ইউনিট ঃ ১৮
ভেক্টর

ভূমিকা

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহৃত সকল বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। এ রকম কতগুলো বস্তুর পরিমাপ শুধুমাত্র সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করলেই চলে। যেমন দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা, তাপমাত্রা, শক্তি, তাপ, ভর, সময় ইত্যাদি। এই সকল পরিমাপকে স্কেলার পরিমাপ বলে। আবার এমন কতগুলো পরিমাপ আমাদের ব্যবহার করতে হয়, যেগুলো কেবলমাত্র সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা যায় না। যেমন, ঢাকা থেকে গাজীপুর উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ে যেতে হলে কেবল দূরত্ব জানলেই চলবে না। আমাদের গাজীপুরে উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় কোন দিকে তাও জানতে হবে। এই ধরণের পরিমাপকে ভেক্টর পরিমাপ বলে। অর্থাৎ যে রাশির কেবলমাত্র মান আছে তা স্কেলার রাশি এবং যে রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে তা ভেক্টর রাশি । সরণ, রেখা, বল, ত্বরণ, তরল পদার্থের প্রকার, বৈদ্যুতিক প্রবাহ ইত্যাদি ভেক্টর রাশি।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- ভেক্টর সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন।
- ভেক্টরের কতিপয় সংজ্ঞা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন।
- ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগের ধারণা লাভ করবেন।
- ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগের বিভিন্ন বিধি সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করবেন।
- ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক, ভেক্টরের ডট গুণ, ক্রম গুণ ইত্যাদি কার্যবিধি ও কতিপয় ধর্ম বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- অবস্থান ভেক্টর কি তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কিত কতিপয় প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করতে পারবেন।
- ভেক্টরের ধারণা প্রয়োগ করে কতিপয় জ্যামিতিক উপপাদ্য সহজ ও সংক্ষিপ্ত নিয়মে প্রমাণ করতে পারবেন।
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ঃ ভেক্টরের প্রাথমিক ধারণা

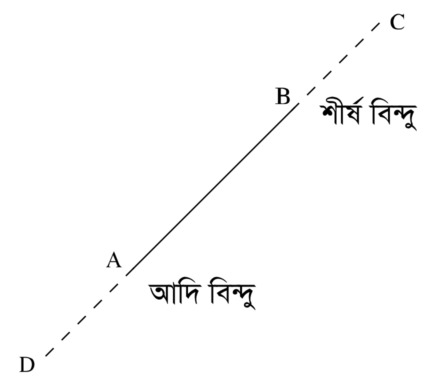
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- ভেক্টর সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।
- ভেক্টরের কতিপয় সংজ্ঞা সম্পর্কে জানতে পারবেন।

ভেক্টর

যে কোন রেখাংশ AB এর A থেকে B নির্দেশকারী অথবা B থেকে A নির্দেশকারী এই দুইটি পরস্পর বিপরীতমুখী দিকের যে কোন একটি দিককে সংযুক্ত করা যায়। AB রেখাংশের A থেকে B নির্দেশকারী দিক সংযুক্ত করলে যে দিকযুক্ত রেখা পাওয়া যায়, তাকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। অতএব, $\overrightarrow{BA}$ দ্বারা B থেকে A নির্দেশকারী দিকযুক্ত রেখাংশ BA কে বুঝায়।



চিত্র: ১৮.১

এরূপ দিকযুক্ত রেখাংশকে ভেক্টর বলে। রেখাংশ হিসাবে AB এবং BA অভিন্ন, কিন্তু ভেক্টর হিসাবে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BA}$ ভিন্ন, কারণ তাদের দিক A বিন্দুকে ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ এর আদিবিন্দু (initial point) এবং B বিন্দুকে এর শীর্ষবিন্দু (terminal point) বলা হয়। প্রত্যেক ভেক্টরের আদিবিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দু নির্দেশকারী দিক ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য বলতে AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য বুঝায়। একে $|\overrightarrow{AB}|$ বা শুধু AB দ্বারা সূচিত করা হয়। এখানে যে, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

অতএব যে কোন ভেক্টর রাশিকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। যেখানে রেখাংশের দৈর্ঘ্য রাশিটির পরিমাণ এবং রেখাংশটির আদিবিন্দু হতে শীর্ষ বিন্দু নির্দেশকারী দিক প্রদত্ত ভেক্টর রাশির দিক।

কোন ভেক্টর যে অক্ষীয় সরলরেখার অংশবিশেষ, তাকে ঐ ভেক্টরটির ধারক রেখা বা শুধু ধারক (support) বলা হয়। অতএব $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটির ধারক হচ্ছে A ও B বিন্দুগামী সরলরেখা।

