ত্রিকোণমিতি

ইউনিট ২১

ত্রিকোণমিতি

ভূমিকা

ত্রিকোণমিতি শব্দটি এসেছে গ্রিক শব্দ tri'gonon+met'ron থেকে যার অর্থ ত্রিভুজের পরিমাপ। গণিত শাস্ত্রের যে শাখায় ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ এবং তদসম্পর্কীয় বিষয় আলোচিত হয় তাকে ত্রিকোণমিতি বলা হয়। অতি প্রাচীনকালে ত্রিকোণমিতির পরিধি শুধুমাত্র ত্রিভুজের কোণ, বাহু ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মধ্যে সীমিত ছিল। কিন্তু বর্তমানে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় এর প্রয়োগ বিস্তার লাভ করেছে। বর্তমানে গণিতের যে কোন শাখায় শিক্ষালাভের জন্য ত্রিকোণমিতির জ্ঞান একান্ত অপরিহার্য।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি–

- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- ত্রিকোণমিতিক কোণের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন;
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন;
- সূক্ষ্মকোণের এবং বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন;
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করতে পারবেন;
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ ত্রিকোণমিতিক কোণ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

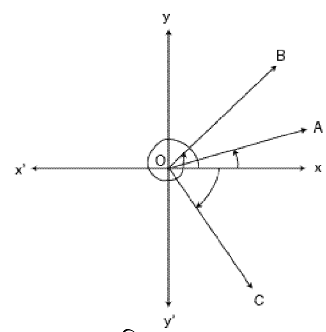
- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে জানতে পারবেন;
- চৌকণ সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন;
- কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন।

ত্রিকোণমিতিক কোণের ধারণা

জ্যামিতিতে সাধারণত দুইটি রশ্মির মিলনে কোণ উৎপন্ন হয় এবং কোণের পরিমাণ $0°$ হতে $360°$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে এবং তা ধণাত্মক হয়। জ্যামিতিতে ঋণাত্মক কোণ অর্থহীন।

ত্রিকোণমিতিতে একটি রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমাপ আবর্তিত হয় তাই ঐ রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাপ।

মনে করুন XOX' এবং YOY' দুইটি স্থির রশ্মি লম্বভাবে অবস্থিত। এখন যদি একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OA অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে কোণের সংজ্ঞানুসারে ঘূর্ণায়মান রেখা দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাণ $<XOA$। যদি এই ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি একই দিকে ঘুরতে ঘুরতে আদি অবস্থান OX পার হয়ে OB অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে সৃষ্ট কোণের পরিমাপ হবে $<XOB$ এবং তা দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তম। উপরোক্ত কোণ দুইটি ধণাত্মক। কিন্তু যদি ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে আদি অবস্থান হতে সেদিকে ঘুরে OC অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে কোণের পরিমাণ হবে $<XOC$ এবং তা হবে ঋণাত্মক। সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাণ $0°$ হতে শুরু করে যে কোন মানের হতে পারে এবং তা ধণাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে।



চিত্র : ২১.১

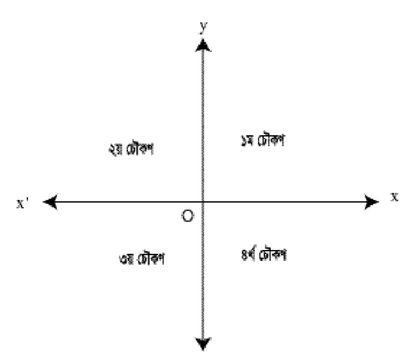
ত্রিকোণমিতিক কোণগুলোকে সাধারণত A, B, C, α (আলফা), β (বিটা), γ (গামা), θ (থিটা) ইত্যাদি অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

> ***রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরালে ত্রিকোণমিতিক কোণ ধণাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরালে কোণ ঋণাত্মক হয়।***

চৌকণ *(Quadrant)*

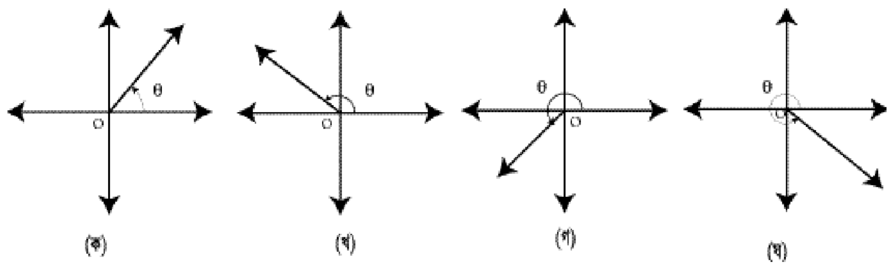
চিত্র লক্ষ করলে দেখা যাবে, লম্বভাবে দণ্ডায়মান XOX' এবং YOY' সরলরেখা দুইটি সমতল ক্ষেত্রটিকে চারটি অংশে বিভক্ত করেছে। এই চারটি অংশের প্রত্যেকটিকে চৌকণ *(Quadrant)* বলে।

চিত্রে $XOY, YOX', X'OY'$ ও $Y'OX$ অংশকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চৌকণ বলা হয়। সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ যাই হোক না কেন সেটি যে কোন একটি চৌকণের মধ্যে অবস্থান করে।



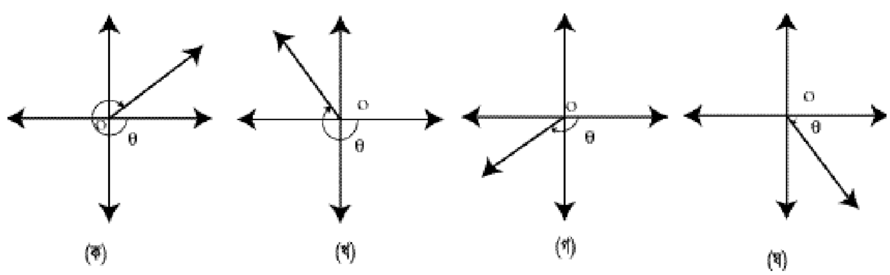
চিত্র : ২১.২

কোন ত্রিকোণমিতিক কোণ কোন চৌকণে অবস্থিত তা নিম্নের চিত্রগুলো হতে লক্ষ করুন। $<\theta$ কোণটি ধণাত্মক হলে অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরতে থাকলে–



চিত্র : ২১.৩

(ক) নং চিত্রের কোণটি ১ম চৌকণে, (খ) নং চিত্রের কোণটি দ্বিতীয় চৌকণে, (গ) নং চিত্রের কোণটি তৃতীয় চৌকণে এবং (ঘ) নং চিত্রের কোণটি ৪র্থ চৌকণে অবস্থিত।



চিত্র : ২১.৪

যদি θ ঋণাত্মক হয় অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরতে থাকে তাহলে (ক) নং চিত্রের কোণটি ১ম চৌকণে, (খ) নং চিত্রের কোণটি দ্বিতীয় চৌকণে, (গ) নং চিত্রের কোণটি তৃতীয় চৌকণে, (ঘ) নং চিত্রের কোণটি চতুর্থ চৌকণে অবস্থান করে। নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ চিহ্নিত করার পর ঘূর্ণায়মান রেখাটি যে প্রান্ত অবস্থানে অবস্থান করে সেই প্রান্ত অবস্থানকে প্রান্তিক রেখা বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর (*Radius Vector)* বলে।

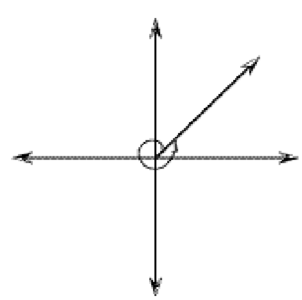
নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ চিহ্নিত করার পর ঘূর্ণায়মান রেখাটি যে প্রান্ত অবস্থানে অবস্থান করে তাকে প্রান্তিক রেখা বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

উদাহরণ 1 : 432^0 ও -555^0 কোণ দুইটি কোন্ কোন্ চৌকণে অবস্থান করবে?

