ইউনিট ১৩
পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা ও তার বিকৃতি

উদ্দেশ্য এই ইউনিট শেষে আপনি

- পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞাটি জানতে ও বলতে পারবেন।
- প্রতিজ্ঞাটি প্রমান ও প্রয়োগ করতে পারবেন।
- সুক্ষকোনী ও স্থুলকোনী ত্রিভুজে পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করেন।

পাঠ-১ পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা

উদ্দেশ্য এই পাঠ শেষে আপনি

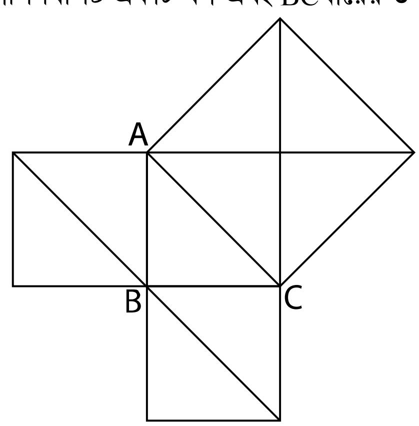
- পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞাটি জানতে ও বলতে পারবেন
- প্রতিজ্ঞাটি প্রমান ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

উপপাদ্য ১৩.১

সমকোনী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দু বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্ঠির সমান।

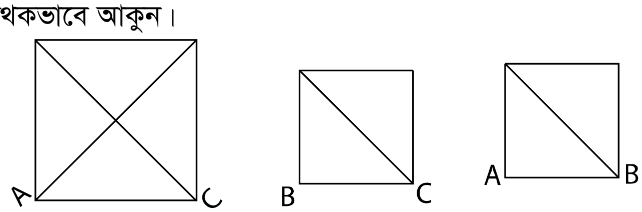
সত্যতা যাচাই

১। চিত্রের টালি বিছানো মেঝেটি লক্ষ করুন। A, B ও C চিহ্নিত টালির AC ধারের উপর চারটি টালি বিশিষ্ট একটি বর্গ, AB ধারের উপর ২টি টালি বিশিষ্ট একটি বর্গ এবং BCধারের উপর ২টি টালি বিশিষ্ট একটি বর্গ।



চিত্র ১৩.১

এখন এই বর্গগুলোকে পৃথকভাবে আকুন।

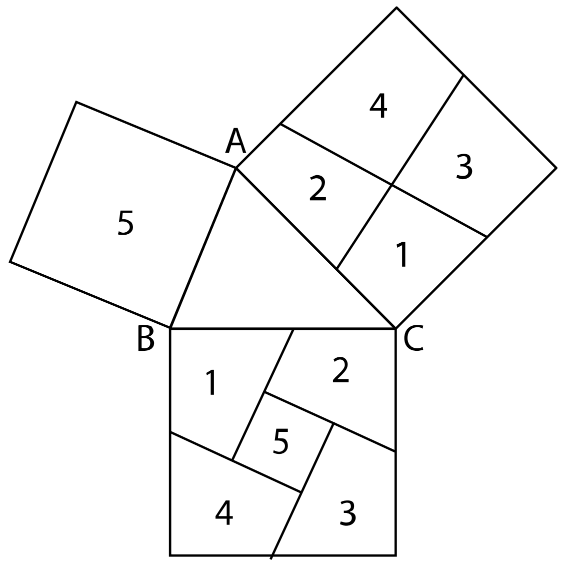


চিত্র ১৩.২

লক্ষ করুন AC ধারের উপর ৪টি টালি
AB ধারের উপর ২টি টালি
BC ধারের উপর ২টি টালি

সুতরাং AC ধারের উপর টালির সংখ্যা AB ও BC ধারের উপর টালির সংখ্যার সমষ্টির সমান।
অর্থ্যা AC এর উপর বর্গ = AB এর উপর কর্ন + BC এর উপর কর্ন
বা $AC^2=AB^2+BC^2$

