ইউনিট ১৫

অনুপাত ও সাদৃশ্য

ভূমিকা :
বাস্তব জীবনে বিভিন্ন ক্ষেত্রে আমরা অনুপাত ও সাদৃশ্য ধারণা ব্যবহার করে থাকি। একটি জিনিসের সাথে অপর একটি জিনিসের তুলনা বুঝতে অনুপাতের ধারণা ব্যবহার করা হয় আবার একটির সাথে অন্য একটির মিলকরণের ক্ষেত্রে সাদৃশ্যের ধারণা ব্রবহার করা হয়। বর্তমান ইউনিটে আমরা জ্যামিতিক ক্ষেত্রে অনুপাত ও সাদৃশ্য সম্পর্কে জ্ঞান অর্জনের চেষ্টা করবো এবং এই ধারণা ব্যবহার করে বিভিন্ন প্রতিজ্ঞা প্রমান ও প্রয়োগের চেষ্টা করবো।

উদ্দেশ্য এই ইউনিট শেষে আপনি

- অনুপাত ও সাদৃশ্য সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।
- রেখাংশকে বিভিন্ন অনুপাতে বিভক্ত করতে পারবেন।
- অনুপাত সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য প্রমান ও প্রয়োগ করতে পারবেন।
- সাদৃশ্য সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য প্রমান ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

পাঠ ১ : অনুপাত ও সাদৃশ্যের ধারণা

উদ্দেশ্য এই পাঠ শেষে আপনি

- অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন।
- রেখাংশকে বিভিন্ন অনুপাতে বিভক্ত করতে শিখবেন।
- অনুপাত ও সমানুপাত সংক্রান্ত কতিপয় প্রতিজ্ঞা সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।
- সদৃশতা সম্পকে জ্ঞান অর্জন করবেন।
- ত্রিভুজের সদৃশ্যতা ও সর্বসমতার মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করতে পারবেন।

অনুপাত : অনুপাত দ্বারা একই জাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে তুলনা বুঝায়। AB ও CD দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য যদি যথাক্রমে ৪ মি: ও ৩ মি: হয়। তবে AB ও CD এর অনুপাতকে ৪ : ৩ আকারে লিখা হয় অর্থাৎ $AB : CD = 4 : 3$ বা $\frac{AB}{CD}$

সমানুপাত : যদি চারটি রাশি A, B, C, D এমন হয় যে $A:B = C:D$ হয়, তবে A, B, C, D কে সমানুপাতিক বলা হয়। এখানে D কে চতুর্থ সমুনপাতী বলা হয় $A:B = C:D$ কে অনেক সময় $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ আকারেও লিখা হয় এখানে D কে প্রান্তিক রাশি এবং B ও C কে মধ্যরাশি বলে।
আবার যদি তিনটি রাশি A, B, C এমন হয় যে $A:B = B:C$ হয়, তাহলে A, B, C কে ক্রমিক সমানুপাতিক বলা হয় এবং C কে তৃতীয় সমানুপাতী বলা হয়।
রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তকরন

চিত্র ক　　　　চিত্র খ

চিত্র ১৫.১

উপরের চিত্রে P যদি AB সরলরেখার উপর এমন বিন্দু যেন AP : PB = A:B হয়, তবে P বিন্দু AB রেখাংশকে A:B অনুপাতে ভায় করেছে বলা হয়। চিত্র 'ক' এ বিভক্তকরন অন্ত:স্থভাবে এবং চিত্র 'খ' এ বিভক্তকরন বহিঃস্থভাবে হয়েছে।

অনুপাত ও সমানুপাত সংক্রান্ত কতিপয় প্রতিজ্ঞা

1. $a : b = x : y$ এবং $c : d = x : y$ হলে $a : b = c : d$ হবে
2. $a : x = b : x$ হলে $a = b$ হবে
3. যদি $a : b = c : d$ বা $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হয় তবে,

   i) $ad = bc$ হবে [বজ্রগুনন বা আড়গুনন]

   ii) $b : a = d : c$ বা $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ হবে [ব্যস্তকরন]

   ii) $a : c = b : d$ বা $\frac{a}{c} = \frac{b}{a}$ হবে [একান্তর করন]

