ইউনিট ২০

জ্যামিতিক অনুপাত ও সদৃশতা

ভূমিকা

যদি দুইটি রাশির পরিমাপের একক একই হয়, তাহলে তাদের পরিমাপের তুলনা করার জন্য অনুপাতের প্রয়োজন হয়। দুইটি রাশি P ও Q এর অনুপাতকে P ঃ Q বা, $\frac{P}{Q}$ আকারে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং P ও Q এর পরিমাপের একক যদি m হয় এবং এদের পরিমাপ pm এবং qm হয়, তাহলে Pঃ Q $= pm$ ঃ $qm =$ pঃ $q = \frac{p}{q}$
আবার, দুইটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা যদি সমান হয় তাহলে একটির শীর্ষবিন্দুকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুর সাথে এমন ভাবে মিলানো যায় যে, বহুভুজ দুইটির অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ বহুভুজ বলা হয়। এই ইউনিটে আমরা জ্যামিতিক অনুপাত ও সদৃশতা সম্পর্কে বেশ কিছু উপপাদ্য ও সম্পাদ্য নিয়ে আলোচনা করব।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- অনুপাত সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞাগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- অনুপাত সম্পর্কিত সম্পাদ্যগুলো অঙ্কন ও প্রমাণ করতে পারবেন;
- সদৃশ্যতা সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

পাঠ ১ অনুপাত ও সদৃশতা সম্পর্কিত উপপাদ্য

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

l অনুপাত সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন;

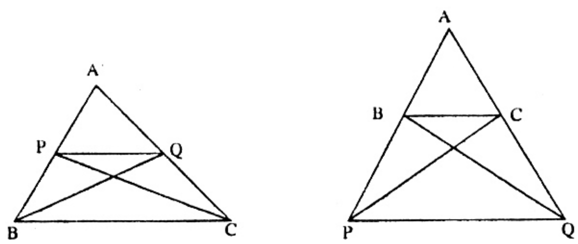
l অনুপাত সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞাগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;

l সদৃশ্যতা সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন;

l সদৃশতা সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্যের প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

উপপাদ্য ২০.১

ত্রিভুজের কোন এক বাহুর সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা তার অপর দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।



চিত্র : ২০.১

মনে করুন, PQ রেখা ΔABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল এবং উহা AB ও AC কে বা তাদের বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$AP : PB = AQ : QC$

অঙ্কন : B, Q ও C, P যোগ করুন।

প্রমাণ : ΔAPQ ও ΔBPQ একই শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট বলে এদের উচ্চতা সমান।

$\therefore \dfrac{\Delta APQ}{\Delta BPQ} = \dfrac{AP}{BP}$

তদ্রুপ $\dfrac{\Delta APQ}{\Delta CPQ} = \dfrac{AQ}{CQ}$

এখন, ΔBPQ ও ΔCPQ একই ভূমি PQ-এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলে অবস্থিত।

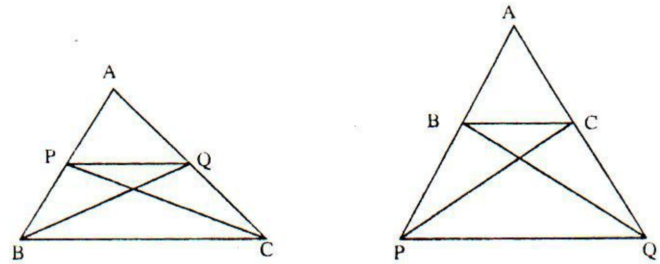
$\therefore \Delta BPQ = \Delta CPQ$

সুতরাং $\dfrac{\Delta APQ}{\Delta BPQ} = \dfrac{\Delta APQ}{\Delta CPQ}$

$\therefore \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AQ}{CQ}$

উপপাদ্য ২০.২

কোন সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে, উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।



চিত্র : ২০.২

মনে করুন, PQ সরলরেখা ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশ দুটিকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে। অর্থাৎ $AP : PB = AQ : QC$

প্রমাণ করতে হবে যে, PQ এবং BC সমান্তরাল।

অঙ্কন : B, Q ও C, P যোগ করুন।

প্রমাণ : $\frac{\Delta APQ}{\Delta PQB} = \frac{AP}{PB}$ [ত্রিভুজ দুটি একই উচ্চতা বিশিষ্ট]

