ইউনিট ১৬

ত্রিভুজ ও বৃত্তবিষয়ক কতিপয় উপপাদ্য

উদ্দেশ্য : এই ইউনিট শেষে আপনি

- ত্রিভুজ সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য প্রমান ও প্রয়োগ দক্ষতা অর্জন করবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য প্রমান ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

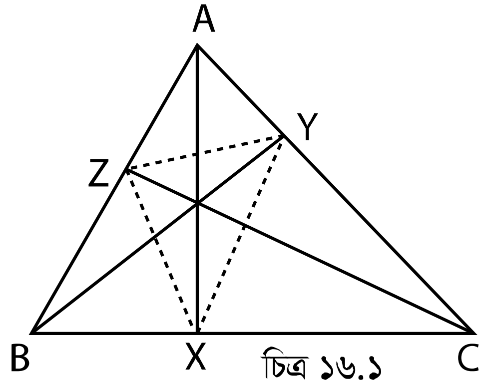
পাঠ : ত্রিভুজ সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য

উদ্দেশ্য : এই পাঠ শেষে আপনি

- ত্রিভুজ সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য প্রমান ও প্রয়োগ দক্ষতা অর্জন করবেন।

উপপাদ্য ১৬.১

সূক্ষকোনী ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব পাদত্রিভুজের কোনকে সমদ্বিখন্ডিত করে।



চিত্র ১৬.১

ABC একটি সূক্সকোনী ত্রিভুজ এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত AX, BY ও CZ লম্বত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

X, Y, Y, Z এবং ZX যোগ করুন। XYZ পাদত্রিভুজ প্রমান করতে হবে যে, AX, BY ও CZ যথাক্রমে $\angle ZXY$, $\angle XYZ$, $\angle YZX$ কে সমদ্বিখন্ডিত করে।

প্রমাণ : O, X, C, Y এই চারটি বিন্দু সম্পৃক্ত

[$\because \angle OXC$ বিপরীত $\angle OYC$ এক সমকোন]

$\therefore \angle OXC = \angle OCY$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোন বলে]

কিন্তু $\angle OCY = \angle OBZ$ (প্রত্যেকেই $\angle BAC$এর পূরক কোন বলে)

$\therefore \angle OXZ = \angle OXY$

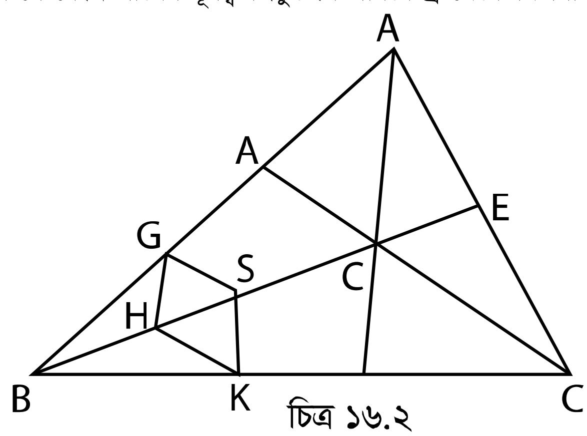
$\therefore$ AX, $\angle ZXY$- এর সমদ্বিখন্ডক।

এইরূপে প্রমান করা যায় যে, $\angle XYZ$ ও $\angle YZX$

যথাক্রমে BY ও CZ দ্বারা সমদ্বিখন্ডিত হয়।

উপপাদ্য ১৬.২

ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে এর যে কোন শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুন।



চিত্র ১৬.২

ABC ত্রিভুজ O লম্ব বিন্দু S পরিকেন্দ্র SK, BC এবং এর লম্বদ্বিখন্ডক। প্রমান করতে হবে যে, O থেকে A এর দূরত্ব S থেকে BC এর দুরত্বের দ্বিগুন; অর্থাৎ OA = 2SK