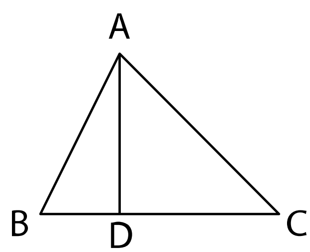
২। নিচের চিত্রে ΔABC সমকোনী যার $\angle BAC$ = এক সমকোন। AB, BC ও AC বাহুর উপর বর্গ অঙ্কন করা হল। এখন AC এর উপর কর্নকে চিত্র অনুযায়ী ৪টি চতুর্ভূজে বিভক্ত করে ১,২,৫,৪ দ্বারা সূচিত করা হল এবং এর উপর বর্গকে ৫ দ্বারা সূচিত করা হল। এখন BC এর উপর বর্গকে AC এর বর্গের উপর অঙ্কিত চতুর্ভূজগুলি সঠিকভাবে চিহ্নিত করলে দেখা যাবে মধ্যবর্তী চিত্রটি একটি বর্গ হয়েছে যা AC এর উপর অঙ্কিত বর্গের সমান।



চিত্র ১৩.৩

সুতরাং BC এর উপর বর্গ =AB এর উপর বর্গ +AC এর উপর অর্থাৎ $BC^2=AB^2+AC^2$
উপরোল্লিখিত পরীক্ষা দুইটি হতে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায় যে, সমকোনী ত্রিভূজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রে অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

তত্ত্বীয় প্রমান



চিত্র ১৩.৪

মনে করুন ΔABC একটি সমকোনী ত্রিভুজ যার $\angle BAC$ এক সমকোন এবং BC বাহু অতিভূজ। প্রমান করতে হবে যে $BC^2 = AB^2+AC^2$
অঙ্কন ঃ A হতে BC এর উপর, AD লম্ব অঙ্কন করুন।
প্রমান ঃ
ΔABD ও ΔABC সদৃশকোনী

কারণ $\angle ADB = \angle BAC$ এবং $\angle ABC$ সাধারন কোন

সুতরাং $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$

বা $AB^2 = BC.\ BD$ ....(1)

অপর সদৃশকোনী

সুতরাং $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$

বা $AB^2 = BC.\ BD$ ....(2)

(1) ও (2) যোগ করে পাই

$$\begin{aligned} AB^2+AC^2 &= BC.BD+BC.CD \\ &= BC\ (BD+CD) \\ &= BC.\ BC \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

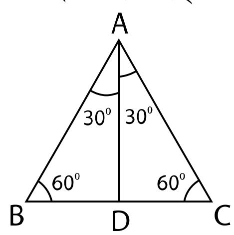
$\therefore BC^2 = AB^2+AC^2$

সুতরাং সমকোনী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

উদাহরন ও ব্যবহারিক প্রয়োগ

উদাহরন ১

সমকোনী ত্রিভুজের সুক্ষ্মকোন দুইটি ৩০° ও ৬০° হলে তার বাহুগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করুন।



চিত্র ১৩.৫

ΔABC সমবাহু এবং $AD \perp BC$ সুতরাং AD, $\angle BAC$কে সমদ্বিখন্ডিত করেছে।

$\therefore \angle BAD = 30^0$ এবং $\angle ADB = 90^0$

এখন AD, BCকে সমদ্বিখন্ডিত করেছে বলে

$BD = \frac{১}{২} \cdot BC$

$\therefore BD = \frac{১}{২} \cdot AB\ [\because\ BC = AB]$

$\therefore AB = 2BD$

ধরুন $BD = X$, $\quad \therefore AB = 2X$

এখন ΔADB সমকোনী ত্রিভুজ বলে

$AD^2+BD^2 = AB^2$

$$\begin{aligned} \text{বা } AD^2 &= AB^2\text{-}BD2 \\ &= (2X)^2 - X^2 \\ &= 4X^2 - X^2 \\ &= 3X^2 \end{aligned}$$