এবং $\frac{\Delta APQ}{\Delta PQC} = \frac{AQ}{QC}$ [ত্রিভুজটি একই উচ্চতা বিশিষ্ট]

কিন্তু $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ [স্বীকার]

$\therefore \frac{\Delta APQ}{\Delta PQB} = \frac{\Delta APQ}{\Delta PQC}$

$\therefore \Delta PQB = \Delta PQC$

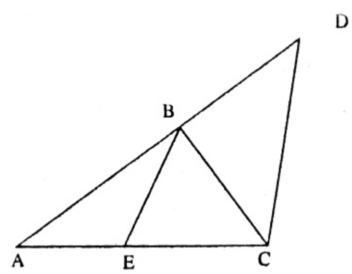
কিন্তু ΔPQB এবং ΔPQC একই ভূমি PQ এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

সুতরাং তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ BC ও PQ সমান্তরাল।

উপপাদ্য-২০.৩

ত্রিভুজের যে কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



চিত্র : ২০.৩

মনে করুন, ΔABC-এ BE সরলরেখা ΔABC-এর অন্তঃস্থ $\angle ABC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে AC ভূমিকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AE : EC = AB : BC$

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে EB সরলরেখার সমান্তরাল করে CD সরলরেখা অঙ্কন করুন, যেন তা AB সরলরেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : যেহেতু, $EB||CD$ [অঙ্কন]

$\therefore <BDC = <ABE$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $<BCD = <CBE$ [একান্তর কোণ]

কিন্তু $<ABE = <CBE$ [স্বীকার]

$\therefore <BDC = <BCD$

$\therefore BC = BD$

আবার যেহেতু $EB||CD$

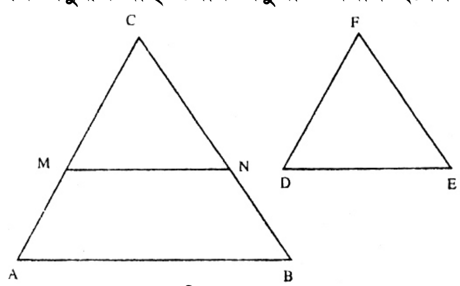
$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BD}$

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$ [$\because$ $BD = BC$]

অর্থাৎ $AE : EC = AB : BC$

উপপাদ্য ২০.৪

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হবে।



চিত্র : ২০.৪

মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF-এ

$<A=<D$, $<B=<E$ এবং $<C =<F$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$

অঙ্কন : ধরুন, $\Delta ABC>\Delta DEF$, তাহলে CA হতে $CM = FD$ এবং CB হতে $CN = FE$ কাটুন এবং M, N যোগ করুন।

প্রমাণ : ΔCMN ও ΔFDE-এ

$CM=FD$, $CN=FE$ এবং

অন্তর্ভুক্ত $<MCN$ = অন্তর্ভুক্ত $<DFE$

$\therefore \Delta CMN \cong \Delta FDE$

$\therefore <CMN = <FDE=<A$

কিন্তু $<CMN$ ও $<A$ অনুরূপ কোণ।

$\therefore MN||AB$

$\therefore \frac{CA}{CM} = \frac{BC}{CN}$

বা, $\frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF}$ [$CM=FD$, $CN=EF$]

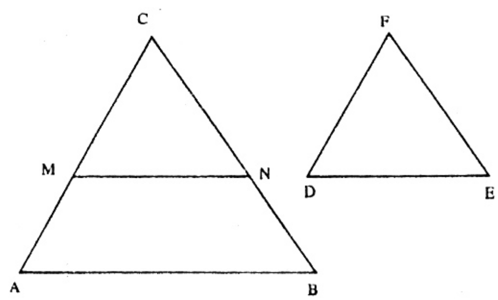
এইরূপে AC ও AB হতে যথাক্রমে DF ও DE এর সমান অংশ কেটে নিয়ে দেখানো যায়-

$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ অর্থাৎ $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$

$\therefore \frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$

উপপাদ্য ২০.৫

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী এবং তাদের অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হবে।



চিত্র : ২০.৫

মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF-এ

$\frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $<A = <D$, $<B = <E$, $<C = <F$.