অঙ্কন : H ও G যথাক্রমে OB ও AB এর মধ্যবিন্দু নিন G, S ও G, H এবং H, K যোগ করুন।

প্রমান : ΔBOC-এ BH = HO এবং BK = KC

$\therefore$ KH ॥ CO বা CF

এখন CF ও SG এর প্রত্যেকেই AB এর উপর লম্ব।

$\therefore$ CF ॥ SG

$\therefore$ KH ॥ SG

আবার ΔAOB এ AG = BG এবং OH = BH

$\therefore$ GH ॥ AO বা AD

এখন SK ও AD এর প্রত্যেকেই BC এর উপর লম্ব।

$\therefore$ SK ॥ AD

$\therefore$ GH ॥ SK

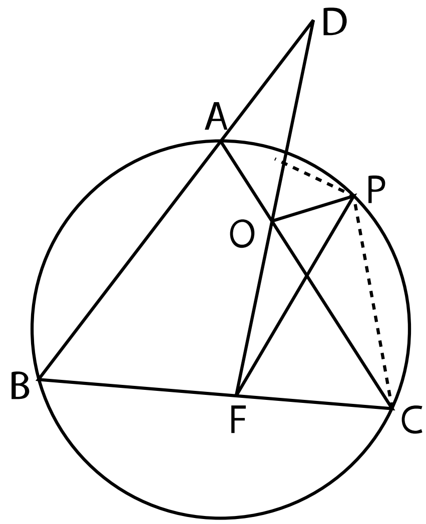
যেহেতু SG ॥ KH এবং GH ॥ SK

$\therefore$ GSKH একটি সামন্তরিক

$\therefore$ SK = GH = $\frac{1}{2}$ AO অর্থাৎ AO = 2SK

উপপদ্য ১৬.৩

ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থিত যে কোন বিন্দু থেকে এর বাহুত্রয়ের উপর অংকিত লম্ব তিনটির পাদবিন্দুগুলো সমরেখ হবে।



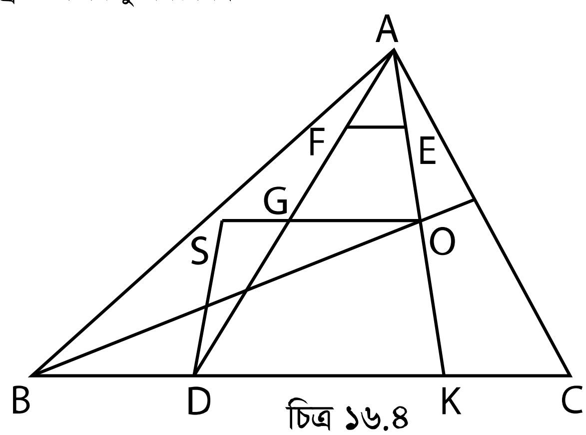
চিত্র ১৬.৩

ΔABC এর পরিবৃত্তস্থিত যে কোন বিন্দু P থেকে PD, PO ও PF যথাক্রমে AB, AC ও BC এর উপর লম্ব।
প্রমান করতে হবে যে, D, O, F বিন্দুগুলো একই সরলরেখায় অবস্থিত।
F, O এবং O, D যোগ করি। এখন FO এবং OD একই সরলরেখায় অবস্থিত দেখাতে।
অংকন : $\angle A$, P ও C, P যোগ করুন।
প্রমান : $\angle PDA + POA = 2$ সমকোন [$\because$ প্রত্যেকেই সমকোন]
$\therefore$ A, D, P, O সমবৃত্ত।
$\therefore$ $\angle PDA = PAD$ (একই বৃত্তাংশস্থিত কোন বলে)
$= \angle PAB$ এর সম্পূরক
$= \angle PCB$ $\angle PCF$

আবার $\angle POC =$ $\angle PFC$ একসমকোন
$\therefore$ P, O, F, C সমবৃত্ত।
$\therefore$ $\angle POF = \angle PCF$- এর সম্পূরক $= \angle POD$ এর সম্পূরক
$\therefore$ $\angle DOF + \angle POD = 2$ সমকোন
সুতরাং FO, OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।
মন্তব্য : FOD সরলরেখাটি সিমসম রেখা নামে পরিচিত।

উপপাদ্য ১৬.৪

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।



চিত্র ১৬.৪

মনে করুন, ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু এবং S পরিকেন্দ্র BC-এর মধ্যাবিন্দু D নিন। A, D এবং S, O যোগ করি। SO, AD কে G বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমান করতে হবে যে, G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