সমাধান : আমরা জানি প্রতি চৌকণে কোণের পরিমাপ 90^0

এখন $432 \ = 4 \times 90 \ +72$

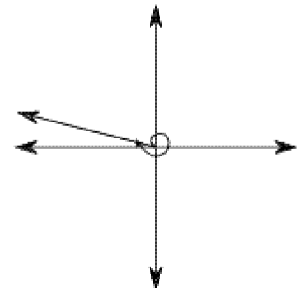
যেহেতু কোণটি ধণাত্মক, অতএব প্রান্তিক রেখা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরতে ঘুরতে চারটি চৌকণ অতিক্রম করে অবশিষ্ট 72 ১ম চৌকণে থাকবে। সুতরাং 432 কোণটি ১ম চৌকণে অবস্থান করবে।



চিত্র : ২১.৫

আবার –555 =-(6 X 90 +15)

এখানে কোণটি ঋণাত্মক বলে প্রান্তিক রেখাটি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরতে ঘুরতে ছয়টি চৌকণ অতিক্রম করবে এবং অবশিষ্ট 15   ২য় চৌকণে থাকবে। সুতরাং –555   কোণটি ২য় চৌকণে অবস্থান করবে।



চিত্র : ২১.৬

ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপ

সংজ্ঞানুসারে সমকোণের পরিমাপ হল স্থির বা ধ্রুব *(Constant)*। সমকোণকে মূল একক ধরে কোণ পরিমাপের জন্য ত্রিকোণমিতিতে সাধারণত তিন প্রকার একক ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতিগুলো হল :

(i) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesmal System)

(ii) শতমূলক পদ্ধতি (Centisimal System)

(iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

ত্রিকোণমিতিক কোন পরিমাপের পদ্ধতিগুলো হল : (i) ষাটমূলক পদ্ধতি, (ii) শতমূলক পদ্ধতি (iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি।

i) **ষাটমূলক পদ্ধতি :** এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 90 ভাগে ভাগ করে এক এক ভাগকে ডিগ্রি বলা হয়। প্রতি ডিগ্রিকে 60 মিনিটে এবং প্রতি মিনিটকে 60 সেকেন্ডে ভাগ করা হয়।

1 সমকোণ = 90   (নব্বই ডিগ্রি)

1   = 60   (ষাট মিনিট)

1' = 60" (ষাট সেকেন্ড)

ক্ষুদ্রতম ভাগগুলো 60 বলে এর নামকরণ ষাটমূলক হয়েছে। কোণ পরিমাপের এই একককে সাধারণ (Common) বা বৃটিশ পদ্ধতিও (British System) বলা হয়।

ii) **শতমূলক পদ্ধতি :** এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান একশত ভাগে ভাগ করে এক এক ভাগকে গ্রেড বলা হয়। প্রতি গ্রেডকে এক শতমূলক মিনিট এবং প্রতি শতমূলক মিনিটকে এক শতমূলক সেকেন্ডে ভাগ করা হয়।

1 সমকোণ = 100^g (একশত গ্রেড)

1^g = 100' (একশ শতমূলক মিনিট)

1' = 100" (একশ শতমূলক সেকেন্ড)

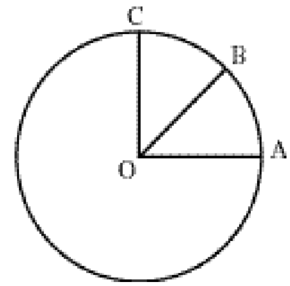
এই পদ্ধতিকে ফরাসি পদ্ধতিও বলা হয়।

***iii)* বৃত্তীয় পদ্ধতি :** এই পদ্ধতিতে মূল একক হল রেডিয়ান। একে 1^c চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ তার কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকেই বলা হয় এক রেডিয়ান। রেডিয়ান একটি ধ্রুব (Constant) কোণ।

প্রমাণ করুন রেডিয়ান একটি স্থির কোণ

প্রমাণ : মনে করুন O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r। এখন ব্যাসার্ধের সমান করে বৃত্তের পরিধি হতে AB বৃত্তচাপ অঙ্কন করুন। তাহলে সজ্ঞানুসারে $<AOB=1^c$.

এখন, OA সরলরেখার উপর OC লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে $<AOC=$এক সমকোণ এবং বৃত্তচাপ $AC=$ বৃত্তের পরিধির এক-চতুর্থাংশ$=\frac{1}{4}\ 2\pi r=\frac{\pi r}{2}$



চিত্র : ২১.৭

আমরা জানি, বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।

অতএব, $\frac{<AOB}{\text{বৃত্তচাপ } AB}=\frac{<AOC}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

বা, $\frac{<AOB}{<AOC}=\frac{\text{বৃত্তচাপ } AB}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

বা, $\frac{1^c}{\text{FT xoPTJe}}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}$

বা, $1^c=\frac{2}{\pi}$ x FT xoPTJe

যেহেতু π এবং সমকোণের মান ধ্রুব। অতএব রেডিয়ান একটি স্থির কোণ।

কোন পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক

(ক) ষাটমূলক ও শতমূলক এককের মধ্যে সম্পর্ক :

ষাটমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ $= 90°$

এবং শতমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ $= 100^g$

সুতরাং $90° = 100^g$

বা $9° = 10^g$

বা, $1°=\left(\frac{10}{9}\right)^g=1.11^g$ (k´J~)

আবার, $10^g = 9°$

$\therefore\ 1^g=\left(\frac{9}{10}\right)^0=0.9°$

(খ) ষাটমূলক, শতমূলক এবং বৃত্তীয় এককের মধ্যে সম্পর্ক :

বৃত্তীয় পদ্ধতিতে,

$1^c=\frac{2}{\pi}$ xoPTJe

বা, $1^c=\frac{180^0}{\pi}=\frac{180^0}{3.14159}=57^0 17' 44.8''$

আবার, $1^0=\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $=\frac{3.14159}{180}=0.0174533$ রেডিয়ান

কিন্তু অপর দুইটি পদ্ধতি অনুসারে,

2 সমকোণ $= 180^0 = 200^g$

বা, 2 সমকোণ $= 180^0 = 200^g = \pi^c$

বা, 1 সমকোণ $= 90^0 = 100^g = \frac{\pi^c}{2}$

মনে করুন, একটি নির্দিষ্ট কোণের পরিমাণকে ষাটমূলক, শতমূলক এবং বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D ডিগ্রি, G গ্রেড এবং θ রেডিয়ানে নির্দেশ করা হল।

তাহলে যেহেতু, $180° = \pi^c$

$\therefore D° = \frac{\pi}{180} \infty D$ রেডিয়ান

আবার যেহেতু, $200^g = \pi^c$

$\therefore G^g = \frac{\pi}{200} \text{ X } G$ রেডিয়ান

সুতরাং $\frac{\pi D}{180} = \frac{\pi G}{200} = \theta$

$\therefore \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{\theta}{\pi}$

উদাহরণ 2 : 37.538 কে ডিগ্রি মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করুন।

সমাধান : আমরা জানি, $1° = 60'$

$\therefore (0.538)° = (0.538 \text{ X } 60)'$

$=32.28'$

আবার, $1' = 60''$

$\therefore 0.28' = (0.28 \infty 60)'' = 16.8''$

সুতরাং $37.538^0 = 37^0 32' 16.8''$

উদাহরণ 3 : $156° 5'15''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধান : $15'' = \frac{15'}{60} = \frac{1'}{4}$

$\therefore 5'15''=5\frac{1'}{4} = \frac{21'}{4} = \frac{21}{4 \text{ X } 60}^o = \frac{21°}{240}$

অতএব, $156°5'5'' = 156\frac{21°}{240}$

$= \frac{37461}{240}^0$

$= \frac{37461}{240 \text{ X } 90}$ সমকোণ

$= \frac{\pi}{2} \text{ X } \frac{37461}{240 \text{ X } 90}$ রেডিয়ান

$= \frac{12487\pi^c}{14400}$

$=0.867\pi^c$ (প্রায়)

উদাহরণ 4 : দুইটি কোণের সমষ্টি 120° এবং তাদের অন্তর $\frac{\pi^c}{5}$ রেডিয়ান।

তাদের বৃত্তীয় পরিমাপ কত?