অঙ্কন : ধরুন, $\Delta ABC > \Delta DEF$, তাহলে CA হতে $CM = FD$ এবং CB হতে $CN = FE$ কাঁটুন এবং M, N যোগ করুন।

প্রমাণ : যেহেতু, $\frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF}$ সুতরাং $\frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN}$

সুতরাং, $MN \parallel AB$

$<CAB = <CMN$ [CA ছেদক রেখা দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

এবং $<CBA = <CNM$ [CB ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

$\therefore \Delta CAB$ ও ΔCMN সদৃশকোণী

সুতরাং, $\frac{CA}{CM} = \frac{AB}{MN}$ বা, $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{MN}$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AB}{MN}$ [কল্পনানুসারে $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$]

$\therefore DE = MN.$

সুতরাং, $\Delta CMN \cong \Delta FDE$ [একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহু সমান বলে]

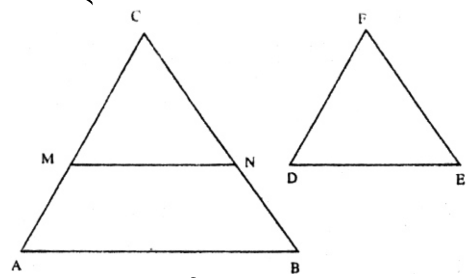
$\therefore <MCN = <DFE, <CMN = <FDE, <CNM = <FDE$

অর্থাৎ, $<C = <F, <A = <D, <B = <E$

[$\because <CMN = <CAB$ এবং $<CNM = <CBA$]

উপপাদ্য ২০.৬

দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান হলে এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।



চিত্র : ২০.৬

মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF-এ

$<C = <F$এবং $\dfrac{CA}{FD} = \dfrac{BC}{EF}$

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABCও ΔDEF সদৃশ।

অঙ্কন : ধরুন, $CA \neq FD$ তাহলে, $BC \neq EF$

CA রশ্মিতে M বিন্দু এবং BC রশ্মিতে N বিন্দু নিন যেন,

$CM=FD$ এবং $CN=FF$ হয়। M,N যোগ করুন।

প্রমাণ : ΔCMN ও ΔFDE-এ

$CM=FD,\ CN=FE$ এবং অন্তর্ভুক্ত $<MCN=<DFE$

$\therefore\ \Delta CMN \cong \Delta FDE$

$\therefore\ <C=<F,\ <CMN=<D,\ <CNM = <E.$

আবার, যেহেতু $\dfrac{CA}{FD} = \dfrac{CB}{FE}$, সুতরাং $\dfrac{CA}{CM} = \dfrac{CB}{CN}$

$\therefore\ MN \parallel AB$

সুতরাং, $<CAB = <CMN$ এবং $<CBA = <CNM$

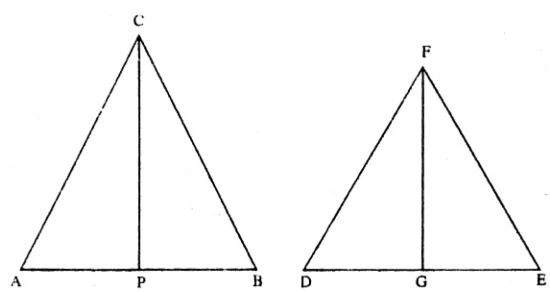
$\therefore\ <C=<F,\ <A=<D$ এবং $<B=<E.$

অর্থাৎ, ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী

সুতরাং, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

উপপাদ্য ২০.৭

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের যে কোন দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের অনুপাতের সমান।



চিত্র : ২০.৭

মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ,

অর্থাৎ, $<A = <D, <B=<E, <C=<F$

এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$,

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

অঙ্কন : CP, AB এর উপর এবং FG, DE এর উপর লম্ব আঁকুন।

প্রমাণ : ΔACP এবং ΔDFG সদৃশকোণী কেননা,

$<A = <D, <CPA = <FGD$

$\therefore \frac{CP}{FG} = \frac{CA}{FD}$ কিন্তু $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$

$\therefore \frac{CP}{FG} = \frac{AB}{DE}$

এখন, ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \infty AB \infty CP$

এবং ΔDEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \infty DE \infty FG$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2}\infty AB \infty CP}{\frac{1}{2}\infty DE \infty FG}$$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB}{DE}\cdot\frac{AB}{DE} = \frac{AB^2}{DE^2} \left[\because \frac{CP}{FG} = \frac{AB}{DE}\right]$$