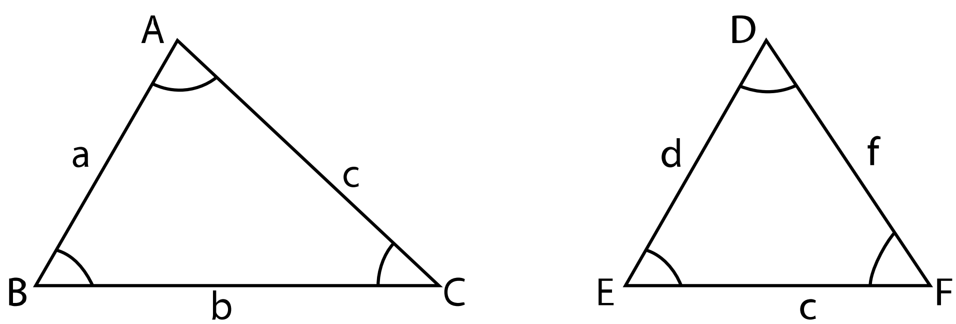
   iv) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ হবে [যোজন]

   v) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ হবে [বিয়োজন]

   vi) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হবে [যোজন-বিয়োজন]
4. যদি $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{c}{f} = \frac{g}{h}$ ....হয় তবে,

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{c}{f} = \frac{g}{h} = ... = \frac{a+c+e+g+.......}{b+d+f+h+.......}$ হবে

সাদৃশ্য : দুইটি ত্রিভুজের একটির তিনটি কোন যথাক্রমে অপরটির কোনের সমান হলে ত্রিভুজদ্বয়কে সাদৃশ্যকোনী বলা হয়।



চিত্র ১৫.২

মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, এবং $\angle C = \angle F$ । অতএব ΔABC ও ΔDEF সাদৃশ্যকোনী।

সদৃশকোনী ত্রিভুজের সমান সমান দুইটি কোনকে অনুরূপ কোন বলে। চিত্রে $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ যথাক্রমে $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$ ও এর অনুরূপ কোন বলা হয়। আবার সমান সমান কোনের বিপরীত বাহুদ্বয়কে অনুরূপ বাহু বলা হয় অর্থাৎ AB, BC ও AC বাহুকে যথাক্রমে DE, EF ও DF বাহুর অনুরূপ বাহু বলা হয়। যদি AB, BC ও AC বাহুকে যথাক্রমে a, b এবং DE, EF ও DF বাহুকে যথাক্রমে d, c, f দ্বারা সূচিত করা হয় তবে A : D = B : E = C : F হবে।

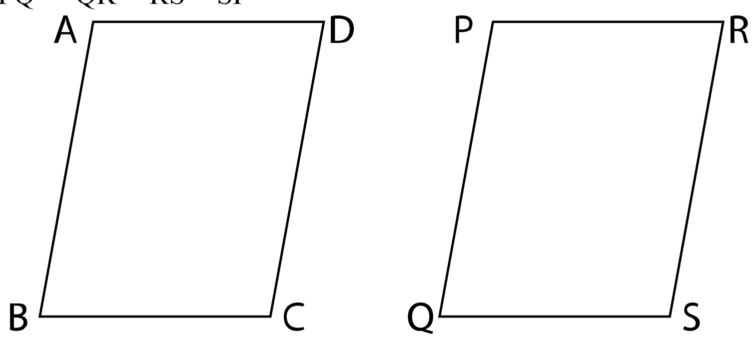
সমান সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের ক্ষেত্রে যদি বহুভুজ দুইটির

(ক) সদৃশকোনী হয় এবং

(খ) তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হয়
তবে বহুভুজ দুইটি সদৃশ হবে।
দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, শর্ত (ক) ও (খ) এর যে কোন একটি সত্য হলে অপরটি সত্য হয়। সুতরাং দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোনী হলে তারা অবশ্যই সদৃশ হবে। কিন্তু চতুর্ভূজ, পঞ্চভুজ ইত্যাদির ক্ষেত্রে তা নাও হতে পারে।
চিত্রে ΔBCD ও PQRS সদৃশ হবে

i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$
$\angle C = \angle R, \angle D = \angle S$ এবং

ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$ হয়



চিত্র ১৫.৩

সদৃশ ও সর্বসমতা

দুইটি ত্রিভুজ কখন সদৃশ ও কখন সর্বসম হয় তা নিম্নে দেওয়া হল :

সদৃশ	**সর্বসম**
১। দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু অন্যটির দুই বাহুর সাথে সমানুপাতিক এবং অন্তর্ভুক্ত কোনদ্বয় সমান ২। দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু অপরটির তিনবাহুর সাথে সমানুপাতিক ৩। দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন কোন অপরটির তিন কোনের সমান	১। দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু অপর দুই বাহুর সমান এবং অন্তভুক্ত কোনদ্বয় সমান ২। দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমান ৩। দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই কোন অপরটির দুই কোন এবং একটির এক বাহু অপরটির অনুরূপ বাহুর সমান।

অনুশীলনী ১৫.১

১। দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের মধ্যে ছোট ত্রিভুজের বাহুগুলো ৩, ৪, ও ৫সেমি: এবং বড় ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহুটি ৭ সেমি: হলে অপর বাহুগুলোর পরিমান কত? [উঃ $\frac{28}{3}$ সেমি: $\frac{35}{3}$ সেমি:]