সমাধান : মনে করুন, কোন দুইটি x এবং y

এখন $120° = \left(\frac{\pi^c}{180} \text{ X } 120\right) = \frac{2\pi^c}{3}$

সুতরাং, শর্তমতে, $x+y = \frac{2\pi^c}{3}$ .... (i)

এবং $x-y = \frac{\pi^c}{5}$ .... (2)

(i) ও (2) যোগ করে পাই,

$$2x = \frac{2\pi^c}{3} + \frac{\pi^c}{5} = \frac{10\pi^c+3\pi^c}{15} = \frac{13\pi^c}{15}$$

$$\therefore x = \frac{13\pi^c}{30}$$

আবার, (i) ও (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$2y = \frac{2\pi^c}{3} - \frac{\pi^c}{5} = \frac{10\pi^c-3\pi^c}{15} = \frac{7\pi^c}{15}$$

$$\therefore y = \frac{7\pi^c}{30}$$

$\therefore$ কোণ দুইটি $\frac{13\pi^c}{30}$ এবং $\frac{7\pi^c}{30}$

উদাহরণ 5 : কোন ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 3 ঃ 4 ঃ 5, কোণগুলোকে রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধান : মনে করুন, ত্রিভুজের একটি কোণ $3x$

অতএব শর্তমতে ত্রিভুজের অপর কোণগুলো $4x$ ও $5x$

আমরা জানি ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = $180^0 = \pi^c$

$\therefore 3x+4x+5x = \pi^c$

বা, $12x = \pi^c$

$$\therefore x = \frac{\pi^c}{12}$$

$\therefore$ প্রথম কোণটি $=3x = 3 \infty \frac{\pi^c}{12} = \frac{\pi^c}{4}$

দ্বিতীয় কোণটি $=4x = 4 \infty \frac{\pi^c}{12} = \frac{\pi^c}{3}$

তৃতীয় কোণটি = $5x = 5 \infty \frac{\pi^c}{12} = \frac{5\pi^c}{12}$

অনুশীলনী-২১.১

1. প্রদত্ত কোণগুলো কোন চৌকণে অবস্থিত তা নির্ণয় করুন।

   $370^0, 415^0, -465^0, -4000^0$

2. প্রদত্ত কোণগুলোকে রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

   $135°, 72^0 30', 115^0 33'45'', 20^0 15'30''$

3. প্রদত্ত কোণগুলোকে ডিগ্রিতে প্রকাশ করুন।

   $\frac{\pi^c}{6}, \frac{7\pi^c}{20}, \frac{3\pi^c}{5}, \frac{5\pi^c}{16}$

4. দুইটি কোণের সমষ্টি 1^c ও অন্তর 1^0. কোণ দুইটিকে ডিগ্রি ও রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

5. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 1 ঃ 2 ঃ 3, কোণ তিনটিকে ডিগ্রি ও রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

6. একটি কোণের ডিগ্রিতে পরিমাপ $D°$ এবং রেডিয়ানে পরিমাপ R^c হলে

   দেখান যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

পাঠ ২ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

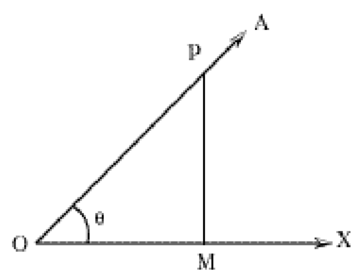
1 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধারণা লাভ করবেন;

1 অনুপাতগুলোর পারস্পারিক সম্পর্ক নির্ণয় ও ব্যবহার করতে পারবেন;

1 কতিপয় সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

চিত্রে $<XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। ধরুন কোণটি θ। OA বাহুতে যে কোন একটি বিন্দু P নিন। P বিন্দু হতে OX এর উপর PM লম্ব আঁকুন। তাহলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM উৎপন্ন হল।



চিত্র : ২১.৮

এখন ΔPOM এর তিনটি বাহু OP, OM ও PM নিয়ে ছয়টি অনুপাত গঠন করা যায়। অনুপাতগুলো :

$\frac{PM}{OP}, \frac{OM}{OP}, \frac{PM}{OM}, \frac{OP}{PM}, \frac{OP}{OM}, \frac{OP}{PM}$

এই অনুপাতগুলোকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয়।

$<XOA$ অর্থাৎ θ কোণের প্রেক্ষিতে সমকোণী ত্রিভুজ POM এর PM বাহুকে লম্ব, OM বাহুকে ভূমি এবং OP বাহুকে অতিভুজ বলে উলেখ করা হয়। তাহলে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে নিম্নোক্তভাবে অভিহিত করা হয় :

$\frac{PM}{OP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = sine\theta$ (θকোণের সাইন) বা সংক্ষেপে $sin\theta$

$\frac{OM}{OP} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = cosine\theta$ (θ কেণের কোসাইন) বা সংক্ষেপে $cos\theta$

$\frac{PM}{OM} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = tangent\theta$ (θ কোণের ট্যানজেন্ট) বা সংক্ষেপে $tan\theta$

$\frac{OM}{PM} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = cotangent\theta$ (θ কোণের কোট্যানজেন্ট) বা সংক্ষেপে $cot\theta$

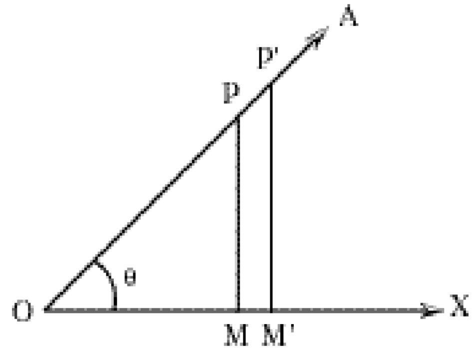
$\frac{OP}{OM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = secant\ \theta$ (θ কোণের সেকেন্ট) বা সংক্ষেপে $sec\theta$

$\frac{OP}{PM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = cosecant\theta$ (θ কোণের কোসেকেন্ট) বা সংক্ষেপে $cosec\theta$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা

একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ধ্রব।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত OA বাহুতে P বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। OA বাহুতে অপর একটি বিন্দু P' নিন এবং P' বিন্দু হতে OX বাহুর উপর লম্ব $P'M'$ অঙ্কন করুন।



চিত্র : ২১.৯

অতএব, ΔPOM এবং $\Delta P'OM'$ দুইটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ।

সেহেতু ΔPOM এবং $\Delta P'OM'$ সদৃশ।

$\therefore \frac{PM}{PM'} = \frac{OP}{OP'}$ অর্থাৎ $\frac{PM}{OP} = \frac{PM'}{OP'}$ বা, $\frac{OP}{PM} = \frac{OP'}{PM'}$

অনুরূপভাবে,

$\frac{OM}{OM'} = \frac{OP}{OP'}$ অর্থাৎ $\frac{OM}{OP} = \frac{OM'}{OP'}$ বা, $\frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'}$

$\frac{PM}{P'M'} = \frac{OM}{OM'}$ অর্থাৎ $\frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'}$ বা, $\frac{OM}{PM} = \frac{OM'}{P'M'}$

সুতরাং $<XOA = \theta$ হলে

$sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}$, $cosec\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{OP'}{P'M'}$

$cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{OM'}{OP'}$, $sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'}$

$tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'}$, $cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{OM'}{P'M'}$

সুতরাং নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ধ্রুবক।

নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ধ্রুবক।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমা

মনে করুন, $<POM = \theta$ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $PM \perp OM$

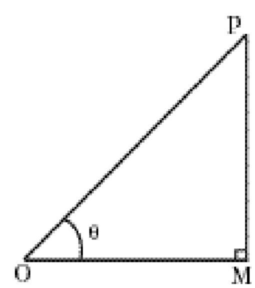
(i) θ কোণের প্রত্যেক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ΔPOM-এর দুইটি বাহুর অনুপাত। সুতরাং এরূপ প্রত্যেক অনুপাত একটি ধণাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