$\therefore AD \;= X\sqrt{3}$

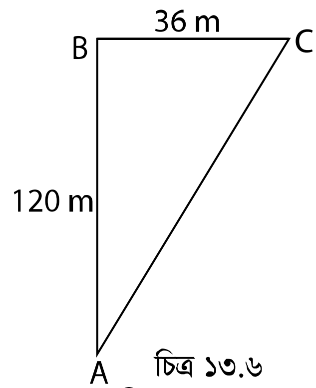
সুতরাং ΔABC এর কোনগুলো ৩০°, ৬০°, ৯০°এবং বাহুগুলো

উদাহরন ২

এক ব্যক্তি সাতার দিয়ে ১২০ চওড়া একটি নদী সোজাসুজি পার হতে চাইল, কিন্তু স্রোত থাকায় সে অপর পাড়ে নির্দিষ্ট স্থান থেকে ৩৬ দূরে উঠল। সে কত দূর সাতার দিয়েছে।

সমাধান ঃ

মনে করুন, লোকটি স্থান A হতে সাতার দিয়ে B স্থানে উঠতে চাইলো। কিন্তু স্রোত থাকায় যে ৩৬ দূরে C স্থানে উঠলো। অতএব প্রশ্নমতে AB =120m এবং BC = 36m



চিত্র ১৩.৬

ACএর দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে এখন ABC সমকোনী ত্রিভূজ হতে পাই।

$AC^2 = AB^2+BC^2$
$= (120)^2+(36)^2$
$= 14400+1296$
$= 15696$
$\therefore AC = \sqrt{15696} = 125.28$
$\therefore AC = 125m$ (প্রায়)

অতএব ব্যক্তিটি 125m সাতার দিয়েছিল।

উদাহরন ৩

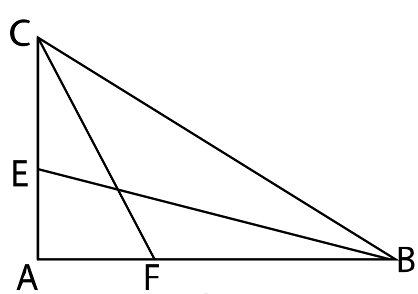
ABC সমকোনী ত্রিভুজের $\angle BAC$ = এক সমকোন BC ও CF মধ্যমা। প্রমান করুন যে, $4(BE^2+CF^2)=5BC^2$

সমাধান :

যেহেতু ΔABC সমকোনী ত্রিভুজ এবং $\angle BAC$= এক সমকোন

অতএব BC অতিভুজ

$\therefore BC^2=AB^2+AC^2$



চিত্র ১৩.৭

যেহেতু BC ও CF মধ্যমা

সুতরাং $AE = \frac{১}{২} \cdot AC$ এবং

$AF = \frac{১}{২} \cdot AB$

অর্থাৎ $AC = 2AE$ এবং

$AB = 2AF$

এখন AEB সমকোনী ত্রিভূজ হতে, $BE^2 = AB^2+AE^2$

এবং ACF সমকোনী ত্রিভূজ হতে, $CF^2 = AC^2+AF^2$

এখন, $4(BE^2+CF^2)$

$= 4(AB^2+AE^2+AC^2+AF^2)$

$= 4(AB^2+AC^2)+4AE^2+4AF^2$

$= 4BC^2+(2AE)^2+(2AF)^2$

$= 4BC^2+AC^2+AB^2$

$= 4BC^2+BC^2$

$= 5BC^2$

অনুশীলনী-১৩.১

১। সমকোনী ত্রিভুজের সুক্ষকোন দুইটির প্রত্যেকটি ৪৫$^\circ$ হলে তার বাহুগুলোর সম্পর্ক নির্ণয় করুন।
উঃ $X, X, X\sqrt{2}$

২। সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর পরিমান $2\sqrt{3}$ হলে তার উচ্চতা কত? [উঃ

৩। লম্বা একটি সই এর একপ্রান্ত কেন দেওয়ালের মাথায় এবং অপর প্রান্ত দেওয়াল হতে ৪ দূরে অবস্থিত। দেওয়ালটির উচ্চতা কত? [উঃ