২। পাশের চিত্রে ΔAOB ও ΔCOD সদৃশ। এদের কয়েকটি কোন ও বাহুর পরিমাপ দেওয়া আছে। নিচের গুলো নির্ণয় করুন।

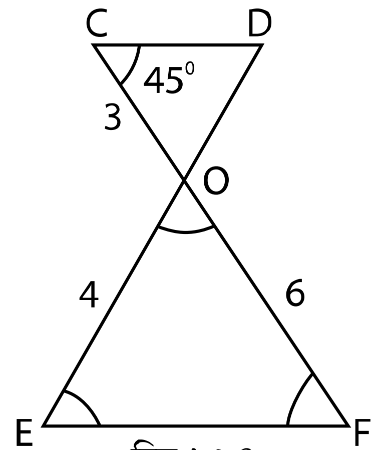
$\angle D$ = কত?

$\angle AOB$ = কত?

$\angle COD$ = কত?

OD = কত?

[উঃ $\angle D = 45^0$, $\angle AOB = 83^0$, $\angle COD = 83^0$, $\angle OD = 5^0$]



চিত্র ১৫.৪

৩। দুইটি বর্গক্ষেত্র ও দুইটি আয়তক্ষেত্র কি সদৃশ?

৪। একটি বহুভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে 3”, 5”, 6”, 8” ও 10” এ সদৃশ একটি বাহুভুজের পরিসীমা 40^0 হলে তার বাহুগুলোর পরিমাপ নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{15"}{4}$, $\frac{25"}{4}$, $\frac{15"}{2}$, 10”, $\frac{25"}{2}$]

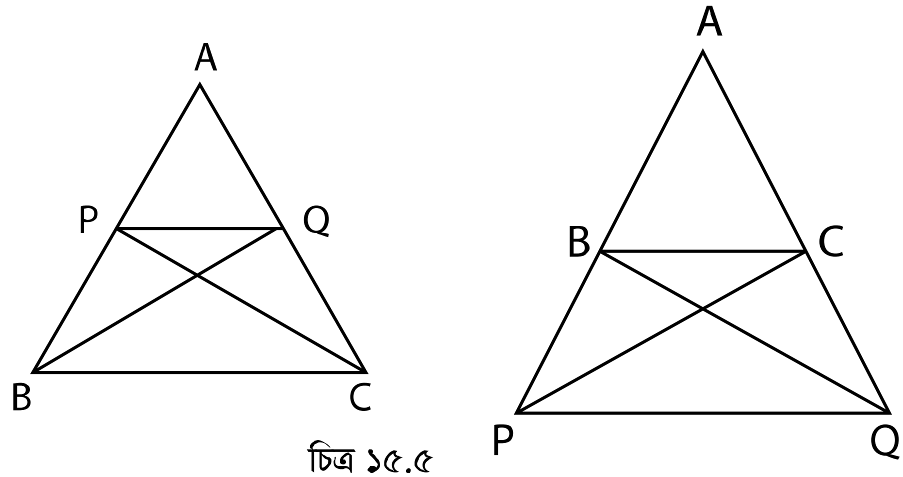
পাঠ ২ অনুপাত সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য

উদ্দেশ্য : এই পাঠ শেষে আপনি

- অনুপাত সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য প্রমান ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

উপপাদ্য ১৫.১

ত্রিভুজের কোন এক বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা তার অপর দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।



চিত্র ১৫.৫

মনে করুন, PQ সরলরেখা ΔABC এর BC বাহুর সমান্তরাল PQ, AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করতে হবে যে, AP : PB = AQ : QC

অঙ্কন : B, Q এবং C, P যোগ করুন।

প্রমান : ΔAPQ ও ΔBPQ একই শির্ষবিন্দু বিশিষ্ট বলে এদের উপর

$$\frac{\Delta APQ}{\Delta BPQ} = \frac{AP}{BP}$$

অনুরূপভাবে

$$\frac{\Delta APQ}{\Delta CPQ} = \frac{AQ}{BQ}$$

এখন $\Delta BPQ = \Delta CPQ$ ও একই ভূমি PQ এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলে অবস্থিত।