(ii) ΔPOM-এ অতিভুজ OP বৃহত্তম বাহু।

সুতরাং $PM<OP$ এবং $OM<OP$

বা, $\frac{PM}{OP} < 1$ এবং $\frac{OM}{OP} < 1$ [OP দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

অর্থাৎ $sin\theta<1$ এবং $cos\theta < 1$



চিত্র : ২১.১০

আবার $\frac{OP}{PM} > 1$ এবং $\frac{OP}{OM} > 1$

অর্থাৎ $cosec\theta > 1$ এবং $sec\theta > 1$

(iii) ΔPOM-এ যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

সুতরাং $PM + OM > OP$

বা, $\frac{PM}{OP} + \frac{OM}{OP} > 1$ *[OP* দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে*]*

অর্থাৎ $sin\theta + cos\theta > 1$

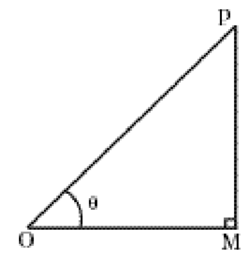
ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পারিক সম্পর্ক

চিত্রে $<POM = \theta$

অতএব সংজ্ঞানুযায়ী,

(i) $sin\theta = \frac{PM}{OP}$ এবং $cosec\theta = \frac{OP}{PM}$

$\therefore sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{1}{\frac{OP}{PM}} = \frac{1}{cosec\theta}$ FmÄ $cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}$



চিত্র : 21.11

(ii) $cos\theta = \frac{OM}{OP}$

এবং $sec\theta = \frac{O\Pi}{OM}$

$\therefore cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$ এবং $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$

(iii) $tan\theta = \frac{PM}{OM}$ এবং $cot\theta = \frac{OM}{PM}$

$\therefore tanq = \frac{1}{cot\theta}$ এবং $cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$

iv) $tan\theta = \frac{PM}{OM}$

$= \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ [লব ও হর উভয়কে *OP* দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}$

অনুরূপভাবে, $cot\theta = \frac{cos\theta}{sin\theta}$

(v) পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী

$PM^2+OM^2=OP^2$ [চিত্র ২১.১১ হতে]

বা, $\frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$ [উভয় পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = 1$

বা, $(sin\theta)^2+(cos\theta)^2 = 1$

বা, $sin^2\theta+cos^2\theta = 1$

$sin^2\theta$ দ্বারা $sin\theta$ এর বর্গ বুঝায় অর্থাৎ $sin^2\theta = (sin\theta)^2$

(vi) $PM^2+OM^2 = OP^2$

বা, $\frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2} = \frac{OP^2}{OM^2}$ [OM^2 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

বা, $\left(\frac{PM}{OM}\right)^2 + 1 = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$

বা, $(tan\theta)^2 +1 = (sec\theta)^2$

বা, $sec^2\theta = 1+tan^2\theta$

(vi) আবার, $PM^2+OM^2 = OP^2$

বা, $\frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2} = \frac{OP^2}{PM^2}$ [PM^2 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

বা, $1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2 = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2$

বা, $1 + (cot\theta)^2 = (cosec\theta)^2$

বা, $cosec^2\theta = 1 + cot^2\theta$

উদাহরণ 1 : θ সূক্ষ্মকোণ এবং $tan\theta = \frac{a}{b}$ হলে, $sin\theta$ এ $cos\theta$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $tan\theta = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{sin\theta}{cos\theta} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{sin^2\theta}{1-sin^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $b^2 sin^2\theta = a^2 (1-sin^2\theta)$

বা, $b^2 sin^2\theta = a^2-a^2 sin^2\theta$

বা, $a^2 sin^2\theta + b^2 sin^2\theta = a^2$

বা, $sin^2\theta (a^2+b^2) = a^2$

বা, $sin^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2}$

$\therefore sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

আবার, $cos^2\theta = 1 -sin^2\theta$

বা, $cos^2\theta = 1 -\frac{a^2}{a^2+b^2}$

বা, $cos^2\theta = \dfrac{a^2+b^2-a^2}{a^2+b^2}$

বা, $cos^2\theta = \dfrac{b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore\ cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

উদাহরণ 2 : $sinA = \dfrac{12}{13}$ হলে $cotA$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $cotA = \dfrac{cosA}{sinA}$

$$= \pm\frac{\sqrt{1-sin^2A}}{sinA}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1-\frac{144}{169}}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{\frac{169-144}{169}}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{\frac{25}{169}}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm\frac{5}{12}$$

উদাহরণ 3 : প্রমাণ করুন $\dfrac{1}{1+tan^2A} + \dfrac{1}{1+cot^2A} = 1$

সমাধান : $\dfrac{1}{1+tan^2A} + \dfrac{1}{1+cot^2A}$

$$= \frac{1}{1+tan^2A} + \frac{1}{1+\frac{1}{tan^2A}}$$

$$= \frac{1}{1+tan^2A} + \frac{1}{\frac{1+tan^2A}{tan^2A}}$$

$$= \frac{1}{1+tan^2A} + \frac{tan^2A}{1+tan^2A}$$

$$= \frac{1+tan^2A}{1+tan^2A}$$

$$= 1$$

উদাহরণ 4 : প্রমাণ করুন $(1+tanA-secA)\ (1+cotA+cosecA) = 2$

সমাধান : $(1+tanA - secA)\ (1+cotA - cosecA)$

$$= \left(1+\frac{sinA}{cosA} - \frac{1}{cosA}\right)\left(1+\frac{cosA}{sinA} + \frac{1}{sinA}\right)$$

$$= \left(\frac{cosA+sinA-1}{cosA}\right)\left(\frac{sinA+cosA+1}{sinA}\right)$$

$$= \frac{(cosA+sinA)^2-(1)^2}{cosAsinA}$$

$$= \frac{cos^2A+sin^2A+2cosAsinA-1}{cosA\ sinA}$$

$$= \frac{1+2cosAsinA-1}{cosA\ sinA}$$

$$= \frac{2cosA\ sinA}{cosA\ sinA} = 2$$

উদাহরণ 5 : প্রমাণ করুন $\frac{cosecA}{cosecA-1} + \frac{cosecA}{cosecA+1} = 2sec^2A$

সমাধান : $\frac{cosecA}{cosecA-1} + \frac{cosecA}{cosecA+1}$

$$= \frac{cosecA(cosecA+1)+cosecA(cosecA-1)}{(cosecA-1)\ (cosecA+1)}$$

$$= \frac{cosec^2A+cosecA+cosec^2A-cosecA}{cosec^2A-1}$$

$$= \frac{2\ cosec^2A}{cot^2A}$$

$$= \frac{2\ \frac{1}{sin^2A}}{\frac{cos^2A}{sin^2A}}$$

$$= \frac{2}{cos^2A} = 2sec^2A.$$

উদাহরণ 6 : প্রমাণ করুন $sin^4\theta - cos^4\theta = sin^2\theta - cos^2\theta$

সমাধান : $sin^4\theta - cos^4\theta$

$= (sin^2\theta)^2 - (cos^2\theta)^2$

$= (sin^2\theta + cos^2\theta)\ (sin^2\theta - cos^2\theta)$

$= 1\ (sin^2\theta - cos^2\theta)$

$= sin^2\theta - cos^2\theta$

উদাহরণ 7 : প্রমাণ করুন $(tan\theta + sec\theta)^2 = \frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}$

সমাধান : $(tan\theta + sec\theta)^2$

$= \left(\frac{sin\theta}{cos\theta} + \frac{1}{cos\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1+sin\theta}{cos\theta}\right)^2$