৪। ABC ত্রিভুজের $\angle A$সমকোন D , AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু প্রমান করুন $BC^2+AD^2=BD^2+AC^2$

৫। ΔABC সমবাহু এবং $AD\perp BC$। প্রমান করুন $4AD^2 = 3AB^2$

পাঠ ২ পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা বিস্তৃতি

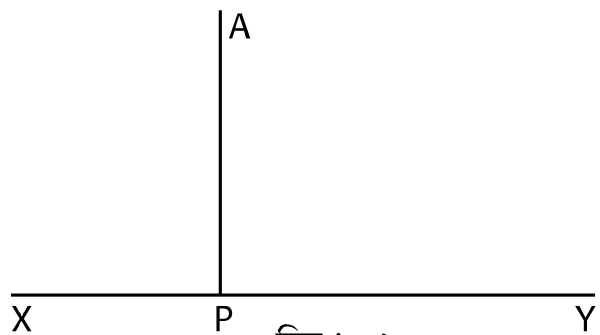
উদ্দেশ্য এই পাঠ শেষে আপনি

- অভিক্ষেপের ধারণা অর্জন করবেন।
- সমকোনী ত্রিভুজ ছাড়া স্থুলকোনী ও সুক্ষকোনী ত্রিভুজে পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা প্রয়োগ করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

অভিক্ষেপ

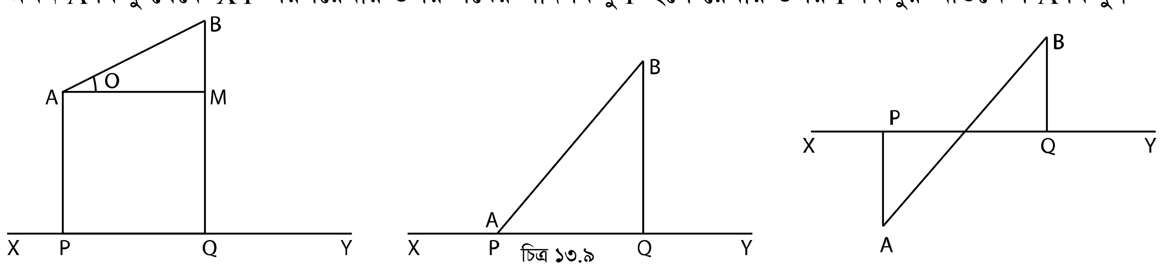
সংজ্ঞা : কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোন বিন্দুর অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদ বোঝায়। কোন সরলরেখার উপর অন্য একটি সরলরেখার অভিক্ষেপ থাকতে পারে।

মনে করুন, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা ।



চিত্র ১৩.৮

এখন A বিন্দু থেকে XY সরলরেখার উপর লম্বের পাদ বিন্দু P হলে রেখার উপর P বিন্দুর অভিক্ষেপ A বিন্দু।



চিত্র ১৩.৯

আবার মনে করুন, AB একটি রেখাংশ এবং XY একটি সরলরেখা। AB এবং XY পরস্পর লম্ব নয়। AB রেখাংশের প্রান্তবিন্দু A ও B থেকে XY সরলরেখার উপর যথাক্রমে AP ও BQ লম্ব টানুন। এই লম্বদ্বয় XY রেখাকে PQ অংশে খন্ডিত করে। PQ কে XY রেখার উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ বলা হয়। লম্ব অংশ করে অভিক্ষেপ নির্নীত হয় বলে PQ কে XY এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection) বলা হয়। উপরের তিনটি চিত্রেই PQ, AB এর লম্ব অভিক্ষেপ। দ্বিতীয় চিত্রে P বিন্দু A বিন্দুর সাথে মিলে গেছে। এখন AB এর A বিন্দু থেকে BQ এর উপর AM লম্ব অঙ্কন করুন যা BQ কে M বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করুন AB ও PQ অর্থাৎ AB ও AM এর অন্তর্ভূক্ত কোন

