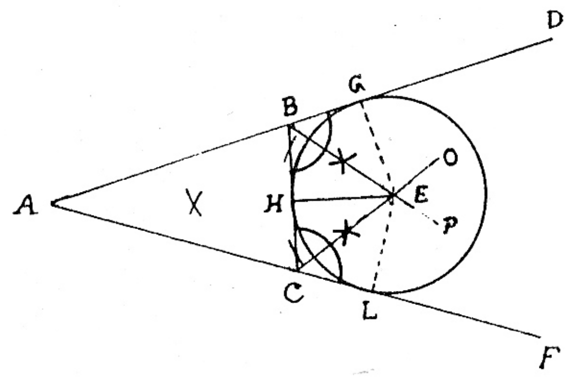
সুতরাং $OD = OE = OF$

অতএব, O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অংকন করলে তা D, E ও F বিন্দু দিয়ে যাবে। আবার, OD, OE ও OF এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, AB ও AC লম্ব। সুতরাং বৃত্তটি ΔABC এর ভিতর থেকে এর বাহু তিনটিকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সুতরাং, DEF বৃত্তটিই ΔABC এর অন্তর্বৃত্ত।

সম্পাদ্য ১৯.৭

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।



চিত্র : ১৯.৪১

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। এর বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন : AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করুন। $\angle FCB$ ও $\angle DBC$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে CO ও BP আঁকুন। মনে করুন, তারা পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করে। এখন E বিন্দু হতে BC এর উপর EH লম্ব আঁকুন যেন তা BC কে H বিন্দুতে ছেদ করে। এখন E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকুন। তাহলে এই বৃত্তটি নির্ণেয় বহির্বৃত্ত হবে।

প্রমাণ : E হতে BD ও CF এর উপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব আঁকুন। লম্বদ্বয় BD ও CF কে যথাক্রমে G ও L বিন্দুতে ছেদ করে।

E বিন্দুটি $\angle FCB$ এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

$\therefore EH = EL$

অনুরূপভাবে, $EH = EG$

সুতরাং, $EH = EL = EG$

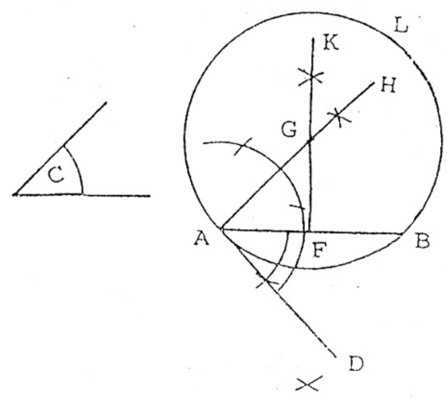
অতএব, E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G ও L বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার, EH, EL ও EG এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, CF ও BD রেখাংশ তিনটি লম্ব। সুতরাং বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, L ও G বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।

অতএব, ELG বৃত্তটিই ΔABC এর বহির্বৃত্ত হবে।

সম্পাদ্য ১৯.৮

একটি রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দিয়ে এমন একটি বৃত্তাংশ আঁকতে হবে যেন ঐ বৃত্তাংশের রেখাংশটি একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ ধারণ করে।



চিত্র : ১৯.৪২

মনে করুন, AB একটি রেখাংশ এবং $<C$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। A ও B বিন্দু দিয়ে এরূপ একটি বৃত্তাংশ আঁকতে হবে, যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ $<C$ এর সমান হয়।

অঙ্কন : AB রেখাংশের A বিন্দুতে $<BAD = <C$ আঁকুন। A বিন্দুতে AD রেখার উপর AH লম্ব টানুন। AB রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক FK টানুন। FK রেখা AH রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করে। এখন G কে কেন্দ্র করে GA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ALB বৃত্ত আঁকুন। যেখানে L এবং D বিন্দু দুইটি AB রেখার বিপরীত পাশে অবস্থিত। তাহলে, ALB বৃত্তাংশটিই নির্ণেয় বৃত্তাংশ।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে AD রেখা বৃত্তটির স্পর্শক এবং AB জ্যা। সুতরাং $<BAD$ বা $<C$ একান্তর বৃত্তাংশ ALB তে অবস্থিত যে কোন কোণের সমান হবে।

অনুশীলনী ১৯.৫

1. এরূপ একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A ও B দিয়ে যাবে এবং যার কেন্দ্র AB থেকে 6 সে.মি. দূরে থাকবে।
2. 3 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁকুন এবং এর বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকুন যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$ হয়।
3. এরূপ একটি বৃত্ত আঁকুন, যা দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু দিয়ে যাবে এবং যার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর থাকবে।
4. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের একটি ছেদককে স্পর্শ করে এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন।
5. 3, 4 ও 5 সে.মি. বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করুন। এর ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
6. 5 সে.মি. বাহু বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করুন।
7. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন, যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।
8. কোন বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করুন যেন তা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।
9. কোন বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করুন যেন তা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।
10. কোন বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করুন যেন তা কোন সরলরেখার সাথে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ উৎপন্ন করে।