সুতরাং $\frac{\Delta APQ}{\Delta BPQ} = \frac{\Delta APQ}{\Delta CPQ}$

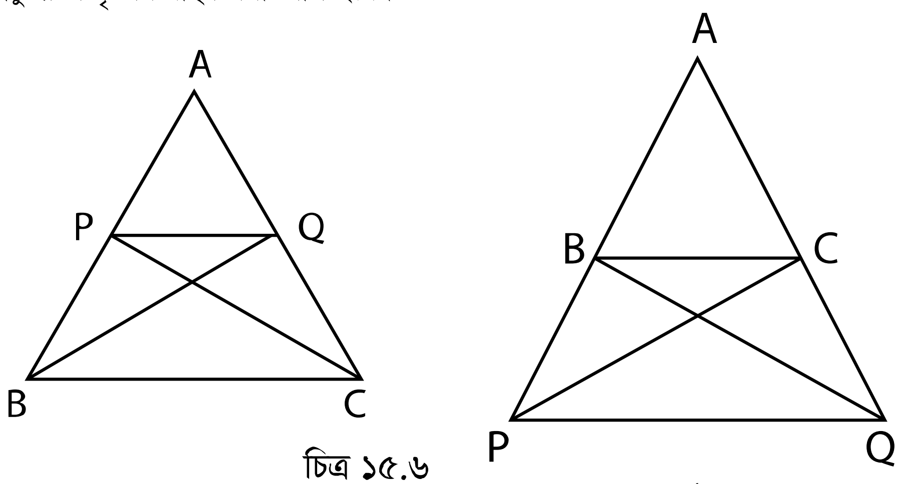
$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$$

অর্থাৎ PQ ।। PB = AQ : QC

মন্তব্য : PQ ।। PB হলে, $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ এবং $\frac{BP}{AB} = \frac{CQ}{AC}$ হবে

উপপাদ্য ১৫.২

কোন সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে, উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।



চিত্র ১৫.৬

মনে করুন PQ সরলরেখা ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশ দুইটিকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে। অর্থাৎ PB = AQ : QC

প্রমান করতে হবে যে, PQ ।। BC

অঙ্কন : B, Q, ও C, P যোগ করুন।

প্রমান : ΔAPQ ও ΔPQB একই উচ্চতা বিশিষ্ট বলে

$$\frac{\Delta APQ}{\Delta PQB}=\frac{\Delta AP}{\Delta PB}$$

আবার, ΔAPQ ও ΔPQC একই উচ্চতা বিশিষ্ট বলে

$$\frac{\Delta APQ}{\Delta PQC}=\frac{\Delta AQ}{\Delta QC}$$

কিন্তু $\frac{\Delta AP}{\Delta PB}=\frac{\Delta AQ}{\Delta QC}$ [দেওয়া আছে]

$$\therefore \frac{\Delta APQ}{\Delta PQB}=\frac{\Delta APQ}{\Delta PQC}$$

$\therefore$ ΔPQB ও ΔPQC

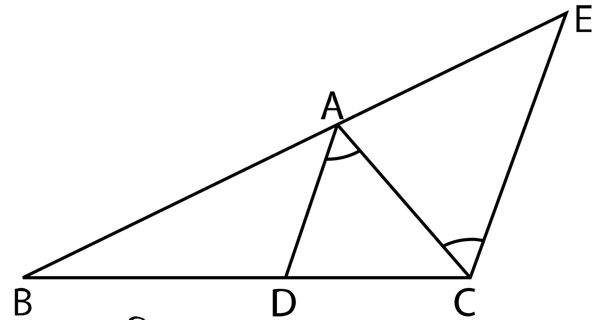
কিন্তুΔPQB ও ΔPQC একই ভূমি PQ এর উপর এবং এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

সুতরাং তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$PQ ।। BC (প্রমানিত)

উপপাদ্য ১৫.৩

ত্রিভুজের যে কোন কোনের সমদ্বিখন্ডক বিপরতি বাহুকে উক্ত কোন সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাত অন্ত:স্থভাবে বিভক্ত করে।



চিত্র ১৫.৭

মনে করুন, AD রেখাংশ ΔABC এর $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডিক AD, BC এর সাথে D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমান করতে হবে যে, $BD : DC = BA : AC$

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে $CE \parallel DA$ টানুন যেন CE রেখা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমান : $DA \parallel CE$ বলে

$\angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোন]

এবং $\angle ACE = \angle DAC$ [একান্তর কোন]

কিন্তু $\angle BAD = \angle DAC$ [দেওয়া আছে]

$\therefore\ \angle AEC = \angle ACE$

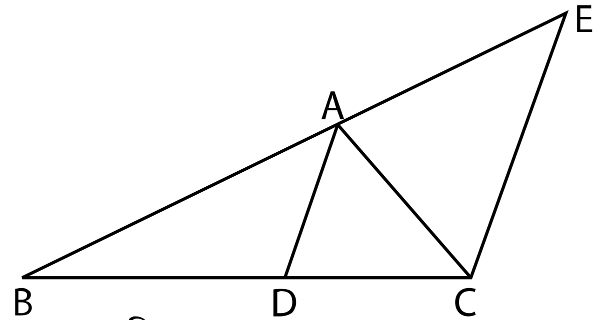
সুতরাং $AE = AC$

আবার ΔBCE-এ $DA \parallel CE$ বলে, $\dfrac{\Delta BA}{\Delta AE} = \dfrac{\Delta BD}{\Delta DC}$

$BD : DC = BA : AC$ [$\because AE = AC$] (প্রমানিত)