$= \frac{(1+sin\theta)^2}{cos^2\theta}$

$= \frac{(1+sin\theta)^2}{1-sin^2\theta}$

$= \frac{(1+sin\theta)^2}{(1+sin\theta)\ (1-sin\theta)}$

$= \frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}$

উদাহরণ 8 : প্রমাণ করুন $\sqrt{\frac{secA+1}{secA-1}} = cotA + cosecA$

সমাধান : $\sqrt{\frac{secA+1}{secA-1}}$

$= \frac{(\sqrt{secA+1})\ (\sqrt{secA+1})}{(\sqrt{secA-1})\ (\sqrt{secA+1})}$ [লব ও হর উভয়কে $\sqrt{secA+1}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(\sqrt{secA+1})^2}{\sqrt{sec^2A-1}}$

$= \frac{secA+1}{\sqrt{tan^2A}}$

$= \frac{secA + 1}{tanA}$

$= \frac{secA}{tanA} + \frac{1}{tanA}$

$= \frac{\frac{1}{cosA}}{\frac{sinA}{cosA}} + cotA$

$= \frac{1}{sinA} + cotA$

$= cosecA + cotA$

উদাহরণ 9 : $cosA+sinA = \sqrt{2}\ cosA$ হলে দেখান যে, $cosA-sinA = \sqrt{2}\ sinA$

সমাধান : $cosA+sinA = \sqrt{2}\ cosA$

বা, $sinA = \sqrt{2}\ cosA - cosA$

বা, $sinA = cosA\ (\sqrt{2}-1)$

বা, $cosA = \dfrac{sinA}{\sqrt{2}-1}$

বা, $cosA = \dfrac{sinA\ (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\ (\sqrt{2}+1)}$

বা, $cosA = \dfrac{\sqrt{2}\ sinA+sinA}{2-1}$

বা, $cosA = \sqrt{2}\ sinA + sinA$

$\therefore\ cosA - sinA = \sqrt{2}\ sinA$

উদাহরণ 10 : যদি $tanA+sinA = m$ এবং $tanA-sinA = n$ হয়, তবে প্রমাণ করুন

$m^2-n^2 = 4\sqrt{mn}$

সমাধান : $4\sqrt{mn}$

$= 4\sqrt{(tanA+sinA)\ (tanA-sinA)}$

$= 4\sqrt{tan^2A-sin^2A}$

$= 4\sqrt{tan^2A\left(1-\dfrac{sin^2A}{tan^2A}\right)}$

$= 4\sqrt{tan^2\ (1-cos^2A)}$

$= 4\sqrt{tan^2A\ sin^2A}$

$= 4\ tanA\ sinA$

$= (tanA+sinA)^2 - (tanA-sinA)^2\ [\because 4ab = (a+b)^2-(a-b)^2]$

$= m^2-n^2$

উদাহরণ 11 : যদি $a^2sec^2\theta$ - $b^2tan^2\ \theta = c^2$ হয়, তবে দেখান যে,

$cosec\theta = \pm\sqrt{\dfrac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}$

সমাধান : $a^2\ sec^2\theta-b^2\ tan^2\theta = c^2$

বা, $a^2\ sec^2\theta - b^2(sec^2\theta-1) = c^2$

বা, $a^2\ sec^2\theta-b^2sec^2\theta+b^2 = c^2$

বা, $sec^2\theta\ (a^2-b^2) = c^2-b^2$

বা, $sec^2\theta = \dfrac{c^2-b^2}{a^2-b^2}$

$\therefore\ cos^2\theta = \dfrac{a^2-b^2}{c^2-b^2}$

বা, $1-sin^2\theta = \dfrac{a^2-b^2}{c^2-b^2}$

বা, $sin^2\theta = 1-\dfrac{a^2-b^2}{c^2-b^2}$

বা, $sin^2\theta = \dfrac{c^2-b^2-a^2+b^2}{c^2-b^2}$

বা, $sin^2\theta = \dfrac{c^2-a^2}{c^2-b^2}$

বা, $cosec^2\theta = \dfrac{c^2-b^2}{c^2-a^2}$

$\therefore\ cosec\theta = \pm\sqrt{\dfrac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}$

অনুশীলনী ২১.২

1. $cot\theta = \dfrac{12}{5}$ হলে, $sin\theta$ এবং $cos\theta$ এর মান কত?

2. $cosec\theta = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ হলে, $cos\theta$ এবং $tan\theta$ এর মান কত?

3. $cosA = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ হলে, প্রমাণ করুন $a\ sinA = b\ cosA$

4. $cos\theta-sin\theta = \sqrt{2}\ sin\theta$ হলে, প্রমাণ করুন $cos\theta+sin\theta = \sqrt{2}\ cos\theta$

প্রমাণ করুন :

5. (i) $\dfrac{1}{1+sin^2A} + \dfrac{1}{1+cosec^2A} = 1$

   (ii) $\dfrac{1}{1+cos^2A} + \dfrac{1}{1+sec^2A} = 1$

   (iii) $\dfrac{1}{2-sin^2A} + \dfrac{1}{2+tan^2A} = 1$

   (iv) $\dfrac{sinA}{cosecA} + \dfrac{cosA}{secA} = 1$

   (v) $\dfrac{secA}{cosA} - \dfrac{tanA}{cotA} = 1$

6. $tan\theta\sqrt{1-sin^2\theta} = sin\theta$

7. $\sqrt{\dfrac{1+cos\theta}{1-cos\theta}}-\sqrt{\dfrac{1-cos\theta}{1+cos\theta}} = 2\ cot\theta$

8. $\dfrac{1}{1+sinA} + \dfrac{1}{1-sinA} = 2\ sec^2A$

9. $cot^4A + cot^2A = cosec^4A - cosec^2A$

10. $\dfrac{cos\theta+cos\varphi}{sin\theta-sin\varphi} = \dfrac{sin\theta+sin\varphi}{cos\theta-cos\varphi}$

11. $\sqrt{\dfrac{1-sinA}{1+sinA}} = secA - tanA$

12. $\sqrt{\dfrac{1+sin\theta}{1-sin\theta}} - sec\theta = sec\theta - \sqrt{\dfrac{1-sin\theta}{1+sin\theta}}$

13. $\dfrac{sinA-sinB}{cosA+cosB} + \dfrac{cosA-cosB}{sinA+sinB} = 0$

14. $\dfrac{sinA-cosA+1}{sinA+cosA-1} = \dfrac{1+sinA}{cosA}$

15. যদি, $sin^2A+sin^4A = 1$ হয়, হবে প্রমাণ করুন, $tan^4A-tan^2A = 1$

16. যদি $sinA+cosA = a$ এবং $secA+cosecA = b$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $b(a^2-1) = 2a$

17. যদি $a\ cos^2\theta + b\ sin^2\theta = c$ হয় তবে দেখান যে $tan\theta = \pm\sqrt{\dfrac{c-a}{b-c}}$

18. θ এবং φ সূক্ষ্মকোণ এবং $sin\theta = \dfrac{3}{5}$ এবং $cos\varphi = \dfrac{12}{13}$ হলে $\dfrac{tan\theta - tan\varphi}{1+tan\theta tan\varphi}$ এর মান নির্ণয় করুন।

পাঠ ৩ বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- কতিপয় বিশেষ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো জানবেন এবং তা প্রমাণে দক্ষতা অর্জন করবেন;
- অনুপাতগুলো প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

45^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাশের চিত্রে $<XOA = 45^\circ$, OA বাহুতে P যে কোন বিন্দু এবং P হতে OX বাহুতে PM লম্ব।

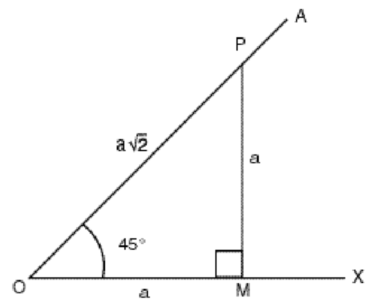
এখন, $<POM=45^\circ$, $<PMO = 45$

$\therefore <OPM = 45^\circ$

সুতরাং $OM=PM$

ধরুন $OM=PM=a$

$\therefore OP = \sqrt{OM^2+PM^2} = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$



চিত্র : ২১.১২

এখন, $sin45^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$cos45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$tan45^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$

$cot45^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{a}{a} = 1$

$sec45^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$cosec45^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

30° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাশের চিত্রে $<XOA = 30^\circ$

OA বাহুতে P যে কোন বিন্দু এবং P হতে OX বাহুতে PM লম্ব।

এখন, $<POM = 30^\circ$, $<PMO = 30^\circ$

$\therefore <OPM = 60^\circ$

এখন, PM কে P' পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন $P'M=PM$ হয়।

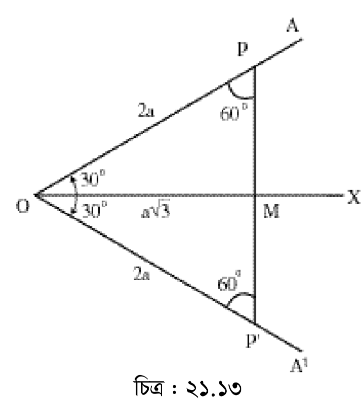
P', O যোগ করুন।

এখন, $\Delta POM = \Delta P'OM$

অতএব, $<POM = <P'OM = 30^\circ$

এবং $<OPM = <OP'M = 60^\circ$

$\therefore \Delta OPP'$ সমবাহু ত্রিভুজ



চিত্র : ২১.১৩

ধরুন $PM = a$, অতএব $PP' = 2PM = 2a$

$\therefore\ OP = OP' = 2a$

এখন, $OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

$= \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

$\therefore\ \sigma\iota\nu 30^0 = \frac{\Pi M}{O\Pi} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$

$\chi o\sigma 30^\circ = \frac{OM}{O\Pi} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tau\alpha\nu 30^\circ = \frac{\Pi M}{OM} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\chi o\tau 30^\circ = \frac{OM}{\Pi M} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{\alpha} = \sqrt{3}$

$\sigma\varepsilon\chi 30^\circ = \frac{O\Pi}{OM} = \frac{2\alpha}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\chi o\sigma\varepsilon\chi 30^\circ = \frac{O\Pi}{\Pi M} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2$

Iϑμϑρ, $\sigma\iota\nu 60^\circ = \frac{OM}{O\Pi} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\chi o\sigma 60^\circ = \frac{\Pi M}{O\Pi} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$

$\tau\alpha\nu 60^\circ = \frac{OM}{\Pi M} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{\alpha} = \sqrt{3}$

$\chi o\tau 60^\circ = \frac{\Pi M}{OM} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sigma\varepsilon\chi 60^\circ = \frac{O\Pi}{\Pi M} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2$

$\chi o\sigma\varepsilon\chi 60^\circ = \frac{O\Pi}{OM} = \frac{2\alpha}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

শূন্য কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

শূন্য কোণের আদিবাহু ও প্রান্তিক রেখা অভিন্ন। এক্ষেত্রে $P(x,y)$ বিন্দু $X'OX$ অক্ষে মূলবিন্দুর ডান পার্শ্বে অবস্থিত। ফলে $x=r,\ y=0$.

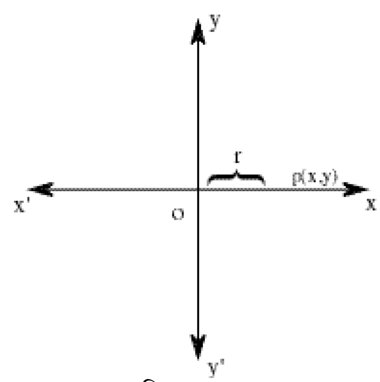
$\therefore\ sin0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{r} = 0$

$cos0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$

$tan0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{r} = 0$

$sec0^\circ = \frac{r}{x} = \frac{r}{r} = 1$

এখানে, $cot0^\circ$ এবং $cosec0^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়, কেননা, $y = 0$



চিত্র : ২১.১৪

সমকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

সমকোণের ক্ষেত্রে প্রান্তবাহু OY বরাবর এবং $P(x, y)$ বিন্দু $YO\acute{Y}$ - অক্ষে মূলবিন্দুর উপরদিকে অবস্থিত।

ফলে $x = 0$ এবং $y = r$

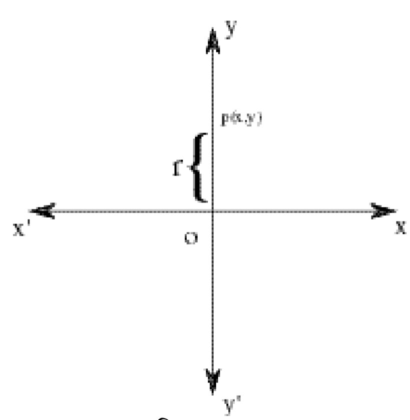
সুতরাং $sin90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$

$cos90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$

$cot90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{r} = 0$

$cosec\ 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{r}{r} = 1$

এখানে, $tan90^\circ$ ও $sec90^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়, কেননা $x = 0$

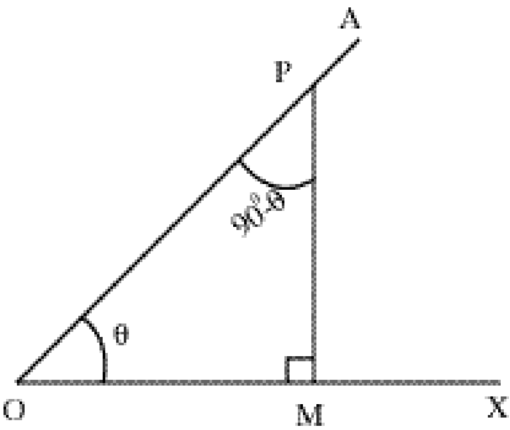


চিত্র : ২১.১৫

পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পূরক কোণ : দুইটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে তাদের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলে। যেমন, কোণ 30° ও 60° এবং 15° কোণ ও 75° কোণ একে অপরের পূরক কোণ।

ধরুন $<XOA = \theta$, এখন OA বাহুতে P যে কোন বিন্দু এবং P হতে OX এর উপর PM লম্ব।



চিত্র : ২১.১৬

$\therefore <POM = \theta + <PMO = 90^\circ$

যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ এবং ΔOPM সমকোণী ত্রিভুজ।

অতএব $<POM + <OPM = 1$ সমকোণ

বা, $\theta + <OPM = 90^\circ$

$\therefore <OPM = 90^\circ - \theta$

$\therefore sin(90^\circ - \theta) = \dfrac{OM}{OP} = cos <POM = cos\theta$

$cos(90^\circ - 0) = \dfrac{PM}{OP} = sin <POM = sin\theta$

$tan\ (90^\circ - 0) = \dfrac{OM}{PM} = cot <POM = cot\theta$

$cot\ (90^\circ - \theta) = \dfrac{PM}{OM} = tan <POM = tan\theta$

$sec\ (90^\circ - \theta) = \dfrac{OP}{PM} = cosec <POM = cosec\theta$

$cosec\ (90^\circ - \theta) = \dfrac{OP}{OM} = sec <POM = sec\theta$

উপরে আলোচিত বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নিম্নে দেওয়া হল :

কোণ অনুপাত	0°	30°	45°	60°	90°
$sine\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cosine\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$tangent\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
$cotangent\theta$	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$secant\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
$cosecant\theta$	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

উদাহরণ 1 : $sin^3 30^\circ + 4cot^2 45^\circ - sec^2 60^\circ$ এর মান কত?