$$\therefore \frac{\text{অভিক্ষেপ } PQ}{AB} = \frac{AM}{AB} = \cos q$$

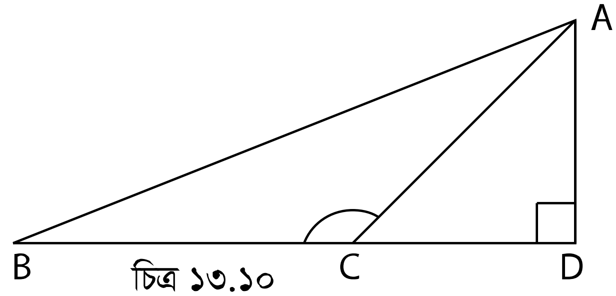
অর্থাৎ অভিক্ষেপ $PQ = AM = AB \cos q$

অতএব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য AB এর দৈর্ঘ্য এবং AB ও XY এর মধ্যকার কোনের উপর নির্ভরশীল।

দ্রষ্টব্য : AB সরলরেখা XY সরলরেখার উপর লম্ব হলে PQ দৈঘ্য শূন্য হবে এবং সেক্ষেত্রে লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য বা লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য হবে।

উপপাদ্য-১৩.২

স্থুলকোনী ত্রিভুজের স্থুলকোনের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোনের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের এবং ঐ দুই বাহুর যে কোন একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুনের সমষ্টির সমান।



চিত্র ১৩.১০

Δ ABC এ $\angle$ACB স্থুলকোন এবং AB তার বিপরীত বাহু স্থুলকোনের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC ও BC। মনে করুন, BC রেখার AC রেখার লম্ব অভিক্ষেপ CD। প্রমান করতে হবে যে, $AC^2+BC^2+2BC.CD$

প্রমান : Δ ABD এ $\angle$D এক সমকোন

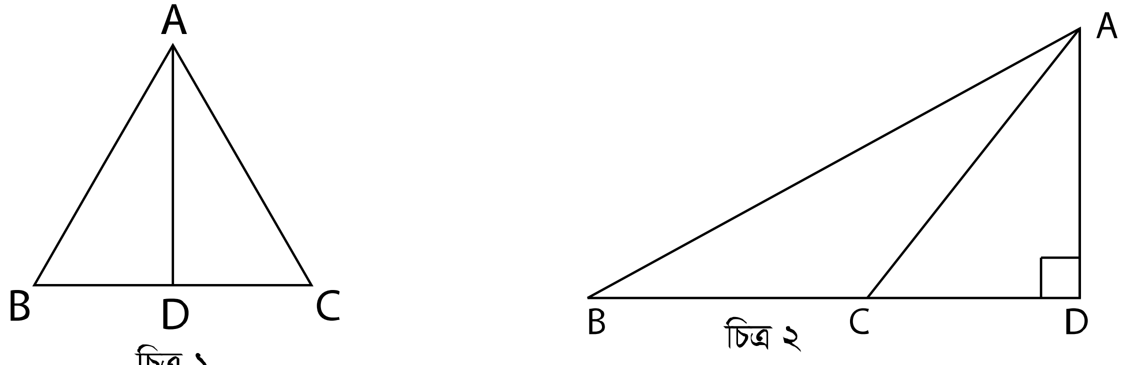
$$\therefore AB^2 = AD^2+BD^2$$
$$= AD^2+(BC+CD)^2$$
$$= AD^2+BC^2+CD^2+2BC.CD$$
$$= AD^2+CD^2+BC^2+2BC.CD$$

কিন্তুΔ ACD এর $\angle$D সমকোন হওয়ায়, $AC^2=AD^2+CD^2$

$$\therefore AB^2 = AC^2+BC^2+2BC.CD$$

উপপাদ্য ১৩.৩

যে কোন ত্রিভুজের সূক্ষকোনের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যে কোন একটি ও তার উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুন পরিমান কম।