উপপাদ্য ১৫.৪

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্ত:স্থভাবে বিভক্ত হলে, বিভাগ বিন্দু থেকে বিপরীত শীষ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ উক্ত শীর্ষকোনের সমদ্বিখন্ডক হবে।



চিত্র ১৫.৮

মনে করুন, ΔABC-এর বিন্দু থেকে অঙ্কিত রেখাংশ AD ও BC বাহুকে D বিন্দুতে এমনভাবে অন্তবিভক্ত করেছে যে $BD : DC = BA$ প্রমান করতে হবে যে, AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক

অর্থাৎ $\angle BAD = \angle CAD$

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে $CE \parallel DA$ টানুন যেন CE রেখা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমান : ΔBCE এ $CE \parallel DA$

$\therefore BA : AE = BD : DC$

কিন্তু $BD : DC = BA : AC$ [দেওয়া আছে]

$\therefore BA : AE = BA : AC$

$\therefore AE = AC$

অতএব $\angle ACE = \angle AEC$

কিন্তু$\angle AEC =$ অনুরূপ $\angle BAD$

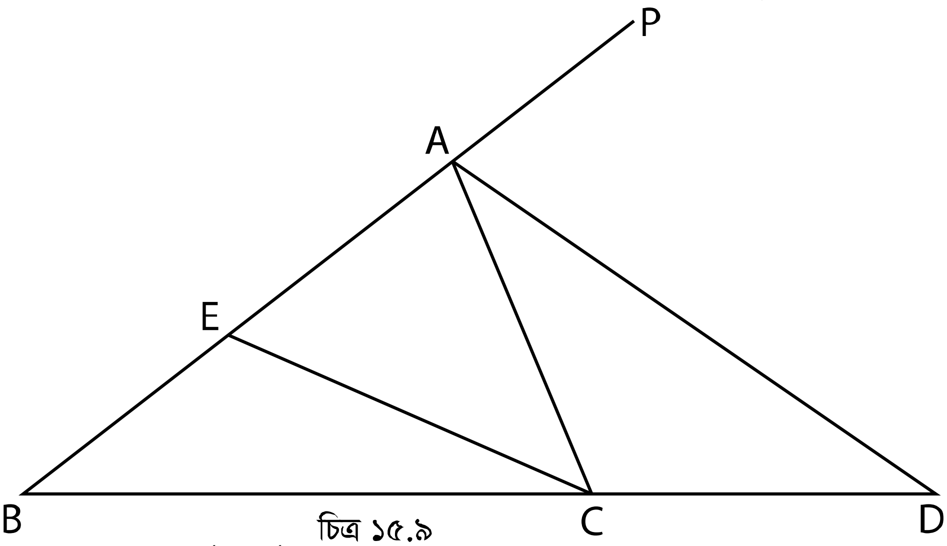
এবং $\angle ACE =$ একান্তর $\angle CAD$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

অর্থাৎ ADরেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক

উপপাদ্য ১৫.৫

ত্রিভুজের যে কোন কোনের বহির্দ্বিখন্ডক বিপরীত বাহুকে উক্তকে সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।



চিত্র ১৫.৯

ΔABC এর BA বাহুকে P পর্যন্ত বর্ধিত করে বহি:স্থ $\angle CAP$ উৎপন্ন করা হয়েছে। $\angle CAP$ এর সমদ্বিখন্ডক অর্থাৎ $\angle BAC$ এর AD বহির্দ্বিখন্ডক BC রেখা রেখার বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করতে হবে যে, $BD : OC = AB : AC$

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে $AD \parallel CE$ অঙ্কন করুন যেন CE রেখা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমান : যেহেতু $AD \parallel CE$

$\therefore \angle CEA = \angle DAP$ [অনুরূপ কোন]

এবং $\angle ECA = \angle CAD$ [একান্তর কোন]

কিন্তু$\angle CAD = \angle DAP$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle CEA = \angle ECA$