ভেক্টরকে সচরাচর একটি অক্ষ দিয়ে সূচিত করা হয়। যেমন, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$। কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ লিখলে যেমন বোঝা যায় যে, এই ভেক্টরটির আদিবিন্দু A এবং শীর্ষবিন্দু B, $\underline{u}$ লিখলে তেমন কোন তথ্য পাওয়া যায় না।

কতিপয় সংজ্ঞা

সমান ভেক্টর (equal vectors) ঃ
একটি ভেক্টর $\underline{u}$ কে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান বলা হয়, যদি
i) $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ ($\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য সমান $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য)
ii) $\underline{u}$ এর ধারক $\underline{v}$ এর ধারকের সংগে অভিন্ন অথবা সমান্তরাল

iii) $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সংগে অভিন্ন হয়।
সমতার এই সংজ্ঞা যে নিচের নিয়মগুলো মেনে চলে, তা সহজেই বোঝা যায়-

i) $\underline{u} = \underline{u}$

ii) $\underline{u} = \underline{v}$ হলে $\underline{v} = \underline{u}$

iii) $\underline{u} = \underline{v}$ এবং $\underline{v} = \underline{w}$ হলে $\underline{u} = \underline{w}$

সমান্তরাল ভেক্টর ঃ
যদি $\underline{u}$ এর ধারক এবং $\underline{v}$ এর ধারক অভিন্ন বা সমান্তরাল হয়, তাহলে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর।

বিপরীত ভেক্টর ঃ
ভেক্টর $\underline{v}$ কে ভেক্টর $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বলা হয়, যদি-

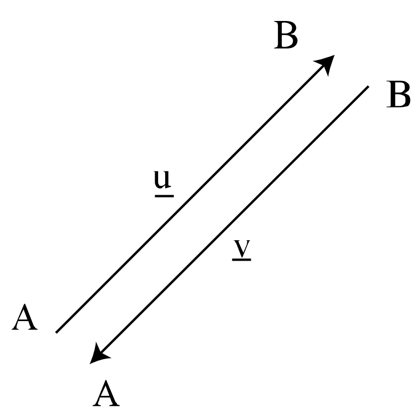
i) $|\underline{v}| = |\underline{u}|$ হয়

ii) $\underline{v}$ এর ধারক $\underline{u}$ এর ধারকের সংগে অভিন্ন বা সমান্তরাল হয়

iii) $\underline{v}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত হয়।

$\underline{v}$ যদি $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হয়, তবে $\underline{u}$, $\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর হবে।

সমতার সংজ্ঞা থেকে লক্ষণীয় যে, $\underline{v}$ এবং $\underline{w}$ প্রত্যেকে $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হলে $\underline{v} = \underline{w}$ হবে। অর্থাৎ যে কোন ভেক্টরের একটি মাত্র বিপরীত ভেক্টর বিদ্যমান।
$\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বোঝাতে -$\underline{u}$ লেখা হয়। অর্থাৎ $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ হলে -$\underline{u} = \overrightarrow{BA}$



চিত্র : ১৮.২

ঋণাত্মক ভেক্টর ঃ
যদি দুইটি ভেক্টরের মান একই হয়, কিন্তু দিক বিপরীতক্রম হয় তবে তাদেরকে ঋণাত্মক ভেক্টর বলা হয়। ঋণাত্মক ভেক্টরকে বিপরীত ভেক্টর বলা হয়।

একক ভেক্টর (unit vector) **ঃ**
যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য এক তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। যদি $\underline{u}$ ভেক্টরের মান $\underline{u} \neq 0$ হয়, তবে $\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$ কে একক ভেক্টর বলা হয় যার দিক $\underline{u}$ ভেক্টরের দিক।

ফাঁকা ভেক্টর ঃ

যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের কোন মান নেই অর্থাৎ মান শুন্য তাকে ফাঁকা ভেক্টর বলা হয়। ফাঁকা ভেক্টরকে শূন্য ভেক্টরও বলা হয়। ফাঁকা ভেক্টর কোন দিক নির্দেশ করে না।

অনুশীলনী ১৮.১

১। চিত্রের সাহায্যে ভেক্টরের ধারণা বর্ণনা করুন।

২। ভেক্টরের সমতা ও বিপরীত ভেক্টরের ধারণা বর্ণনা করুন।

৩। যে কোন বিন্দু থেকে প্রদত্ত ভেক্টরের সমান করে একটি ভেক্টর টানুন।

৪। সংজ্ঞা দিন: একক ভেক্টর, ঋণাত্মক ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর

পাঠ ২ঃ ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ

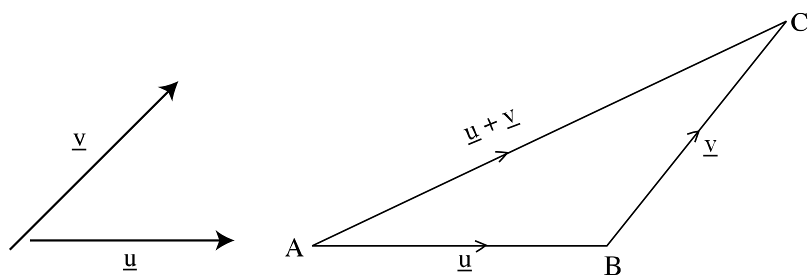
উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগের সংজ্ঞা দিতে পারবেন।
- ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগের বিভিন্ন বিধি বর্ণনা করতে পারবেন। $\underline{v}$ যদি $\underline{u}$

ভেক্টরের যোগ

দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর যোগফল নির্ণয় করতে $\underline{v}$ এর আদিবিন্দুকে $\underline{u}$ এর শীর্ষবিন্দুর উপর স্থাপন করতে হয় এবং তারপর $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু $\underline{v}$ এর শীর্ষবিন্দু যোগ করতে হয়। $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর যোগফলকে $\underline{u} + \underline{v}$ আকারে লিখা হয়।

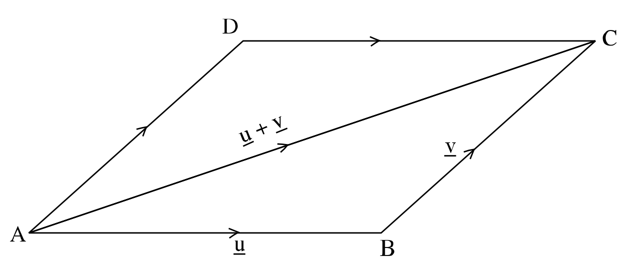


চিত্র : ১৮.৩

ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ বিধি

তিনটি বিন্দু A, B, C এমনভাবে নেয়া হয় যেন, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ হয়। তাহলে $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং $\underline{v}$ এর শীর্ষবিন্দুর সংযোজক $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরকে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দ্বয়ের সমষ্টি বলা হয় এবং $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

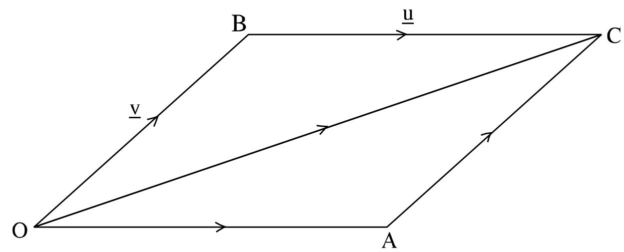
$\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টর দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরোক্ত পদ্ধতিকে ত্রিভুজ বিধি বলা হয়।



চিত্র : ১৮.৪

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি

কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়।



চিত্র : ১৮.৫

প্রমাণ

মনে করুন, যেকোন বিন্দু O থেকে $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$ সূচিত হয়েছে এবং B থেকে OA এর সমান্ত রেখা এবং A থেকে OB এর সমান্তরাল রেখা টানলে OACB সামান্তরিকটি উৎপন্ন হয় যার কর্ণ OC। তাহলে সামান্তরিকের OC কর্ণ দ্বারা $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর যোগফল সূচিত হবে।

অর্থাৎ, $\overrightarrow{OC} = \underline{u} + \underline{v}$

যেহেতু, OACB সামান্তরিকের $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল

অতএব $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \underline{v}$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{OC}$ [ত্রিভূজ বিধি অনুসারে]

মন্তব্য:

১) অনেক ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধিকেই ভেক্টর যোগের সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়। কিন্তু দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়। অথচ ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

২) দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের লব্ধিও বলা হয়।

ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি (commutative law for addition)

যে কোন ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

প্রমাণ

চিত্র ১৮.৫ হতে,

$\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$

OACB সামান্তরিক এবং OC তার কর্ণ

$\therefore$ OB ও BC সমান ও সমান্তরাল এবং OB ও AC সমান ও সমান্তরাল

$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$

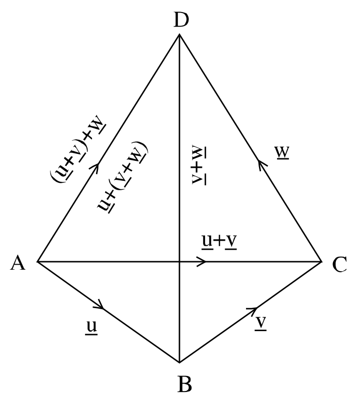
আবার, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \underline{v} + \underline{u}$