অঙ্কন : AO এর মধ্যবিন্দু E দিয়ে OS এর সমান্তরাল EF আকুন। EF, AD-কে F বিন্দুতে ছেদ করল।

প্রমান : E, AO-এর মধ্যবিন্দু এবং EF ॥ OS

$\therefore$ F, AG-এর মধ্যবিন্দু, অর্থাৎ AF = FG

আবার AEF ও DGS ত্রিভুজদ্বয়ের

SD = AE $\angle$DGS = AFE,

$\angle$SDG = $\angle$FAE [$\because$ SD ॥ AK]

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta DGS$

$\therefore$ AF = GD

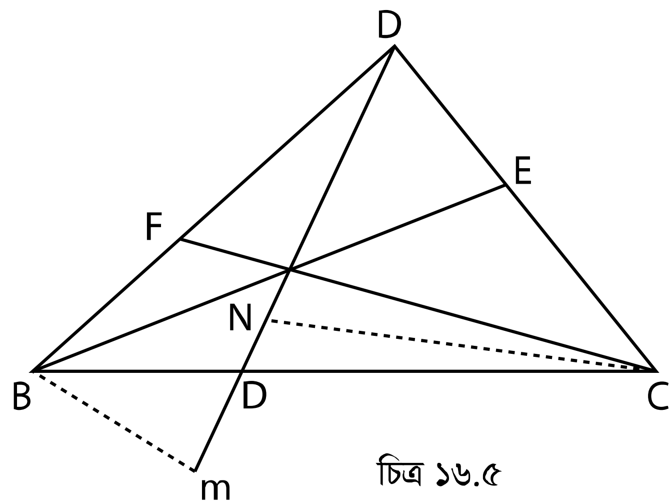
ফলে AF = FG = GD সুতরাং GD = $\frac{1}{3}$AD

$\therefore$ G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র

(প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৬.৫

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুএয়কে অপর যে কোন এক বিন্দুর সঙ্গে যুক্ত করে প্রাপ্ত সরলরেখা তিনটি যদি ত্রিভুজের বাহুগুলোর সংঙ্গে মিলিত হয়, তবে বাহুগুলোর একান্তর অংশগুলোর গুনফল অবশিষ্ট অংশত্রয়ের পুনফলর সমান হয়।



চিত্র ১৬.৫

মনেকরি ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ABC কে O বিন্দুর সংঙ্গে যুক্ত করে প্রাপ্ত সরলরেখাক্রম বিপরীত বাহুগুলোকে DE ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করতে হবে যে, BD, CE, AF = DC, EA, FB

অঙ্কন : B ও C থেকে AD রেখার উপর যথাক্রমে BM ও CN লম্ব আকুন।

প্রমান : BDM ও ΔCDN সদৃশকোনী।

$\therefore \frac{BM}{CN} = \frac{BD}{DC}$

এখন, $\frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} = \frac{\frac{1}{2}AO.BM}{\frac{1}{2}AO.CN} = \frac{BM}{CN} = \frac{BD}{DC}$

এইরূপে $\frac{\Delta BOC}{\Delta AOB} = \frac{CE}{EA}$; $\frac{\Delta AOC}{\Delta BOC} = \frac{AF}{FB}$

এই অনুপাত তিনটিকে গুন করে পাই,

$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB}$

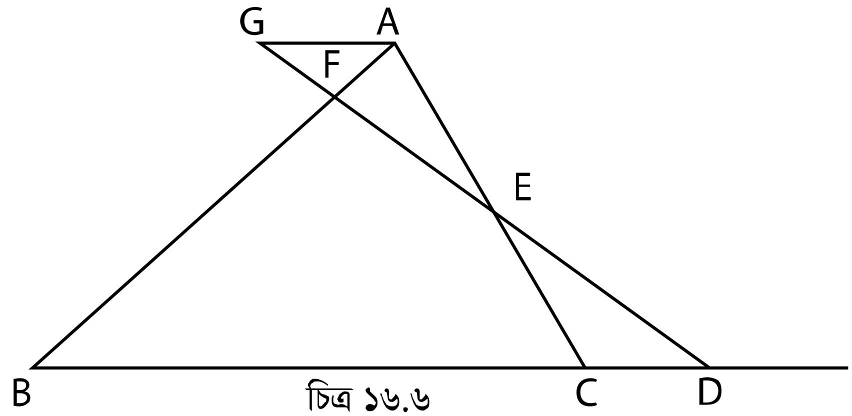
$= \frac{\Delta AOB}{\Delta AOC} \cdot \frac{\Delta BOC}{\Delta AOB} \cdot \frac{\Delta AOC}{\Delta BOC} = 1$