$\therefore AC = AE$

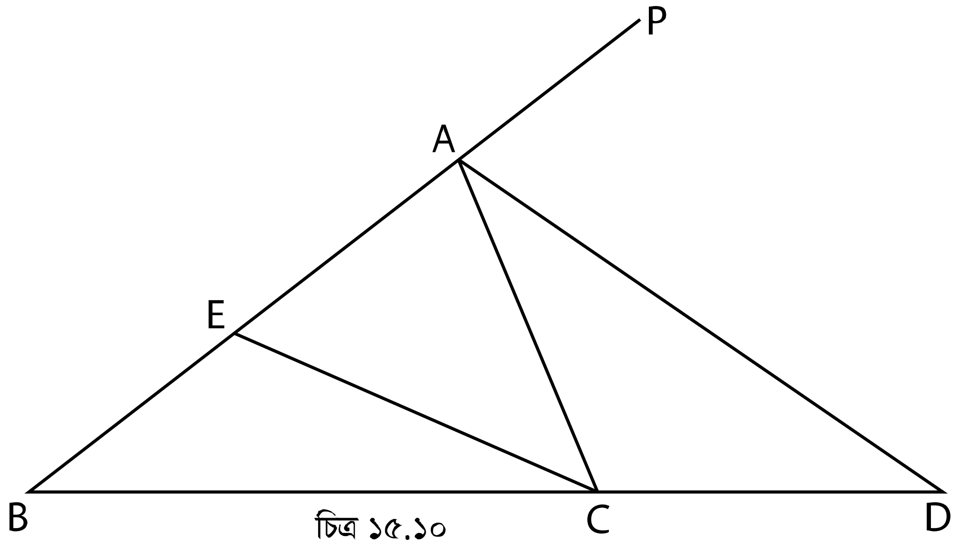
আবার, যেহেতু $AD \parallel CE$

$\therefore BD : DC = BA : AE$

$\therefore BD : DC = BA : AE$ [$\because AE = AC$] (প্রমানিত)

উপপাদ্য ১৫.৬

ত্রিভুজের যে কোন বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে বিভাগ বিন্দু ও বিপরীত শীর্ষবিন্দুর সংযোজক রেখা উক্ত কোনের বহির্দ্বিখন্ডক হবে।



চিত্র ১৫.১০

মনে করুন, ΔABC এর BC বাহু D বিন্দুতে এমনভাবে বিহিবিভক্ত হয়েছে যে BD : DC = AB = AC. AD যোগ করুন এবং AB কে P পর্যন্ত বর্ধিত করুন। তাহলে বহিস্থ $\angle CAP$ উৎপন্ন প্রমান করতে হবে AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর বহির্দ্বিখন্ডক অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle CAP$ এর সমদ্বিখন্ডক অর্থাৎ $\angle CAD = \angle DAP$

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে AD ॥ CE অঙ্কন করুন যেন CE রেখা B E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমান : যেহেতু CE ॥ AD

$\therefore$ BD : DC = BA : AE

কিন্তু BD : DC = BA : AC

$\therefore$ BA : AE = BA : AC

$\therefore$ AE = AC

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$

আবার $\angle AEC$ = অনুরূপ $\angle DAP$

এবং $\angle ACE$ = একান্তর $\angle CAD$

$\therefore \angle DAP = \angle CAD$

অতএব AD রেখাংশ $\angle CAP$ কে সমদ্বিখন্ডিত করে

অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর বহির্দ্বিখন্ডক

অনুশীলনী ১৫.২

১) এর মধ্যমা ও পরস্পর বিন্দুতে ছেদ করেছে। এবং কে বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করুন যে,

২) এর মধ্যকার মধ্যবিন্দু এবং কে বর্ধিত করলে তা কে বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করুন যে এবঙ

৩) এ এর সমদ্বিখন্ডক কে বিন্দুতে ছেদ করে এর সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা ও কে যথাক্রমে ও বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করুন যে

৪) এর বাহুর যে কোন বিন্দু এবং এর উপর একটি বিন্দু। প্রমান করুন যে,

৫) এ মধ্যমা। এর সমদ্বিখন্ডক কে এর এর সমদ্বিখন্ডক কে বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করুন যে,

৬) সামান্তরিকে এর সমদ্বিখন্ডক এর সাথে বিন্দুতে এবং এর সাথে বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমান করুন যে,

৭) ট্রপিজিয়মের যদি এর সমান্তরাল রেখা ও কে যথাক্রমে ও বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে প্রমান করুন যে,

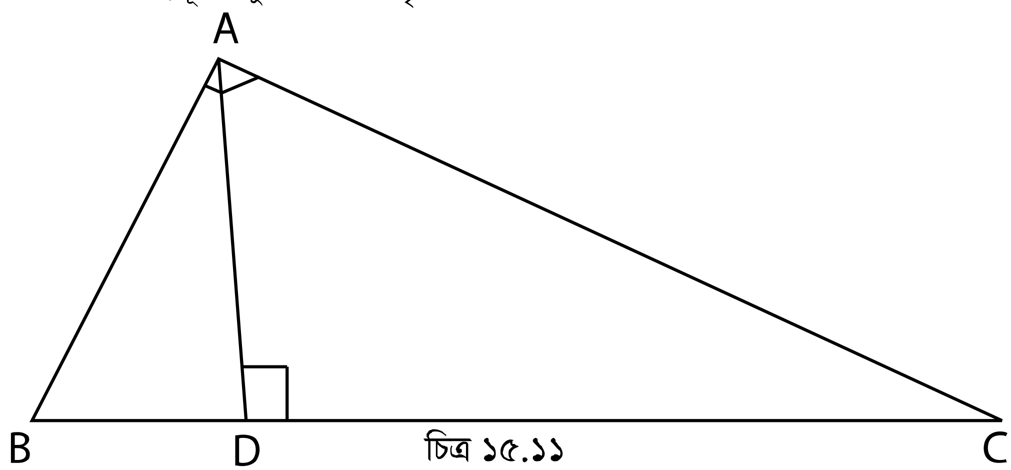
পাঠ ৩ সদৃশ্য সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য

