ইউনিট ১৪
সমবিন্দু রেখা

ভূমিকা :

যে কোন দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়ে একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়। যদি দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল না হয় তবে ঐ রেখাদ্বয় অবশ্যই কোন একটি বিন্দুতে ছেদ করবে। কিন্তু দুইয়ের অধিকরেখা হলে তারা একই বিন্দুতে ছেদ নাও করতে পারে। দুই এর অধিক সরলরেখা একই বিন্দুতে ছেদ করলে তাদেরকে সমবিন্দু রেখা বলা হয়। বর্তমান ইউনিটে সমবিন্দু রেখা সম্পর্কিত উপপাদ্য সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

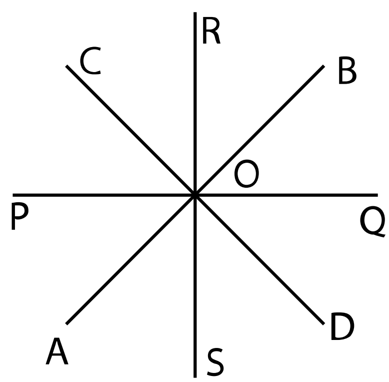
পাঠ ১ সমবিন্দু রেখা সম্পর্কিত উপপাদ্য

উদ্দেশ্য : এই পাঠ শেষে আপনি

- সমবিন্দু রেখার সংজ্ঞা বলতে পারবেন।
- সমবিন্দু রেখা সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- পরিকেন্দ্র, লম্ববিন্দু, অন্তঃকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও বহিঃকেন্দ্র সম্পর্কিত বলতে পারবেন।

সমবিন্দু রেখা

তিন বা ততোধিক সরলরেখা একই বিন্দুতে মিলিত হলে বা ছেদ করলে তাদেরকে সমবিন্দু সরলরেখা বলা হয়। রেখাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে বা মিলিত হয় সেই বিন্দুকে তাদের সম্পাত বিন্দু (Point of Concurrence)বলা হয়।

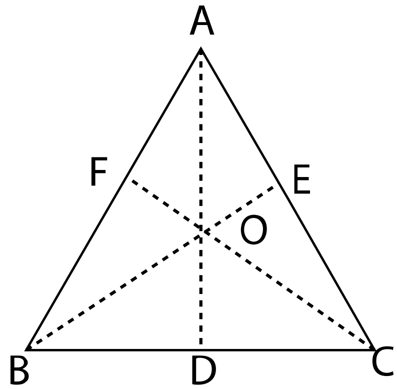


চিত্র ১৪.১

চিত্রে AB, CD, PQ ও RS সরলরেখা চারটি O বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং AB, CD, PQ ও RS সরলরেখাগুলো সমবিন্দু সরলরেখা এবং O তাদের সম্পাদ বিন্দু।

উপপাদ্য ১৪.১

কোন ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব দ্বিখন্ডক তিনটি সমবিন্দু।



চিত্র ১৪.২

ΔABC-এর D, E, F যথাক্রমে BC, CA এবং AB এর মধ্যবিন্দু প্রমাণ করতে হবে যে, D, E ও F বিন্দুতে যথাক্রমে BC, CA ও AB এর উপর লম্ব এয় সমবিন্দু।

অঙ্কন : D ও E বিন্দুতে BC ও CA এর উপর যথাক্রমে DO ও OE লম্ব টানুন। তারা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হল। OF, OA, OB এবং OC যোগ করুন।

প্রমান : O বিন্দু AB এর লম্ব দ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ AO = BO