$\therefore$ BD. CE. AF = DC. EA. FB

মন্তব্য : এই উপপাদ্যকে সিভার উপপাদ্য বলে।

উপপাদ্য ১৬.৬

যদি কোন সরলরেখা একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোকে অথবা বাহুগুলোর বর্ধিতাংশ সমূহকে ছেদ করে, তাহলে বাহুত্রয়ের ছিন্ন বিভাগগুলোর একান্তর অংশদ্বয়ের গুনফল অপর তিন অংশের গুনফলের সমান হবে।



চিত্র ১৬.৬

মনে করি, DE সরলরেখা ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুত্রয়কে যথাক্রমে D, E, F বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমান করতে হবে যে, BD. CE. AF = DC. EA. FB

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়ে AG = BC আকুন যেন তা DE রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমান : ΔFAG ও ΔBFD সদৃশকোনী, কেননা

$\angle AFG = \angle BFD$ (বিপ্রতীপ কোন)

এবং $\angle FAG = \angle DBF$ (একান্তর কোন)

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{AG}{BD}$$

অনুরূপভাবে ΔCED ও ΔAGE সদৃশকোনী

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{DC}{AG}$$

এই অনুপাতদ্বয় গুন করে পাই,

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{AG}{BD} \cdot \frac{DC}{AG} = \frac{DC}{BD}$$

$\therefore BD.CE.AF = DC.EA.FB$

এই উপপাদ্যটি মেনেলোর উপপাদ্য নামে পরিচিত।

অনুশীলনী ১৬.১

১) ΔABC-এ AD, BE, CF বিপরীত বাহুর উপর লম্ব এবং তারা 0 বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF

২) ΔABC-এ $\angle C$ সমকোন। C থেকে অতিভুজের উপর CD লম্ব। প্রমান করুন যে, $CD^2 = AD.BD$

৩) প্রমান রুন যে, সুক্ষকোনী ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ অংকন করলে অপর যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় ও মূল ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ।

৪) প্রমান করুন যে, সুক্ষকোনী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু তার পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

৫) ΔABC-এর লম্ববিন্দু 0 এবং পরিবৃত্তস্থ একটি বিন্দু X প্রমান করুন যে, X বিন্দুর পাদরেখা দ্বারা XO সমদ্বিখন্ডিত হয়।

৬) কোন বিন্দু থেকে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের উপর পতিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি একরেখীয় হলে বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় করুন।

৭) ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক BC কে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করুন যে, AP2 = BC $\{1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\}$

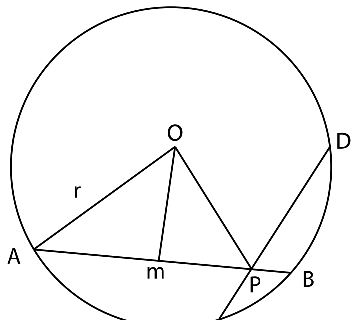
পাঠ ২ বৃত্ত সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য

উদ্দেশ্য : এই পাঠ শেষে আপনি

- বৃত্তসম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্র প্রমান ও প্রয়োগ দক্ষতা অর্জন করবেন।

উপপাদ্য ১৬.৭

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে, তবে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।



চিত্র ১৬.৭

দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করতে হবে যে, AP.PB = CP.PD

অঙ্কন : O থেকে AB এর উপর OM লম্ব আঁকুন। OP এবং OA যোগ করি।

প্রমান : $\because$ OM, AB এর উপর লম্ব,

$\therefore$ AM = MB

$\therefore$ AP. PB = (AM + MP) (MB –MP)

= (AM + MP) (AM – MP) [$\because$ AM = MP]