উদ্দেশ্য : এই পাঠ শেষে আপনি

- সাদৃশ্য সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য প্রমান ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

উপপাদ্য ১৫.৭

কোন সমকোনী ত্রিভুজের সমকৌনিক শীর্ষ হতে অতিভুজের উপর লম্ব আকলে যে দুইটি সমকোনী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তার পরস্পর এবং মূল ত্রিভুজের সাথে সদৃশ।



চিত্র ১৫.১১

ΔABC এর $\angle$A সমকোন A হতে BC এর উপর AD লম্ব প্রমান করতে হবে ΔABD ও ΔACD সদৃশ এবং তারা উপর ΔABC এর সদৃশ।

প্রমান : ΔABC ও ΔABD এ $\angle$B সাধারন কোন

$\angle BAC = \angle ADB$ [এক সমকোন]

এবং $\angle C = \angle BAD$ [উভয় $\angle$CAD এর পূরক]

$\therefore$ ΔABC ও ΔABD সদৃশ

আবার $\angle$ABC ও $\angle$ADC এর $\angle$C সাধারন কোন

$\angle BAC = \angle ADC$ [এক সমকোন]

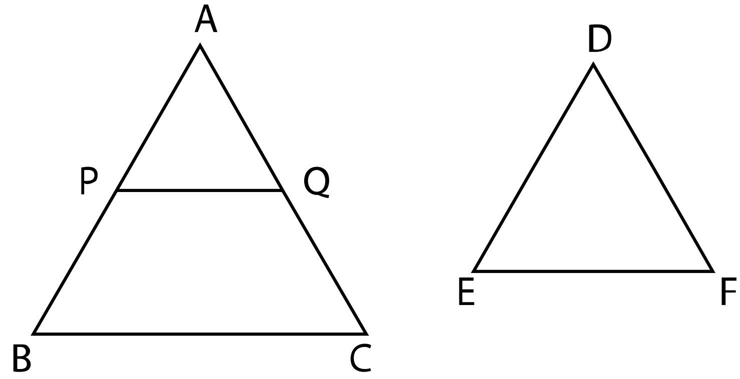
$\angle B = \angle CAD$ [উভয়ই $\angle$BAD এর পূরক]

$\therefore$ ΔABC ও ΔACD সদৃশ

$\therefore$ ΔABD ও ΔACD সদৃশ [উভয়ই ΔABC এর সদৃশ]

উপপাদ্য ১৫.৮

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোনী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হবে।



চিত্র ১৫.১২

মনে করুন ΔABC ও ΔDEF-এ $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

প্রমান করতে হবে যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

অঙ্কন : ধরুন $\Delta ABC > \Delta DEF$, তাহলে AB হতে AP = DE = AC হতে AQ = DF কাটুন । P, Q যোগ করুন।

প্রমান : ΔAPQ ও ΔDEF- এ

AP = DE, AQ = DF এবং $\angle PAQ = \angle EDF$

$\therefore \Delta APQ \cong \Delta DEF$

$\therefore \Delta APQ \cong \Delta DEF = \angle B$

কিন্তু $\angle APQ = \angle B$ ও অনুরূপ কোন

$\therefore PQ \parallel BC$

$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ [$\because$ AP = DE এবং AQ = DF]

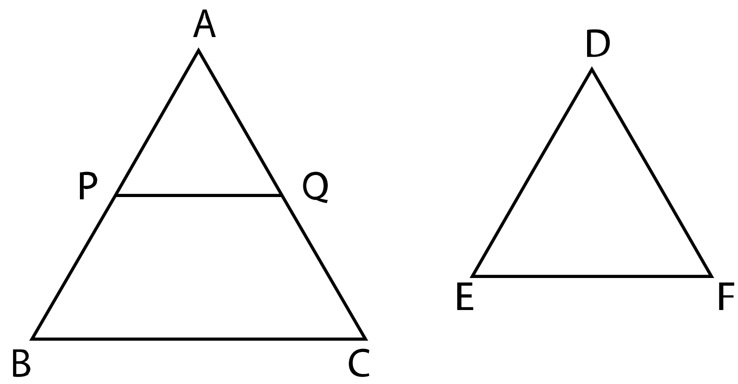
অনুরূপভাবে BA ও BC হলে ED ও EF এর সমান অংশ কেটে নিয়ে দেখান যায় যে,

$\frac{BA}{ED} = \frac{BC}{EF}$ বা $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