সমাধান : $sin^3 30^\circ + 4cot^2 45^\circ - sec^2 60^\circ$

$= (sin 30^\circ)^3 + 4(cot 45^\circ)^2 - (sec 60^\circ)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4.(1)^2 - (2)^2$

$= \frac{1}{8} + 4 - 4$

$= \frac{1}{8}$

উদাহরণ 2 : মান নির্ণয় করুন

$(sin30^\circ + sin45^\circ)\ (cos60^\circ - cos45^\circ) + \frac{1}{4}$

সমাধান : $(sin30^\circ + sin45^\circ)\ (cos60^\circ - cos45^\circ) + \frac{1}{4}$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1-2+1}{4}$

$= \frac{2-2}{4}$

$= 0$

উদাহরণ 3 : দেখান যে, $cos3A = 4cos^3A - 3cosA,$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

সমাধান : বামপক্ষ $= cos3A$

$= cos3.30^\circ = cos90^\circ = 0$

ডানপক্ষ $= 4cos^3A - 3cosA$

$= 4\ (cosA)^3 - 3cosA$

$= 4\ (cos30^\circ)^3 - 3.\ cos30^\circ$

$= 4 . \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 4.\ \frac{3.\sqrt{3}}{8} - \frac{3.\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3.\sqrt{3}}{2} - \frac{3.\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 4 : যদি $tan^2\frac{\pi}{4} - cos^2\frac{\pi}{3} = x\ sin\frac{\pi}{4}\ cos\frac{\pi}{4}\ tan\frac{\pi}{3}$ হয় তবে x -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $tan^2\frac{\pi}{4} - cos^2\frac{\pi}{3} = x\ sin\frac{\pi}{4}\ cos\frac{\pi}{4}\ tan\frac{\pi}{3}$

বা, $tan^2\frac{180^\circ}{4} - cos^2\frac{180^\circ}{3} = x\ sin\ \frac{180^\circ}{4}\ cos\frac{180^\circ}{4}\ tan\frac{180^\circ}{3}$

বা, $tan^245^\circ - cos^260^\circ = x\ sin45^\circ\ cos45^\circ\ tan60^\circ$

বা, $(tan45^\circ)^2 - (cos60^\circ)^2 = x\ sin45^\circ\ cos45^\circ\ tan60^\circ$

বা, $(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x. \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}$

বা, $1 - \frac{1}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

বা, $\frac{4-1}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

বা, $\frac{3}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

বা, $x = \frac{3}{4} \infty \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

উদাহরণ 5 : দেখান যে, $tan2A = \frac{2tanA}{1-tan^2A}$, যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান : বামপক্ষ = $tan2A$

$= tan\ 2.30° = tan60° = \sqrt{3}$

ডানপক্ষ = $\frac{2\ tanA}{1-tan^2A}$

$= \frac{2\ tan30°}{1-(tan30°)^2} = \frac{2.\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \infty \frac{3}{2}$

$= \sqrt{3}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 6 : সমাধান করুন $cos^2\theta - sin^2\theta = 2-5cos\theta$, যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান : $cos^2\theta - sin^2\theta = 2-5cos\theta$

বা, $cos^2\theta - (1-cos^2\theta) = 2-5cos\theta$

বা, $cos^2\theta - 1 + cos^2\theta - 2 + 5cos\theta = 0$

বা, $2cos^2\theta + 5cos\theta - 3 = 0$

বা, $2cos^2\theta + 6cos\theta - cos\theta - 3 = 0$

বা, $2cos\theta\ (cos\theta + 3) - 1(cos\theta + 3) = 0$

বা, $(cos\theta + 3)\ (2cos\theta - 1) = 0$

$\therefore\ cos\theta + 3 = 0$

এখানে $cos\theta = -3$ গ্রহণযোগ্য নয় | অথবা, $2cos\theta - 1 = 0$

$\therefore\ \theta = 60^0$

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 60^0$

বা, $2cos\theta = 1$

বা, $2cos\theta = 1$

বা, $cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $cos\theta = cos60^0$

$\therefore\ \theta = 60^0$

উদাহরণ 7 : সমাধান করুন $\sqrt{3}\ (tan\theta + cot\theta) = 4$ যখন $0° \le \theta \le 90°$

সমাধান : $\sqrt{3}\ (tan\theta + cot\theta) = 4$

বা, $\sqrt{3}\left(tan\theta + \frac{1}{tan\theta}\right) = 4$

বা, $\sqrt{3}\left(\frac{tan^2\theta + 1}{tan\theta}\right) = 4$

বা, $\sqrt{3}\ (tan^2\theta + 1) = 4tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\ tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\ tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\ tan^2\theta - 4tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\ tan^2\theta - 3tan\theta - tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $(\sqrt{3}\ tan\theta - 1)\ (tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

হয় $\sqrt{3}\ tan\theta - 1 = 0$ অথবা, $tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = tan30°$ $\therefore\ tan\theta = \sqrt{3} = tan60°$

$\therefore\ \theta = 30°$ $\therefore\ \theta = 60°$

যেহেতু θ এর মান $0°$ হতে $90°$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ

$\therefore\ \theta = 30^\circ, 60^\circ$

অনুশীলনী-২১.৩

মান নির্ণয় করুন–

1. $5\,sin 90^\circ + 3\,cos 0^\circ - 6\,tan 45^\circ - sec^2 45^\circ$
2. $2tan^2\dfrac{\pi}{3} + sin^2\dfrac{\pi}{6} - sec^2\dfrac{\pi}{4}$
3. $3tan^2\dfrac{\pi}{4} - sin^2\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2}cot^2\dfrac{\pi}{6}$
4. $4\,tan^2 45^\circ - cosec^2 30^\circ - cos^3 60^\circ$
5. $tan^2 45^\circ.\ sin 60^\circ.\ tan 30^\circ.\ tan^2 60^\circ$

প্রমাণ করুন :

6. যদি $\theta = 45^\circ$ হয় তবে

   (*i*) $sin 2\theta = 2\,sin\theta\,cos\theta$

   (*ii*) $cos 2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$
7. যদি $A = 30^0$ হয় তবে প্রমাণ করুন, $sin 2A = \dfrac{2tanA}{1+tan^2 A}$
8. $\sqrt{\dfrac{1+cos 30^\circ}{1-cos 30^\circ}} = sec 60^\circ + tan\,60^\circ$
9. $\dfrac{1+2sin 60^\circ.cos 60^\circ}{sin 60^\circ + cos 60^\circ} + \dfrac{1-2sin 60^\circ\,cos 60^\circ}{sin 60^\circ - cos 60^\circ} = 2\,cos 30^\circ$

সমাধান করুন :

10. $sin\theta + cos\theta = 1$ যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
11. $sin\theta + cos\theta = \sqrt{2}$ যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
12. $tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\,tan\theta + \sqrt{3} = 0$ যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
13. $sec^2\theta = 2tan\theta$, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

পাঠ ৪ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

1 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

ভূরেখা, উর্ধ্বরেখা ও উলম্ব তল

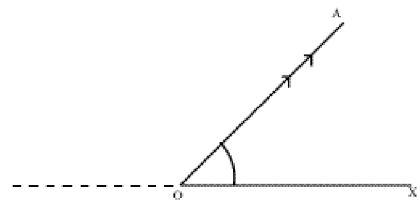
ভূমিতলে অবস্থিত যে কোন সরলরেখাকে ভূরেখা বলা হয়। ভূরেখাকে শয়নরেখাও বলে।

ভূমিতলের উপর লম্ব যে কোন রেখাকে ঊর্ধ্বরেখা বা উলম্বরেখা বলে।

পরস্পরচ্ছেদী ভূরেখা ও ঊর্ধ্বরেখা ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত একটি তল নির্দেশ করে। ঐ তলকে উলম্ব তল বলে।

উন্নতি কোণ

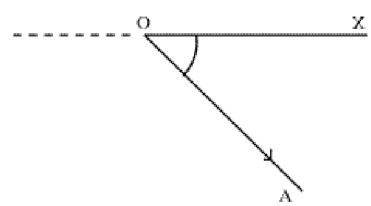
২১.১৭ চিত্রে, OX রেখাটি ভূরেখায় সমান্তরাল। O, A, X একই উলম্ব তলে এবং A, OX রেখার উপর অবস্থিত। এখানে O বিন্দু হতে দৃষ্ট বিন্দু A, ফলে $<XOA$-ই O বিন্দুতে A বিন্দুর উন্নতি কোণ।



চিত্র : ২১.১৭

অবনতি কোণ

২১.১৮ নং চিত্রে OX রেখাটি ভূ-রেখার সমান্তরাল। O, A, X একই উলম্ব তলে অবস্থিত এবং A বিন্দু OX রেখার নিচে অবস্থিত। এখানে O বিন্দু হতে দৃষ্ট বিন্দু A, ফলে $<XOA$-ই O বিন্দুতে A বিন্দুর অবনতি কোণ।



চিত্র : ২১.১৮

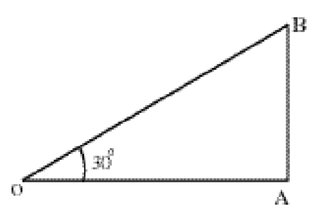
উদাহরণ 1 : একটি লম্বা গাছের পাদদেশ হতে 90 মিটার দূরে ভূমিস্থ একটি বিন্দুতে গাছটির শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 30^0 হলে গাছটির উচ্চতা কত?