অনুরূপভাবে, AO = CO

সুতরাং BO = CO

অর্থাৎ O বিন্দু B ও C হতে সমদূরবর্তী

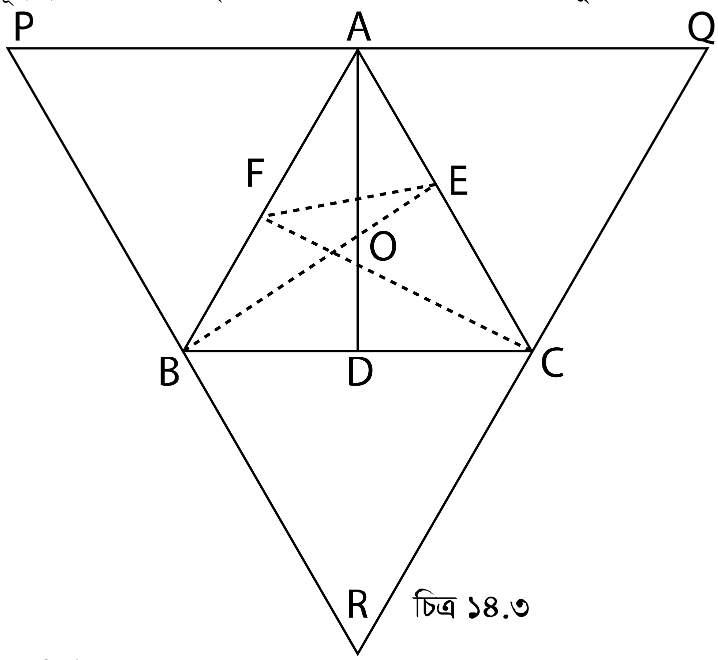
আবার D, BC এর মধ্যবিন্দু। $\therefore$OD অবশ্যই BC এর উপর লম্ব

সুতরাং ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব-দ্বিখন্ডক তিনটি সমবিন্দু।

দ্রষ্টব্য : এখানে O বিন্দুটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C থেকে সমদূরবর্তী। কারণ OA = OB = OC। অতএব O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আকলে, তা A, B, C বিন্দু দিয়ে যাবে। এই বৃত্তটিকে ΔABC এর পরিবৃত্ত এবং O কে পরিকেন্দ্র বলা হয়।

উপপাদ্য ১৪.২

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু সমূহ হতে বিপরীত বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।



চিত্র ১৪.৩

মনে করুন ΔABC এর শীর্ষ A, B ও C থেকে BC, CA ও AB এর উপর যথাক্রমে AD, BE ও CF লম্ব।

প্রমান করতে হবে যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

অঙ্কন : A, B ও C বিন্দু দিয়ে BC, CA ও AB এর সমান্তরাল রেখা যথাক্রমে BC, CA ও AB অঙ্কন করুন। রেখা তিনটি পরস্পর মিলিত হলে পাওয়া যায়।

প্রমান : $AP \parallel BC$ যেহেতু এবং $BC \parallel AC$

$\therefore$PACB একটি সামান্তরিক

$\therefore AP = BC$

অনুরূপভাবে, $AQ = BC$

$\therefore AP = AQ$

অর্থাৎ A, PQ এর মধ্যবিন্দু

একইভাবে যেখান যায় যে, B, PR এবং C, QR এর মধ্য

আবার $PQ \parallel BC$ এবং AD, BC এর উপর লম্ব

$\therefore$ AD, PQ এর লম্ব দ্বিখন্ডক।

অনুরূপভাবে BE, PR এবং CF, QR এর লম্ব দ্বিখন্ডক

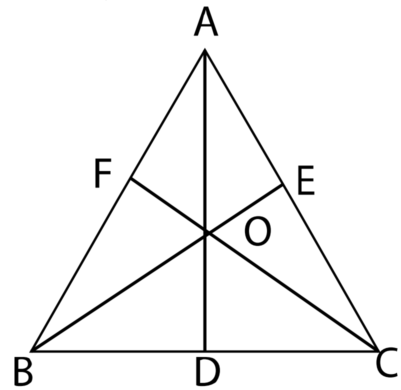
অতএব AD, BE ও CF, Δ PQR এর বাহুত্রয়ের লম্ব দ্বিখন্ডক

$\therefore$ তারা সমবিন্দু

মন্তব্য : এক্ষেত্রে লম্বত্রয়ের সম্পাতবিন্দু O ΔABC এর লম্ব বিন্দু বলা হয়। ΔDEF কে ΔABC এর পাদত্রিভুজ (Pedal Triangle) বলা হয়।