= $(AM^2 + MP^2)$

= $(AM^2 + OM^2) - (MP^2 + OM^2)$ [OM^2 যোগ ও বিয়োগ করে]

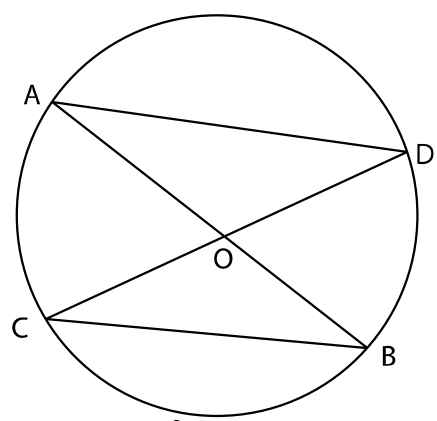
= $OA^2 + OP^2$

= $R^2 + OP^2$ (R = ব্যাসার্ধ)

এরূপে O থেকে CD এর উপর লম্ব একে প্রমান করা যায় যে, CP.PD = R^2-OP^2

$\therefore$ AP.PB = CP.PD

বিকল্প প্রমান :



চিত্র ১৬.৮

দেওয়া আছে, একটি বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্ব বৃত্তের ভিতরে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করতে হবে যে, $AO.OB = CO.OD$

অংকন : A, D এবং B, C যোগ করি।

প্রমান : ΔOAD ও ΔOBC-এ

$\angle A = \angle C$ (একই চাপ BD এর উপর অবস্থিত)

এবং $\angle D = \angle B$ (একই চাপ AC এর উপর অবস্থিত)

ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোনী।

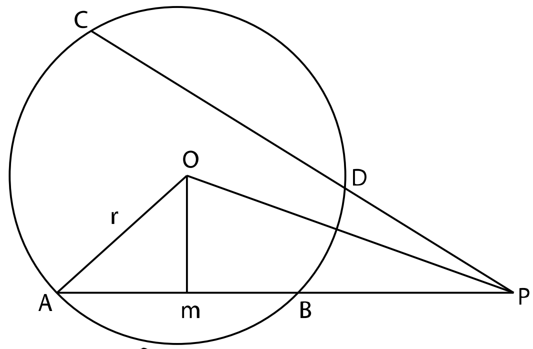
$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$

$\therefore AO.OB = CO.OD$

(প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১৬.৮

কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এর বধিতাংশ যদি বৃত্তের বহি:স্থ কোন বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে, তবে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।



চিত্র ১৬.৯

দেওয়া আছে, 0 কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD জ্যাদ্বয়ের বার্ধতাংশ বৃত্তের বাইরে বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করতে হবে যে, AP.PB = CP.PD

অঙ্কন: 0 থেকে AB এর উপর OM লম্ব আকুন। O, A এবং OP যোগ করুন।

প্রমান : $\because$ OM, AB-এর উপর লম্ব

$\therefore$ AM = MB

$\therefore$ AP.PB = (PM+MA) (PM-MB)

= (PM+MA) (PM-MA)

[MB = MA]

= PM^2-MA^2

= (PM^2+OM^2) – (MA^2+OM^2)

(OM^2 যোগ ও বিয়োগ করে)

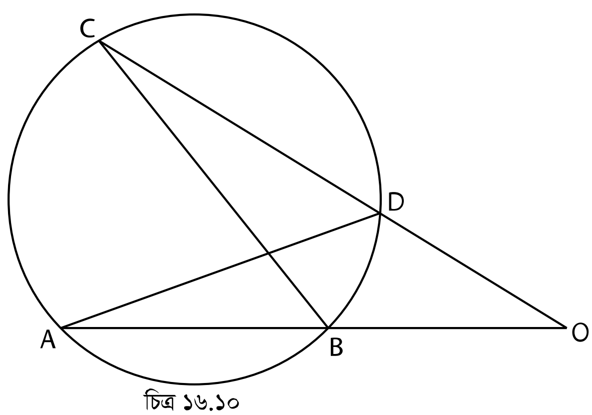
= OP^2 – OA^2

= OP^2 – R^2(R ব্যাসার্ধ)