চিত্র ১৩.১১

ΔABC-এর $\angle B$ সূক্ষকোন এবং AC তার বিপরীত বাহু। অপর বাহুদ্বয় AB ও BC । AD, BC এর উপর (চিত্র-১) বা BC এর বর্ধিতাংশের উপর (চিত্র-২) লম্ব। সূতরাং BD, BC এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ (উভয় চিত্র)। প্রমান করতে হবে যে, $AC^2=AB^2+BC^2-2BC.BD$

প্রমান : ΔACD-এ $\angle D = 90^0$

$\therefore\ AC^2= AD^2+CD^2$

কিন্তু $CD = BC-BD$ (চিত্র-১)

$= BC-BC$ (চিত্র-২)

$\therefore\ CD^2 = BC^2+BD^2-2BC.BD$

$\therefore\ AC^2=AD^2+BC^2+BD^2-2BC.BD$

$= (AD^2+BD^2) + BC^2-2BC.BD$

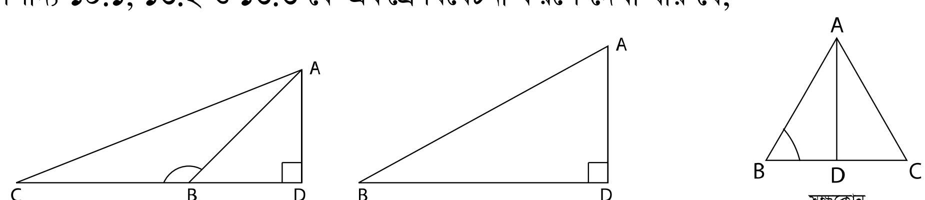
আবার ΔABD-এ $\angle D = 90^0$ হওয়ায়, $AB^2= AD^2+BD^2$

$\therefore\ AC^2=AB^2+BC^2 - 2BC.CD$

মন্তব্য : সমকোনী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোনের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বলে তাদের একটির উপর অপরটির লক্ষ অভিক্ষেপ শূন্য

সুতরাং $2BC.BD = 0$

দ্রষ্টব্য : উপপাদ্য ১০.১, ১৩.২ ও ১৩.৩ কে একত্রে বিবেচনা করলে দেখা যায় যে,



স্থুলকোন
চিত্র ১

সমকোন
চিত্র ২

সূক্ষ্মকোন
চিত্র ৩

চিত্র ১৩.১২

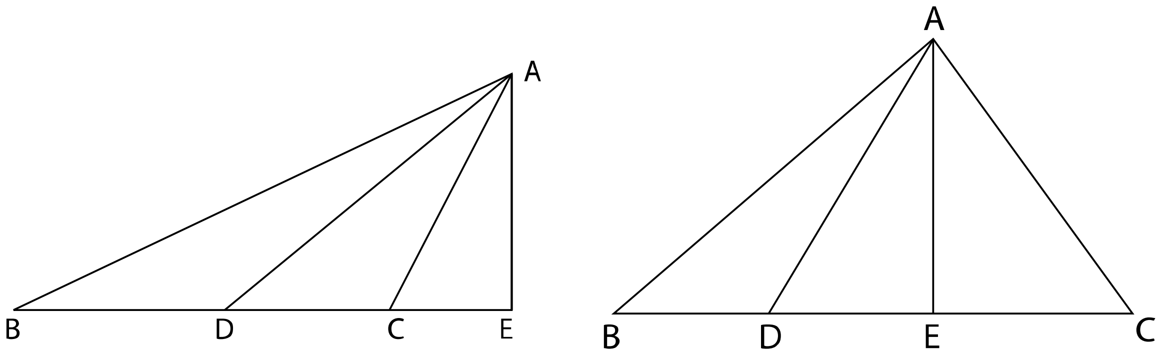
চিত্র-১ $AC^2 =AB^2+BC^2 + 2BC.CD$

চিত্র-২ $AC^2 =AB^2+BC^2$

চিত্র-৩ $AC^2 =AB^2+BC^2 - 2BC.CD$

উপপাদ্য ১৩.৪

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমান তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্র এবং বাহুতে অঙ্কিত উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুন।