সুতরাং $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ (প্রমানিত)

উপপাদ্য ১৫.৯

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ্যকোনী এবং তাদের অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোনগুলো পরস্পর সমান হবে।



চিত্র ১৫.১৩

মনে করুন ΔABC ও ΔDEF এর $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

প্রমান করতে হবে যে, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

অঙ্কন : ধরুন $\Delta ABC > \Delta DEF$ তাহলে AB হতে AP = DE এবং AC হতে AQ = DF কাটুন। P, Q যোগ করুন।

প্রমান : যেহেতু $\frac{AB}{DF} = \frac{AC}{DF}$

সুতরাং $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$

$\therefore PQ \parallel BC$

$\therefore \angle ABC =$ অনুরূপ $\angle APQ$

এবং $\angle ACB =$ অনুরূপ $\angle AQP$

$\therefore$ ΔABC ও ΔAPQ সদৃশকোনী

সুতরাং $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PQ}$ বা $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{PQ}$

$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{PQ}$ $[\because \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}]$

$\therefore EF = PQ$

সুতরাং $\Delta APQ \cong \Delta DEF$ [একটি তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমান বলে]

$\therefore \angle PAQ = \angle EDF, \angle APQ = \angle DEF, \angle AQP = \angle DEF$

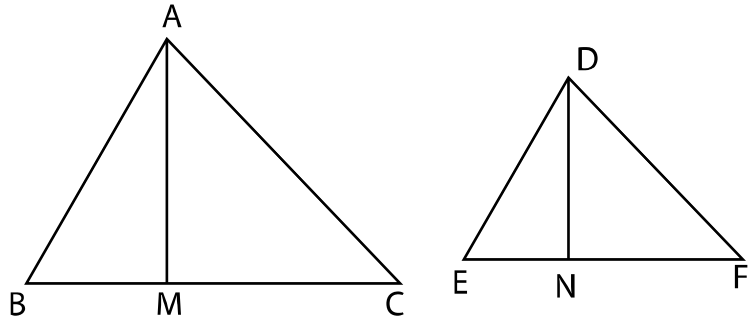
কিন্তু $\angle APQ = \angle ABC$ এবং $\angle APQ = \angle DEF, \angle AQP = \angle ACB$

$\therefore \angle PAQ = \angle EDF, \angle ABC = \angle DEF, \angle ACB = \angle DFE$

অর্থাৎ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ (প্রমানিত)

উপপাদ্য ১৫.১০

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যে কোন দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের অনুপাতে সমান।



চিত্র ১৫.১৪

মনে করুন BC ও EF সৃদশ। অর্থাৎ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle D$ ও $\angle C = \angle F$ এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

প্রমান করতে হবে যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

অঙ্কন : BC ও EF এর উপর যথাক্রমে AM ও DN লম্ব অঙ্কন করুন।

প্রমান : ΔABC ও ΔDEN এ সদৃশকোনী

কারণ $\angle B = \angle E$ এবং $\angle AMB = \angle DNE$

$\therefore \frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE}$

কিন্তু $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$\therefore \frac{BO}{EF} = \frac{AM}{DN}$

এখন ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ x BC x AM

এবং ΔDEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ x EF x DN

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} \text{ x BC x AM}}{\frac{1}{2} \text{ x EF x DN}}$$

$$= \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AM}{DN}$$

$$= \frac{BC}{EF} \cdot \frac{BC}{EF} \left[\because \frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF}\right]$$

$$= \frac{BC^2}{EF^2}$$

অবার $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

$\therefore \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$ (প্রমানিত)

অনুশীলনী ১৫.৩

১) ΔABC ও ΔDEF সদৃশ্যকোনী এবং AM ও DN তাদের উচ্চতা
প্রমান করুন যে, $AM : DN = AB : DE$

২) ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$, প্রমান করুন যে ΔABC ও $\Delta DEF = AB.AC : DE.D$

৩) ΔABC সমকোনী এবং BC তার অতিভুজ। $AD \perp BC$ হলে প্রমান করুন যে, $BD : CD = AB^2:AC^2$

৪) দুইটি ত্রিভুজের একটির এককোন অপরটির এক কোনের সমান হলে এবং সমান সমান কোন সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।

৫) 0 কেন্দ্র বিশিষ্ট কোন বৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি দুইটি সমান্তরাল স্পর্শককে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করুন যে, $PQ.PR = OP^2$

৬) ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক রেখা BC কে D বিন্দুতে এবং ABC বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করুন যে, $AD^2 = AB.AC - BD.CD$

৭) 0 কেন্দ্রিক কোন বৃত্তের বহি:স্থ কোন বিন্দু P থেকে PAও PBবৃত্তে দুইটি স্পর্শক। প্রমান করুন যে, $\Delta PAB : \angle AOB = PA^2 : OA^2$