এরূপ O থেকে CD-এর উপর লম্ব একে প্রমান করা যায় যে, CP.PD = OP2-R2

$\therefore$ AP.PB = CP.PD

বিকল্প প্রমান :



চিত্র ১৬.১০

দেওয়া আছে, একটি বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয়ের বধিতাংশ বৃত্তের বাইরে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমান করতে হবে যে, AO, OB = CO.OD

অঙ্কন : AD এবং BC যোগ করি।

প্রমান : ΔOAD ও ΔOBC এ

$\angle A = \angle C$ [একই চাপ-এর উপর অবস্থিত]

$\angle O$ সাধারন

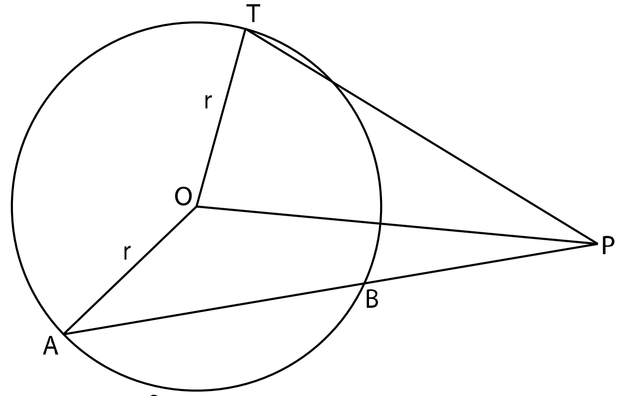
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সমকোনী

$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{OD}{OB}$

$\therefore AO.OB = CO.OD$

অনুসিদ্ধান্ত : ১

কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে যদি ঐ বৃত্তে একটা স্পর্শক ও একটা ছেদক আঁকা হয়, তবে স্পর্শকের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রটি ছেদক ও ছেদকের বহি:স্থাংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রটির সমান অর্থাৎ চিত্র **১৬.১১** এ $PT^2 = PA.PB$

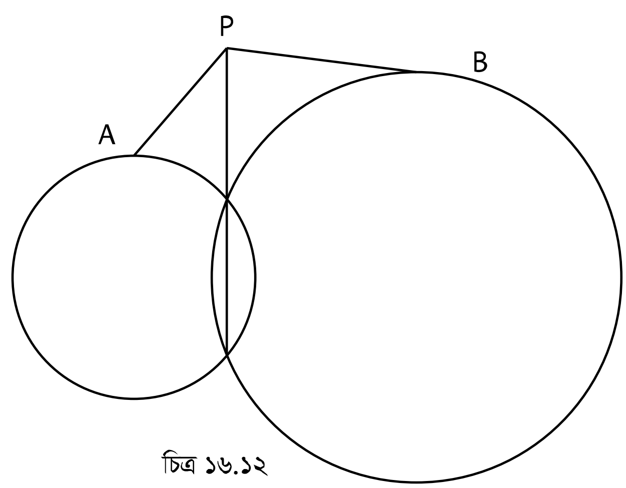


চিত্র ১৬.১১

প্রমান : $PA.PB = OP^2 - R^2 = PT^2$

অনুসিদ্ধান্ত : ২

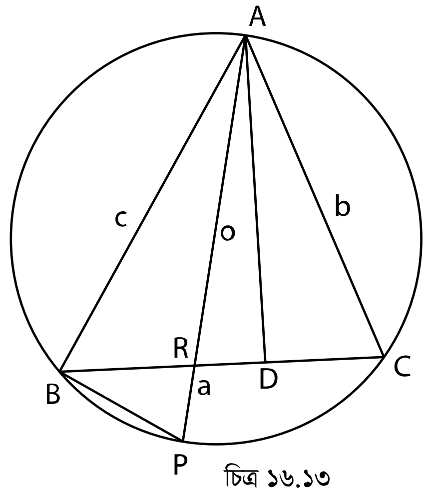
দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের সাধারন জ্যা-এর বর্ধিতাংশস্থিত কোন বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান।



চিত্র ১৬.১২

উপপাদ্য ১৬.৯

কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র এর পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারন শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।