অতএব, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

<u>ভেক্টর যোগের সংযোগ বিধি (associative law for addition)</u>

যে কোন ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{w}$ এর জন্য

$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$



চিত্র : ১৮.৬

প্রমাণ

মনে করুন, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ এবং $CD = \underline{w}$

অর্থাৎ $\underline{u}$ এর শীষবিন্দু থেকে $\underline{v}$ এবং $\underline{v}$ এর শীষবিন্দু থেকে $\underline{w}$ অঙ্কন করা হয়েছে।

এখন $\underline{u} + \underline{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

এবং $\underline{v} + \underline{w} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

অতএব, $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

এবং $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

সুতরাং $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

অনুসিদ্ধান্তঃ যে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর একই ক্রম দ্বারা সূচিত ভেক্টর ত্রয়ের যোগফল শূন্য।

উপরের চিত্রে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ (ভেক্টর)

<u>ভেক্টর যোগের বন্টন বিধি (caucellation law for addition)</u>

যে কোন ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{w}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে, $\underline{v} = \underline{w}$

প্রমাণ

$\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} + (-\underline{u}) = \underline{u} + \underline{w} + (-\underline{u})$ [উভয় পক্ষে - $\underline{u}$ যোগ করে]

বা, $\underline{u} - \underline{u} + \underline{v} = \underline{u} - \underline{u} + \underline{w}$

বা, $\underline{v} = \underline{w}$

অনুসিদ্ধান্তঃ

$\underline{u} + \underline{v} = 0$ হলে, $\underline{v} = - \underline{u}$

প্রমাণ

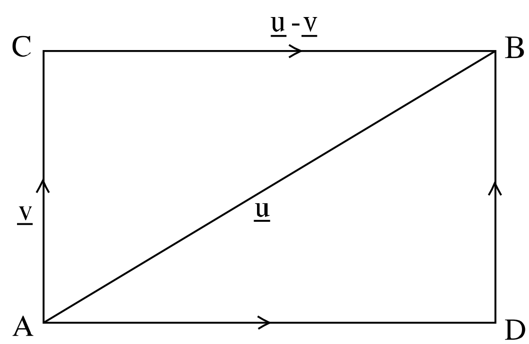
আমরা লিখতে পারি, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + (- \underline{u})$

উভয় পক্ষে $\underline{u}$ বর্জন করে পাই, $\underline{v} = - \underline{u}$

ভেক্টরের বিয়োগ

দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর বিয়োগফল $\underline{u} - \underline{v}$ বলতে $\underline{u}$ এবং $(-\underline{v})$ ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল $\underline{u} + (-\underline{v})$ কে বোঝায়।

ভেক্টরের বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি



চিত্রঃ ১৮.৭

$\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ এবং $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$ হলে $\underline{u} - \underline{v} = \overrightarrow{CB}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

অর্থাৎ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু একই হলে $\underline{u} - \underline{v}$ সেই ভেক্টর যার আদিবিন্দু হচ্ছে $\underline{v}$ এর শীর্ষবিন্দু এবং যার শীর্ষবিন্দু হচ্ছে $\underline{u}$ এর শীর্ষবিন্দু।

অনুশীলনী ১৮.২

১। ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগের সংজ্ঞা দিন।

২। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি বর্ণনা করুন।

৩। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি বর্ণনা করুন।

৪। ভেক্টর যোগ কি বিনিময় বিধি মেনে চলে? যুক্তি দ্বারা প্রমাণ করুন।

৫। ভেক্টর যোগের সংযোগ বিধি বর্ণনা করুন।

৬। ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি বর্ণনা করুন।

পাঠ ৩ঃ ভেক্টরের গুণ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক, ভেক্টরের ডট গুণ, ক্রম গুণ ইত্যাদি কার্যবিধি ও কতিপয় ধর্ম বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

ভেক্টরের গুণ

ভেক্টরের গুণ কয়েক প্রকার হয়ে থাকে। এই পাঠে আমরা বিভিন্ন প্রকারের ভেক্টরের গুণ সম্পর্কে আলোচনা করবো।

$\underline{u}$ যেকোন ভেক্টর এবং m যেকোন বাস্তব সংখ্যা হলে $m\underline{u}$ বলতে কোন ভেক্টর বুঝায় তা নিম্নে ব্যাখ্যা করা হল-

১) $m = 0$ হলে $m\underline{u} = \underline{0}$

২) $m \neq 0$ হলে $m\underline{u}$ এর ধারক এর $\underline{u}$ ধারকের সাথে অভিন্ন

$m\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্যের $|m|$ গুণ এবং

ক) $m > 0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$এর দিকের সাথে অভিন্ন