উপপাদ্য ১৪.৩

ত্রিভুজের কোন সমূহের সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।



চিত্র ১৪.৪

মনেকরুন ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমান করতে হবে যে, $\angle A$, $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।

অঙ্কন : $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডক BO ও CO আকুন যেন তার O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু থেকে যথাক্রমে BC, CA ও এর উপর OD, OE ও OF লম্ব আকুন। A,O যোগ করুন।

প্রমান : BO, $\angle B$ এর সমদ্বিখন্ডক। সুতরাং BO-এর যে কোন বিন্দু BC ও AB হতে সমদূরবর্তী।

$\therefore$ OD = OF

অনুরূপভাবে, OD = OE

$\therefore$ OE = OF

অতএব O বিন্দু $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত

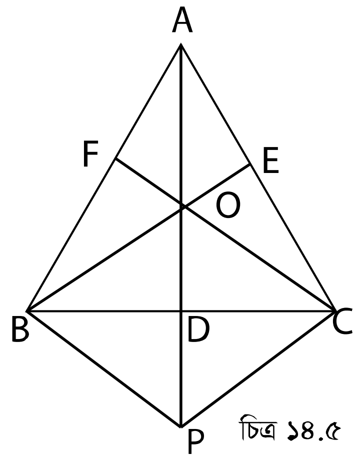
অর্থাৎ AO, $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক।

$\therefore \angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকগুলো O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অর্থাৎ তারা সমবিন্দু।

দ্রষ্টব্য : এখানে O বিন্দুটি AB, BC ও OA হলে সমদূর কী কারন OD = OE = OF। অতএব O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। তবে তা BC, CA ও AB কে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করবে। এই বৃত্তকে ΔABC এর অন্তবৃত্ত এবং O কে এই বৃত্তের অন্ত:কেন্দ্র বলা হয়।

উপপাদ্য ১৪.৪

ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমবিন্দু



চিত্র ১৪.৫

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে তার মধ্যমা সমবিন্দু।

ধরুন BE ও CF মধ্যমা দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে AO যোগ করে বর্ধিত করুন যে তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ তাহলে ইহা প্রমান করা হবে যে D, BC এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ AD মধ্যমা।

অঙ্কন : AD কে P পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন OP = OA B,P ও C, P যোগ করুন।

প্রমাণ : ΔAPC-এ O, AP এর এবং E, AC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ OE ।। PC

অর্থাৎ BE ।। PC

অনুরূপভাবে, CF ।। BP

সুতরাং BOCP একটি সামান্তরিক BC ও OP তার দুইটি কর্ন এবং BC ও OP পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

$\therefore$ D, BC এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ AD মধ্যমা

সুতরাং ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

দ্রষ্টব্য : চিত্রে OD = DP বা $OD = \frac{1}{2} OP$

অর্থাৎ $OD = \frac{1}{2} OA$

বা $2OD = OA$

বা $2OD + OD = OA+OD$

বা $3OD = AD$

$\therefore OD = \frac{1}{3} AD$

এখন $OD = \frac{1}{3} AD$ বলে $AO = \frac{2}{3} AD$

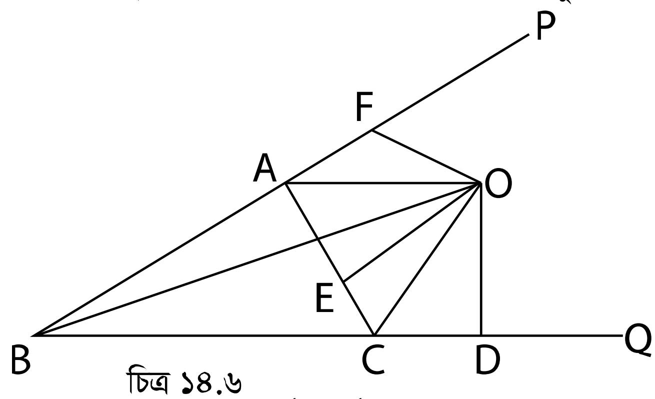
অনুরূপভাবে, $OF = \frac{1}{3} CF$ এবং $OB = \frac{2}{3} BE$