চিত্র ১৬.১৩

দেওয়া আছে, ABC একটি ত্রিভুজ। AP এর পরিবৃত্তে ব্যাস। AD, A থেকে ভূমি BC-এর উপর লম্ব। প্রমান করতে হবে যে, AB.AC.AC = AP.AD = 2
যেখানে R পরিব্যাসার্ধ।

প্রমান : ΔABP ও ΔADC সদৃশকোনী

কারন, $\angle ABP = \angle ADC =$ এক সমকোন

$\angle APB = \angle ACD$ [একই চাপ AB এর উপর অবস্থিত]

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$$

$\therefore$ AB.AC = AP.AD = 2R.AD [$\because$ AP = 2R]

মন্তব্য : এই উপপাদ্যটি সফগুপ্তের উপপাদ্য নামে পরিচিত।

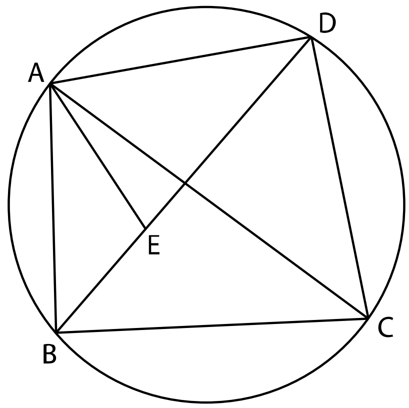
দ্রষ্টব্য : $\because$ 2R.AD = AB.AC

$$\therefore R = \frac{AB.AC}{2AD} = \frac{AB.AC.BC}{2.BC.AD} = \frac{abc}{4\Delta ABC} = \frac{abc}{4\Delta}$$

অতএব বৃত্তস্থ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের পরিমাপের চার গুন পরিমাপ দ্বারা বাহুত্রয়ের গুনফলের পরিমাপকে ভাগ করলে ঐ বৃত্তের ব্যসার্ধের পরিমাপ জানা যায়।

উপপাদ্য ১৬.১০

বৃত্তে অন্তলিখিত কোন চতুভূজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র, তার বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।



চিত্র ১৬.১৪

ABCD একটি বৃত্তে অন্তলিখিত চতুর্ভুজ। প্রমান করতে হবে যে এর কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র এর বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ AC.BD = AB.DC+AD.BC

অঙ্কন : A বিন্দুতে BA রেখার সাথে $\angle CAD$ এর সমান করে $\angle BAE$ আঁকি যেন তা BD কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমান : ΔABE ও ΔACD-এ

এখন $\angle BAE = \angle CAD$ [একই চাপ AD এর উপর অবস্থিত]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোনী

$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CD}$

$\therefore AB.CD = AC.BE$ ....(i)

আবার ΔABC ও ΔADE সদৃশকোনী

কারণ $\angle BAE + \angle EAC = \angle CAD + \angle EAC$

অর্থাৎ $\angle BAC = \angle EAD$

এবং $\angle ACB = \angle ADE$ [একই চাপ AB এর উপর অবস্থিত]

$\therefore \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$

$\therefore AD.BC = AC.DE$ ....(ii)

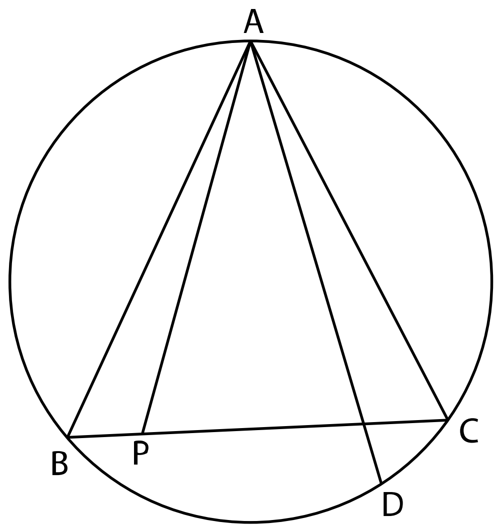
(i) ও (ii) থেকে

$$\begin{aligned} AB.CD + AD.BC &= AC.BE + AC.DE \\ &= AC(BE + DE) \\ &= AC.BD \end{aligned}$$