খ) $m < 0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$এর দিকের বিপরীত

দ্রষ্টব্যঃ ১) $m = 0$ অথবা $\underline{u} = 0$ হলে

২) $1\underline{u} = \underline{u}$ এবং $(-1)\,\underline{u} = -\,\underline{u}$

ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক সংক্রান্ত কতিপয় বিধি

1) বিনিময় বিধি (Commutative law)

m একটি স্কেলার এবং $\underline{u}$ ভেক্টর হলে, $m\underline{u} = \underline{u}m$

2) সংযোগ বিধি (Associative law)

m, n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{u}$ ভেক্টর হলে, $m(n\underline{u}) = n(m\underline{u}) = mn(\underline{u})$

প্রমাণ

A B C D E F G

চিত্র : ১৮.৮

মনেকরুন, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$। এখন AB কে G পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন BC = CD = DE = EF = FG = AB হয়।

তাহলে $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$

$= \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u}$

$= 6\underline{u}$

আবার $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EG}$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG})$$
$$= (\underline{u} + \underline{u}) + (\underline{u} + \underline{u}) + (\underline{u} + \underline{u})$$
$$= 2\underline{u} + 2\underline{u} + 2\underline{u}$$
$$= 3(2\underline{u})$$

আবার $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG})$$
$$= (\underline{u} + \underline{u} + \underline{u}) + (\underline{u} + \underline{u} + \underline{u})$$
$$= 3\underline{u} + 3\underline{u}$$
$$= 2(3\underline{u})$$

উপরোক্ত প্রমাণ হতে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যেতে পারে-
$m(n\underline{u}) = n(m\underline{u}) = mn(\underline{u})$

দ্রষ্টব্য: দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে এদের একটিকে অপরটির সাংখ্য গুণিতক আকারে প্রকাশ করা হয়।

3) <u>বন্টন বিধি (Distribution law)</u>

m, n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{u}, \underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে,

i) $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

ii) $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$

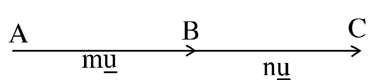
প্রমাণ

i) $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

m বা n যেকোন একটি শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই প্রযোজ্য।

মনে করুন, m, n উভয়ই ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$

$\therefore AB = m|\underline{u}|$



চিত্র : ১৮.৯

এখন AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করুন যেন, $BC = n|\underline{u}|$ হয়

$\therefore \overrightarrow{BC} = n\underline{u}$

এখন $AC = AB + BC$

$$= m|\underline{u}| + n|\underline{u}|$$

$= (m+n)|\underline{u}|$

$\therefore \overrightarrow{AC} = (m+n)\underline{u}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore (m+n)\underline{u} = m\underline{u} + m\underline{u}$

m, n উভয়ই ঋণাত্মক হলে $(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $(m+n)|\underline{u}|$ এবং এর দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের চিহ্ন।

আবার $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m|\ |\underline{u}| + |n|\ |\underline{u}| = (|m| + |n|)\ |\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত।

যেহেতু $m < 0$ এবং $n < 0$

অতএব $|m| + |n| = |m+n|$

সুতরাং এক্ষেত্রে $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

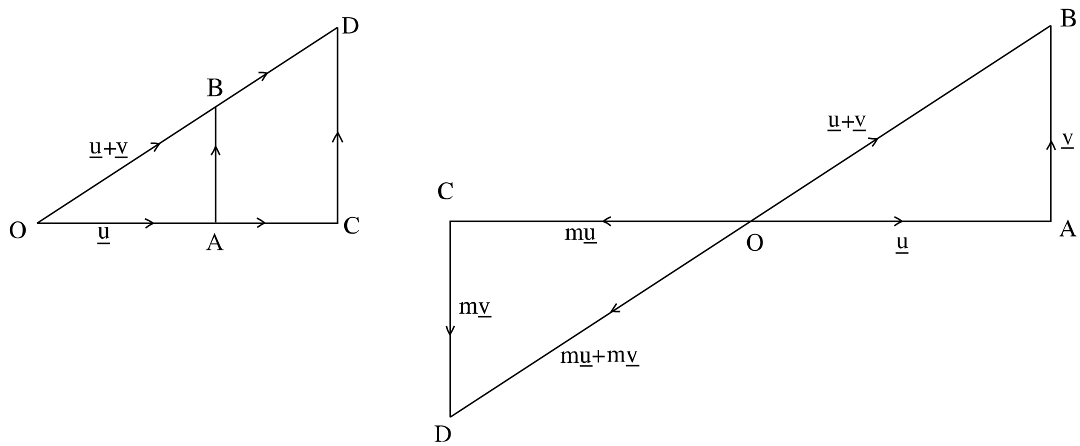
সবশেষে m এবং n এর মধ্যে একটি > 0, অপরটি < 0 হলে $(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $(|m| - |n|)$ এবং দিক হবে-