চিত্র ১৩.১৩

ΔABC -এর মধ্যমা AD, BC বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করেছে প্রমান করতে হবে যে, $AB^2+AC^2=2\ (BD^2+AD^2)$

অঙ্কন : BC-এর বা তার বর্ধিতাংশের উপর AE লম্ব অঙ্কন করুন

প্রমান : ΔABC এ $\angle E$ সমকোন

$$\therefore\ AB^2 = AE^2+BE^2$$
$$= AE^2+(BD+DE)^2$$
$$= AE^2+BD^2+BE^2+2BD\text{-}DE$$
$$= (AE^2+DE^2)\ +BD^2+2BD.DE$$
$$= AD^2+BD^2+2BD.DE\ [AE^2+DE^2 = AD^2]$$

$$\therefore\ AB^2\ = AD^2+BD^2\ +2BD.DE$$

আবার ΔACEএ $\angle E$ সমকোন

$$\therefore\ AB^2 = AE^2+CE^2$$
$$= AE^2+(CD\text{-}DE)^2$$
$$= AE^2+CD^2+DE^2\text{-}2CD.DE$$
$$= (AE^2+DE^2)\ +\ CD^2\text{-}2CD.DE$$
$$= AD^2+BD^2\text{-}2BD.DE\ [BD=CD]$$

$$\therefore\ AC^2\ = AD^2+BD^2\ -\ 2BD.DE$$

এখন ১ ও ২ যোগ করে পাই

$$AB^2\ +AC^2 = 2AD^2+2BD^2$$
$$= 2(AD^2+BD^2)$$ প্রমানিত

মন্তব্য এই উপপাদ্য এপোলোনিয়াম-এর উপপাদ্য নামে পরিচিত

অনুশীলনী ১৩.২

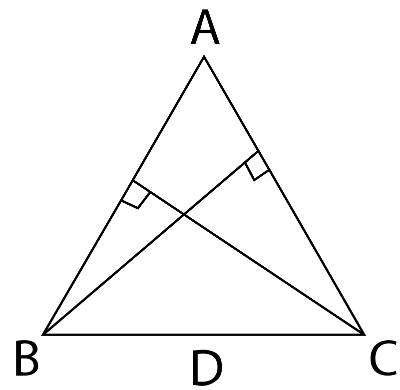
১) একটি সমতলে রেখাংশ ৩০°, ৪৫° বা ৬০° আনত কে উৎপন্ন করলে তার লম্ব অভিক্ষেপের পরিমানগুলো নির্ণয় কর।

2) ΔABC-এ $\angle B$ = ১২০° হলে প্রমান করুন, $AC^2 = AB^2+BC^2+AE$

৩) ΔABC-এ $\angle B$ = ৬০° হলে প্রমান করুন, $AC^2 = AB^2+BC^2-AB$

৪) ΔABC-এ $\angle C$=৯০° এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু হলে প্রমান করুন, $AB^2 = AD^2+3BD^2$

৫) নিচের চিত্র হতে প্রমান করুন $BC.CD = AC.CE$



চিত্র ১৩.১৪

৬) ΔABC-এ D, AB এর মধ্যবিন্দু এবং <B> $\angle A$ CE, AB এর উপর লম্ব।

৭) প্রমান করুন, $AC^2 - BC^2 = 2AB.DE$

৮) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BCএর উপর P থেকে কিন্তু হলে দেখান যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

৯) ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দু দ্বারা সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হয়েছে।

১০) প্রমান করুন যে, $AB^2 - AC^2 = AP^2+AQ^2+4PQ^2$

১১) প্রমান করুন কোন ত্রিভুজের বাহুবলের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র তিনটির সমষ্টির তিনগুন তার মধ্যমাগুলোর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র তিনটির সমষ্টির চারগুনের সমান।