সমাধান : চিত্রে গাছটির উচ্চতা AB, ভূমিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু O এবং গাছটির শীর্ষবিন্দু B। ফলে $<AOB = 30^\circ$ এবং $OA = 90$ মিটার

এখন $tan30^\circ = \dfrac{AB}{AO}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{AB}{90}$

বা, $AB = \dfrac{90}{\sqrt{3}}$



চিত্র : ২১.১৯

$=\frac{90 \text{ x } \sqrt{3}}{\sqrt{3} \text{ x } \sqrt{3}}$

$=\frac{90\sqrt{3}}{3}$

$=30\sqrt{3}$

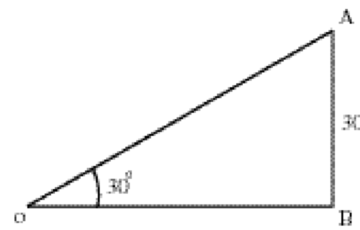
$=30 \text{ x } 1.723$ (প্রায়)

$= 51.96$ (প্রায়)

$\therefore$ গাছটির উচ্চতা 51.96 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ 2 : একটি গাছের পাদদেশ হতে কিছু দূরে একটি স্থানে গাছটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। গাছটি 30 মিটার উঁচু হলে, গাছটি হতে ঐ স্থানটির দূরত্ব কত?

সমাধান : মনে করুন, গাছটির পাদবিন্দু B, ভূমিতলের নির্দিষ্ট স্থান O এবং গাছটির শীর্ষবিন্দু A।



চিত্র : ২১.২০

$\therefore$ গাছটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব OB.

$\therefore \angle AOB = 30^\circ$ এবং $AB = 30$ মিটার

এখন, $tan 30^\circ = \frac{AB}{OB}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{30}{OB}$

বা, $OB = 30 \text{ x } \sqrt{3}$

বা, $OB = 30 \text{ x } 1.732$ (প্রায়)

$= 51.96$ মিটার (প্রায়)

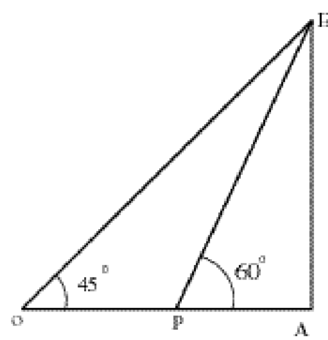
উদাহরণ 3 : কোন স্থান হতে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে তার শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হতে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা কত?

সমাধান : চিত্রে মিনারটি উচ্চতা AB

$\angle AOB = 45^\circ$ এবং $OP = 60$ মিটার

এখন, $cot 45^\circ = \frac{OA}{AB}$

এবং $cot 60^\circ = \frac{AP}{AB}$



চিত্র : ২১.২১

$\therefore \frac{OA}{AB} - \frac{AP}{AB} = cot 45^\circ - cot 60^\circ$

বা, $\frac{OA - AP}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{OP}{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{60}{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

বা, $AB = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$$= \frac{60\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\,(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{60(3+\sqrt{3})}{3-1}$$

$$= \frac{60(3+\sqrt{3})}{2}$$

$= 30\ (3+\sqrt{3}\ )$

$= 30\ (3+1.732)$

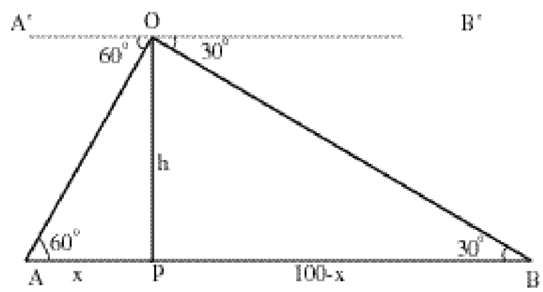
$= 30 \infty 4.732$ (প্রায়)

$= 141.96$ (প্রায়)

$\therefore$ গাছটির উচ্চতা 141.96 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ 4 : দুইটি কিলোমিটার পোস্টের মধ্যবর্তী কোন স্থানের উপরে একটি হেলিকপ্টার থেকে ঐ কিলোমিটার পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° হলে, হেলিকপ্টারটির উচ্চতা কত?

সমাধান : মনে করুন, A ও B দুইটি কিলোমিটার পোস্ট। ধরুন O বিন্দুটি হেলিকপ্টারটির অবস্থান। O বিন্দু হতে A ও B এর অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30°। O বিন্দু হতে AB এর উপর OP লম্ব অঙ্কন করুন।



চিত্র : ২১.২২

$\therefore$ হেলিকপ্টারটির উচ্চতা $= OP = h$ মিটার

ধরুন $AP = x$ মিটার

প্রশ্নমতে $AB = 1$ কিলোমিটার $= 1000$ মিটার

$\therefore\ BP = AB - AP = (1000 - x)$ মিটার

প্রশ্নমতে $<A'OA = 60^\circ$ এবং $< B'OB = 30^\circ$

যেহেতু $A'B'$ ও AB সমান্তরাল

$\therefore\ <OAB = 60^\circ$ এবং $<OBA = 30^\circ$

এখন $tan60^\circ = \dfrac{OP}{AP}$

বা, $\sqrt{3}\ = \dfrac{h}{x}$

বা, $x\sqrt{3}\ = h$ ------- (i)

.. $tan30^\circ = \dfrac{OP}{BP}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ = \dfrac{h}{1000 - x}$

$1000 - x = h\sqrt{3}$

$1000 - x = x\sqrt{3}\ .\ \sqrt{3}$

$1000 - x = 3x$

$4x = 1000$

$\therefore\ x = 250$

এখন x-এর মান *(i)* নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$h\ = \sqrt{3}\,x = \sqrt{3}\ \infty\ 250$

$= 250 * 1.732$ (প্রায়)

$= 433$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ হেলিকপ্টারটির উচ্চতা = 433 মিটার (প্রায়)

অনুশীলনী ২১.৪

1. একটি মিনারের পাদদেশ হতে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোন বিন্দুতে মিনারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° হলে মিনারটির উচ্চতা কত?
2. একটি নদীর এক তীরে অবস্থিত কোন বিন্দুতে অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার উঁচু একটি গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 60°। নদীটির প্রস্থ কত?
3. ভূ-তলে একটি টাওয়ারের ছায়া 24 মিটার বেশি লম্বা হলে যদি সূর্যের উন্নতি কোণ 60° হতে 45° হয়, তবে টাওয়ারের উচ্চতা কত?
4. একজন লোক নদীর তীরে কোন স্থানে দাঁড়িয়ে দেখল ঠিক সোজাসুজি অপর তীরে অবস্থিত একটি স্তম্ভের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান হতে 25 মিটার পিছিয়ে গিয়ে দেখল তার উন্নতি কোন 30° হয়েছে। স্তম্ভটির উচ্চতা ও নদীর বিস্তার কত?
5. 45 মিটার উঁচু একটি গাছ ভূমি হতে কিছু উপরে ভেঙ্গে ভূমির সাথে 30° কোণে মিলিত হল। গাছটি কত উঁচুতে ভেঙেছিল?
6. দুইটি কিলোমিটার পোস্টের মধ্যবর্তী কোন স্থানের উপরে অবস্থিত একটি এরোপেন হতে ঐ পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে 45° ও 30° হলে এরোপ্লেনটি কত উচুতে অবস্থান করবে?