এবং $OE = \frac{1}{3} BE$ এবং $OB = \frac{2}{3} BE$

অর্থাৎ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সম্পাতবিন্দুতে ২:১ অনুপাতে বিভক্ত হয় এবং O বিন্দুটিকে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র বলা হয়।

উপপাদ্য ১৪.৫

ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোনের বহির্দ্বিখন্ডক এবং অপরকে সমদ্বিখন্ডক সমবিন্দু।



চিত্র ১৪.৬

ΔABC এর BAও BC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে। প্রমান করতে হবে যে বাহিঃস্থ $\angle PAC$ এবং $\angle QCA$ অন্তঃস্থ $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।

ধরুন $\angle PAC$ ও $\angle QCA$ এর সমদ্বিখন্ডক যথাক্রমে AO ও CO পরস্পর বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। তাহলে ইহা প্রমান করা যথেষ্ট হবে যে BO, $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক।

অঙ্কন : B, O যোগ করুন। BC, CA ও AB এর উপর OD, OE ও OF লম্ব অঙ্কন করুন।

প্রমান : CO, $\angle QCA$ এর সমদ্বিখন্ডক। সুতরাং CO এর যে কোন বিন্দু BQ ও AC হতে সমদূরবর্তী।

$\therefore OD = OE$

অনুরূপভাবে, AO, $\angle PAC$ এর সমদ্বিখন্ডক বলে $OF = OE$

$\therefore OD = OF$

অতএব O বিন্দু $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডকে অবস্থিত

অর্থাৎ OB, $\angle ABC$ এর সমদ্বিখন্ডক।

অতএব $\angle B$ এর সমদ্বিখন্ডক এবং $\angle A$ ও $\angle C$ এর বহিদ্বিখন্ডক সমবিন্দু।

দ্রষ্টব্য : এখানে O হতে BC, CA ও AB এর উপর অঙ্কিত লম্বগুলো যথাক্রমে OD, OE ও OF এবং $OD = OE = OF$ । অতএব O কে করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আকলে তা BC এর বর্ধিতাংশকে D ও F বিন্দুতে এবং AC কে E বিন্দুতে স্পর্শ করবে। এই বৃত্তটিকে ΔABC এর একটি বহিবৃত্ত এবং O কে এই বৃত্তের বহিঃকেন্দ্র বলা হয়।

অনুশীলনী ১৪.১

১। প্রমান করুন যে, ত্রিভুজের যে কোন দুইটি মধ্যমার যোগ তার তৃতীয় মধ্যমা হতে বৃহত্তর।

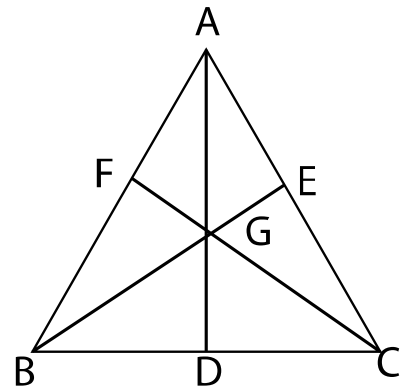
২। প্রমান করুন যে, কোন ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হবে।

৩। প্রমান করুন যে, কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় ঐ ত্রিভুজের মিলন মধ্যবিন্দুর সংযোজক ত্রিভুজটিরও মধ্যমা।

৪। প্রমান করুন যে, কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র এবং ঐ ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র একই বিন্দু।

৫। প্রমান করুন যে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, অন্তঃকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু একই বিন্দু হতে।

৬। চিত্রে G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র। প্রমান করুন যে, $\Delta ABC = \Delta AGB = \Delta BGC = \frac{1}{2}\Delta ABC$



চিত্র ১৪.৭