ক) $\underline{u}$ এর দিকের সাথে অভিন্ন যখন $|m| > |n|$

খ) $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত যখন $|m| < |n|$

তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য ও দিকে $(m+n)\underline{u}$ এর অভিন্ন হবে।

ii) $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$



চিত্র : ১৮.১০

মনে করুন, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$

তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

OA কে C পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন, OC = m. OA হয়। C বিন্দুতে AB এর সমান্তরাল CD রেখা টানুন যেন তা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু ΔOAB ও ΔOAB সদৃশকোণী

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$$

$\therefore \overrightarrow{CD} = m\,\overrightarrow{AB} = m\,\underline{v}$

চিত্র-১ এ m ধনাত্মক এবং চিত্র-২ এ m ঋণাত্মক

$\therefore$ OC = m. OA, CD = m. AB, OD = m. OB

এখন $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

বা, m. $\overrightarrow{OA}$ + m. $\overrightarrow{AB}$ = m. $\overrightarrow{OB}$

বা, $m\underline{u} + m\underline{v} = m(\underline{u} + \underline{v})$

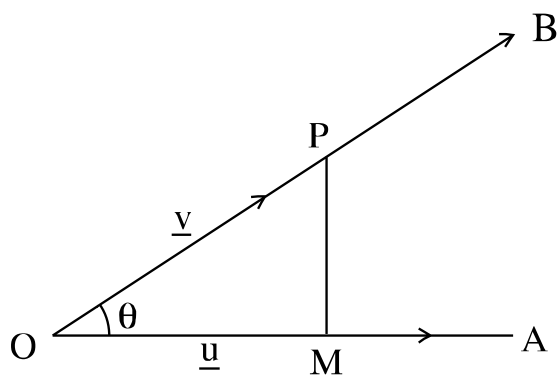
দ্রষ্টব্য: m এর সকল মানের জন্য উপরোক্ত সূত্র সত্য।

<u>ভেক্টরের ডট গুণ বা স্কেলার গুণ</u>

দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর ডট গুণ হল একটি স্কেলার সংখ্যা যার পরিমাণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের পরমমানের গুণফল এবং তাদের অন্তর্ভূক্ত কোণের কোসাইনের অনুপাতের সংগে গুণফলের সমান। প্রতীকের সাহায্যে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরের গুণকে লেখা যায়- $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos\theta$, যেখানে $|\underline{u}|$ ও $|\underline{v}|$ হল যথাক্রমে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরের পরমমান এবং তাদের অর্ন্তভূক্ত কোণ হল θ।

জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে বিষয়টি আরও স্পষ্টভাবে বুঝা যায়।

চিত্রটি লক্ষ্য করুন-



চিত্র : ১৮.১১

যদি $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$ এবং OA ও OB এর অর্ন্তভূক্ত কোণ θ হয়, তবে

$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos\theta = |\underline{u}|$ PN

$= |\underline{u}|$. $\underline{u}$ ভেক্টরের উপর $\underline{v}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ।

অনুরূপভাবে দেখান যেতে পারে যে, $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{v}|$. $\underline{v}$ ভেক্টরের উপর $\underline{u}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ। অর্থাৎ $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$

ভেক্টরের ডট গুণ নিম্নলিখিত ধর্মগুলো মেনে চলে-

ক) বিনিময় নিয়ম

খ) যোগের উপর গুণের বন্টম নিয়ম। অর্থাৎ $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$

<u>ভেক্টরের ক্রস গুণ বা ভেক্টর গুণ</u>

দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর ক্রস গুণ হল একটি ভেক্টর যার পরিমাণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের পরমমানের গুণফল এবং তাদের অন্তর্ভূক্ত কোণ θ এর সাইনের অনুপাতের পূরণফলের সমান। এই ভেক্টরের দিক হল $\underline{u}$ থেকে $\underline{v}$ এর দিকে ঘোরালে একটি স্ক্রু যেদিকে গতি লাভ করে সেদিকে। এই দিককে সাধারণত n দিয়ে প্রকাশ করা হয়। প্রতীকের সাহায্যে $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরের ক্রসগুণকে লেখা হয়-

$\underline{u} \times \underline{v} = |\underline{u}|\ |\underline{v}| \sin\theta$