মন্তব্য : এই উপপাদ্যটি উলেমির উপপাদ্য নামে পরি।

উপপাদ্য ১৬.১১

কোন ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে বাহুদ্বয়ের সঙ্গে সমান কোন উৎপন্ন করে ত্রিভুজের অভ্যন্তরে দুইটি রেখাংশ আকা হলে এবং তাদের একটি ভূমির সাথে এবং অপরটি ত্রিভূজের পরিবৃত্তের সাথে মিলিত হলে, এই দুই রেখাংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান হবে।



চিত্র ১৬.১৫

ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A থেকে বাহুদ্বয়ের সঙ্গে সমান সমান কোন $\angle BAP$ ও $\angle CAD$ উৎপন্ন করে AP ও AD রেখাংশ যথাক্রমে ভূমি BC কে P এবং ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করতে হবে যে, AD.AP = AB.AC

অঙ্কন : C, D যোগ করি।

প্রমান : ΔABP, ΔADC সদৃশকোনী কেননা

$\angle ABP = \angle ADC$ (একই চাপস্থ কোন)

এবং $\angle BAP = \angle CAD$ (কল্পনা)

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$

$\therefore AD.AP = AB.AC$

অনুশীলনী ১৬.২

১) কোন বৃত্তের AB জ্যা-এ P যেকোন বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD আকুন যেন। $CP^2 = AP.PB$

২) একই বৃত্তে অন্তলিখিত ত্রিভুজসমূহের যে কোন দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রসমূহে অনুপাত তৃতীয় বাহুর উপর বিপরীত শীর্ষ থেকে অঙ্কিত লম্বসমূহের অনুপাতের সমান প্রমান করুন।

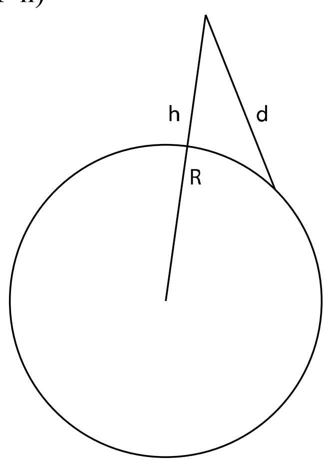
৩) ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যে কোন P বিন্দু থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে 0 বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমান করুন যে, $PO \perp AB$

৪) AB ব্যাসের উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তে AC ও BD দুইটি জ্যা এরূপভাবে অঙ্কিত হল যেন তারা পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করুন যে, $AB^2 = AC.AP+BD.BP$

৫) দুইটি বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও A□B□ বৃত্তে সমান সমান কোন উৎপন্ন করে। d ও d□ যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাস হলে দেখান যে, AB : A□B□ = d : d□

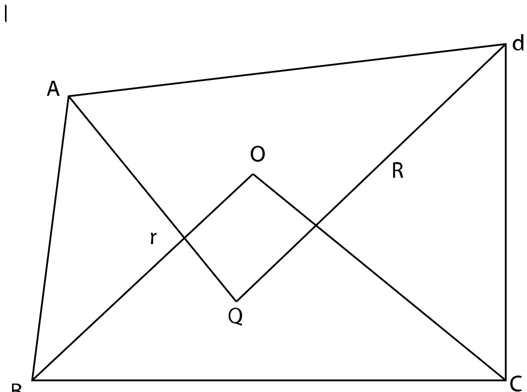
৬) কোন বৃত্তের বহি:স্থ কোন বিন্দু P থেকে যদি ঐ বৃত্তে একটি স্পর্শক PT ও একটি ছেদক PBA অংকন করা হয়, তবে প্রমান করুন যে, $PT^2 = PA.PB$

৭) ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h কিলোমিটার উচ্চ কোন স্থান থেকে d কিলোমিটার দূরে দিগন্ত দৃষ্ট হয়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R হলে দেখান যে, $d^2 = h\ (2R+h)$



চিত্র ১৬.১৬

৮) প্রমান করুন যে, ABCD চতুভুজের কোনগুলোর সমদ্বিখন্ডক রেখাগুলোর ছেদনে উৎপন্ন OPQR চতুভুজটি বৃত্তস্থ হবে।



চিত্র ১৬.১৭