আবার, $\frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$ বলে $\frac{CA^2}{FD^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AB^2}{DE^2}$

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী ২০.১

1. ΔABC-এর AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পরকে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। $FG \parallel DE$ এবং FG, AC কে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখান যে, $AC=6EG$
2. Δ-ক্ষেত্র ABC, তার ভূমি BC এর সমান্তরাল রেখা EF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে। দেখান যে, $AE : AB=1 : \sqrt{2}$ ।

3. ΔABC-এর একটি মধ্যমা এবং $<ADB$ ও $<ADC$এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহুগুলোকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel BC$
4. প্রমাণ করুন যে, ট্রপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় তাদের ছেদবিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।
5. ΔABC এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং BE কে বর্ধিত করলে তা AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $AC=3AF$ এবং $BE = 3EF$
6. ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। AC এর অতিভুজ। BD, AC-এর উপর লম্ব হলে, দেখান যে, $AD : CD = AB^2 : BC^2$
7. ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর$<B$ সমকোণ। B বিন্দু থেকে অতিভুজ AC এর উপর লম্ব টানলে উৎপন্ন ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর এবং মূল ত্রিভুজের সদৃশ হবে।
8. ΔABC এর $<BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক BC বা তার বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। যদি $BE=5$ সে.মি. $EC=3$ সে.মি. হয়, তবে $CF=$ কত?

পাঠ ২ অনুপাত সম্পর্কিত সম্পাদ্য

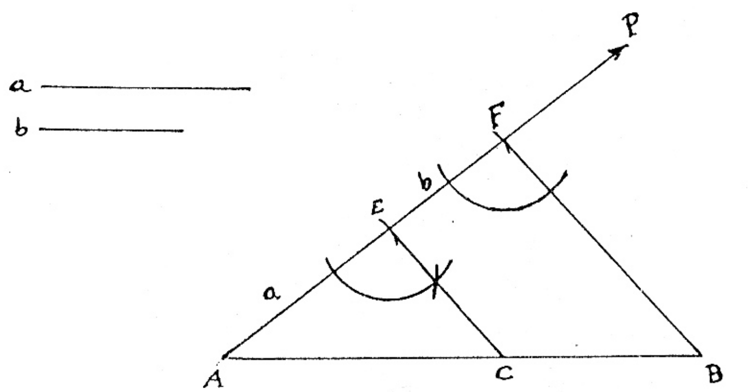
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

1 জ্যামিতিক উপায়ে যে কোন রেখাংশকে দুইটি নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করতে পারবেন;
1 কয়েকটি রেখা দেওয়া থাকলে এর তৃতীয় ও চতুর্থ সমানুপাত অঙ্কন করতে পারবেন;
1 দুইটি রেখাংশের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করতে পারবেন;
1 অনুপাত সম্পর্কিত কয়েকটি অঙ্কন জানবেন এবং প্রয়োগ করতে পারবেন।

সম্পাদ্য ২০.১

একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে দুইটি নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করতে হবে।



চিত্র : ২০.৮

মনে করুন, AB একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। AB-কে অন্তঃস্থভাবে $a : b$ অনুপাতে বিভক্ত করতে হবে।

অঙ্কন : AB রেখাংশের A বিন্দু দিয়ে যে কোন কোণে একটি রশ্মি AP আঁকুন। AP হতে a এর সমান করে AE কাটুন। আবার EP থেকে b এর সমান করে EF অংশ কাটুন। F, B যোগ করুন। E বিন্দু দিয়ে $EC \parallel FB$ আঁকুন। মনে করুন, EC, AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, AB রেখাংশ C বিন্দুতে $a : b$ এ অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত হয়েছে।

প্রমাণ : ΔABF-এ

$AC : CB = AE : EF$ [যেহেতু $EC \parallel FB$]

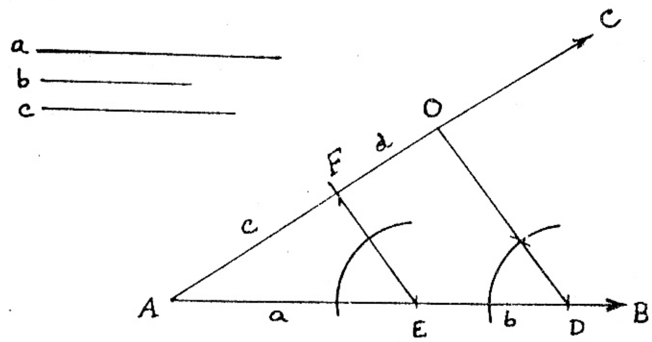
$= a : b$

অতএব, C বিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু যা AB কে $a : b$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