<u>ভেক্টরের ক্রসগুণের কয়েকটি ধর্ম</u>

i) ভেক্টরের ক্রসগুণন বিনিময় নিয়ম মেনে চলে না। $\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$

ii) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের অর্ন্তভূক্ত কোণ শূন্য সে কারণে $\underline{u} \times \underline{v} = |\underline{u}|\ |\underline{v}| \sin 0^\circ = 0$ হয়।

iii) ভেক্টরের ক্রসগুণন যোগের উপর গুণের বন্টন নিয়ম মেনে চলে। অর্থাৎ $(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{v} \times \underline{w}$

অনুশীলনী ১৮.৩

১। ভেক্টরের সাংখ্যগুণিতক বা স্কেলার গুণিতক বর্ণনা করুন।

২। ভেক্টরের সাংখ্যগুণিতক সংক্রান্ত কতিপয় ধর্ম বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করুন।

৩। ভেক্টরের ডট গুণ ও ক্রসগুণ বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করুন।

পাঠ ৪ঃ অবস্থান ভেক্টর

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- অবস্থান ভেক্টর কি তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কিত কতিপয় প্রতিজ্ঞা বর্ণনা প্রমাণে দক্ষতা অর্জন করবেন।

অবস্থান ভেক্টর

মনেকরুন O সমতলস্থ যে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু। ঐ সমতলে O বিন্দু সাপেক্ষে যে কোন P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। $\overrightarrow{OP}$ এর দৈর্ঘ্য O থেকে P বিন্দুর দূরত্ব জ্ঞাপন করে। এবং $\overrightarrow{OP}$ এর দিক উক্ত দূরত্বে P বিন্দুর সঠিক অবস্থান নির্দেশ করে। O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু বলা হয়। বিভিন্ন মূলবিন্দুর সাপেক্ষে একই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বিভিন্ন হবে। কোন নির্দিষ্ট প্রসঙ্গে বিবেচনায় সকল বিন্দুর ভেক্টর একই মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ধরা হয়।

অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কিত কতিপয় প্রতিজ্ঞা

1) দুইটি বিন্দু A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে,

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

প্রমাণ

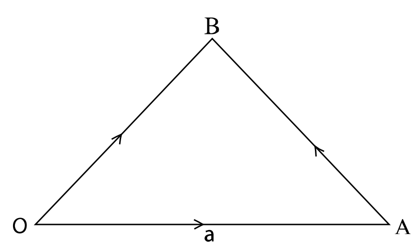
মনেকরুন, কোন সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করুন। অতএব $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরকে O বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। অনুরূপভাবে, একই O বিন্দুর সাপেক্ষে একই সমতলে অপর B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$ । A, B যোগ করুন।

মনে করুন $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$



চিত্র : ১৮.১২

সুতরাং দুইটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর জানা থাকলে তাদের সংযোজক রেখা দ্বারা সূচিত ভেক্টর ঐ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর থেকে আদিবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বিয়োগ করে পাওয়া যাবে।

2) $\overrightarrow{AC} = r.\overrightarrow{AB}$ হলে $\underline{c} = (1 - r)\,\underline{a} + r.\,\underline{b}$
যেখানে, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ যথাক্রমে A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর।

প্রমাণ

$\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ বলে

$\underline{c} - \underline{a} = r.(\underline{b} - \underline{a})\ \underline{a} = r.\,\underline{b} - r.\,\underline{a}$

সুতরাং $\underline{c} = \underline{a} - r\underline{a} + r\underline{b}$

$= \underline{a}\,(1 - r) + r\underline{b}$

$= (1 - r)\,\underline{a} + r\underline{b}$

মন্তব্যঃ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ এর সাংখ্যগুণিতক হওয়ার অর্থ A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ।

3) A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে এবং C বিন্দু $\overrightarrow{AB}$ রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করলে C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}$ হবে।

প্রমাণ

দেওয়া আছে, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{m}{n}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{n}{m}$

সুতরাং $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|}$

$= \dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} + \dfrac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|}$

$= 1+\dfrac{n}{m}$

$= \dfrac{m+n}{m}$

অর্থাৎ $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{m}{m+n}$

বা $|\overrightarrow{AC}| = (\dfrac{m}{m+n})\,|\overrightarrow{AB}|$

সুতরাং $\overrightarrow{AC} = (\dfrac{m}{m+n})\ \overrightarrow{AB}$

অর্থাৎ $\underline{c} - \underline{a} = (\dfrac{m}{m+n})\,(\underline{b} - \underline{a})$

বা $\underline{c} = (\frac{m}{m+n})\,\underline{b} - (\frac{m}{m+n})\,\underline{a} + \underline{a}$