সম্পাদ্য ২০.২

তিনটি নির্দিষ্ট রেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে *a, b, c*। একটি রেখাংশ নির্ণয় করতে হবে যার দৈর্ঘ্য *d* এমন যে,

$a : b = c : d$



চিত্র : ২০.৯

মনে করুন, a, b, c তিনটি রেখাংশ। এরূপ একটি রেখাংশ d নির্ণয় করতে হবে যেন, $a : b = c : d$ হয়।

অঙ্কন : AB ও AC দুইটি পরস্পরচ্ছেদী রশ্মি আঁকুন। AB থেকে a এর সমান করে AE অংশ এবং EB হতে b এর সমান করে ED অংশ কাটুন। আবার AC হতে c এর সমান করে AF অংশ কাটুন। E, F যোগ করুন। D বিন্দু দিয়ে $EF \parallel DO$ আঁকুন। মনে করুন, DO, AC কে O বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, FO-ই হবে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য d।

প্রমাণ : ΔADO-এ

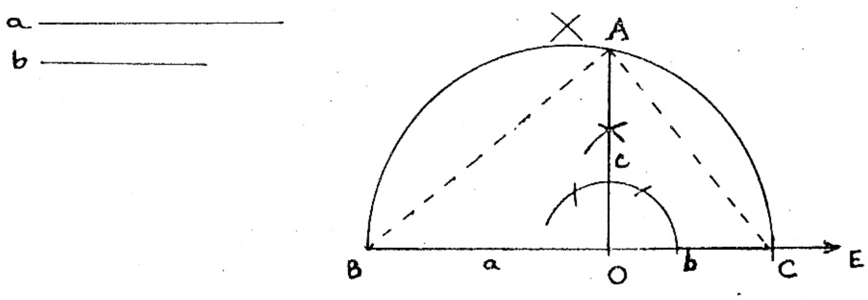
$DO \parallel EF$

$\therefore AE : ED = AF : FO$

অর্থাৎ $a : b = c : d$ $[AE = a, ED = b, AF = c, FO = d]$

সম্পাদ্য ২০.৩

দুটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে *a* ও *b*। একটি রেখাংশ নির্ণয় করতে হবে যার দৈর্ঘ্য *c* এমন যে, $ab=c^2$



চিত্র : ২০.১০

মনে করুন, a ও b দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। এমন একটি রেখাংশ c নির্ণয় করতে হবে যেন $a : c = c : b$ বা $ab=c^2$ হয়।

অঙ্কন : যে কোন রেখাংশ BE থেকে $BO=a$ এবং OE হতে $OC = b$ অংশ কাটুন। BC কে ব্যাস করে BAC অর্ধবৃত্ত আঁকুন। BC-এর উপর O বিন্দুতে OA লম্ব টানুন। OA অর্ধবৃত্ত কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে OA-ই হবে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য c.

প্রমাণ : ΔBAC-এ

$<BAC=$ এক সমকোণ এবং $OA \perp BC$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \Delta ABO$ ও ΔAOC সদৃশ

$\therefore \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OC}{OA}$

বা, $OB.OC = OA^2$

অর্থাৎ $ab = c^2$ [$\because OB=a, OC=b, OA=c$]

অনুশীলনী ২০.২

1. একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহুস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে দুইটি সরলরেখা টেনে ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করুন।
2. 4.8 সে.মি. একটি রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করুন।
3. 4.8 সে.মি. এবং 3.2 সে.মি. দুইটি রেখাংশের তৃতীয় সমানুপাতিক অঙ্কন করুন এবং এর পরিমাপ নির্ণয় করুন।
4. 6.4 সে.মি. এবং 3.6 সে.মি. দুইটি রেখাংশের মধ্যসমানুপাতিক অঙ্কন করুন এবং মেপে এর সত্যতা যাচায় করুন।
5. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 8 বর্গ সে.মি.। এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করুন।
   $sec^2\theta = 2tan\theta$, যখন $0° \leq \theta \leq 90°$