$= (1-\frac{m}{m+n})\,\underline{a} + (\frac{m}{m+n})\,\underline{b}$

$= (\frac{n}{m+n})\,\underline{a} + (\frac{m}{m+n})\,\underline{b}$

$= (\frac{n\underline{a}}{m+n}) + (\frac{m\underline{b}}{m+n})$

$\therefore\ \underline{c} = \frac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}$

দ্রষ্টব্য: AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে বর্হিবিভক্ত করলে অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\underline{c} = \frac{m\underline{a}-n\underline{b}}{m-n}$

বিশেষ ক্ষেত্র: AB রেখাংশের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

প্রমাণ

C বিন্দুটি AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে m = n

সুতরাং $\underline{c} = \frac{1\underline{a}-1\underline{b}}{1+1}$

$= \frac{\underline{a}-\underline{b}}{2}$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুশীলনী ১৮.৪

১। অবস্থান ভেক্টরের ধারণা বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করুন।

২। অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞাগুলো বর্ণনা ও প্রমাণ করুন।

পাঠ ৫ঃ ভেক্টরের প্রয়োগ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- ভেক্টরের ধারণা প্রয়োগ করে কতিপয় জ্যামিতিক উপপাদ্য সহজ ও সংক্ষিপ্ত নিয়মে প্রমাণ করতে পারবেন।

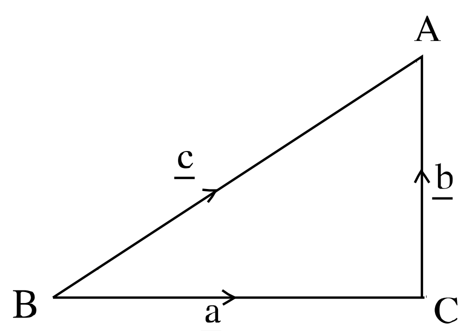
জ্যামিতিক ভেক্টরের কতিপয় প্রয়োগ

বর্তমান পাঠে আমরা ভেক্টরের পূর্বোক্ত ধারণাগুলো প্রয়োগ করে জ্যামিতির কতিপয় উপপাদ্য প্রয়োগ করার চেষ্ঠা করবো।

১. পীথাগোরাসের উপপাদ্য ঃ

প্রমাণ করুন যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভূজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

প্রমাণ



চিত্র: ১৮.১৩

উপরের চিত্রে ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle C$ সমকোণ

মনেকরুন, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CA} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BA} = \underline{c}$

এখন, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$

বা, $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

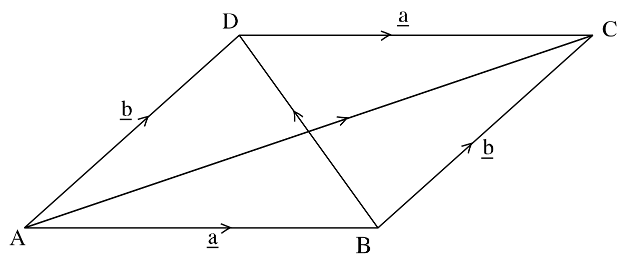
বা, $(\underline{a} + \underline{b})(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{c}.\underline{c}$

বা, $|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2.|\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos C = |\underline{c}|^2$

বা, $|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 = |\underline{c}|^2$ [$\cos C = \cos 90^\circ = 0^\circ$]

অর্থাৎ $a^2 + b^2 = c^2$ (প্রমাণিত)

২. দেখান যে, সামান্তরিকের কর্ণগুলোর বর্গের যোগফল তার বাহুলোর বর্গের যোগফলের সমান।



চিত্র: ১৮.১৪

মনেকরুন, ABCD একটি সামান্তরিক এবং AC ও BD তার কর্ণ।

আবার মনে করুন, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$

$\therefore$ কর্ণ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$

আবার যেহেতু BA বাহু AD বাহুর এবং DC বাহু AB বাহুর সমান ও সমান্তরাল।

অতএব, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{a}$

এখন, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

বা, $\underline{a} + \overrightarrow{BD} = \underline{b}$

$\therefore$ কর্ণ $\overrightarrow{BD} = \underline{b} - \underline{a}$

এখন $AC^2 = AC.\ AC = |\overrightarrow{AC}|^2 = |\ \underline{a} + \underline{b}\ | = |\ \underline{a}\ |^2 + |\ \underline{b}\ |^2 + 2.\ |\ \underline{a}\ ||\ \underline{b}\ |$ .... (1)

এবং $BD^2 = BD.\ BD = |\overrightarrow{BD}|^2 = |\ \underline{b} - \underline{a}\ | = |\ \underline{b}\ |^2 + |\ \underline{a}\ |^2 - 2.\ |\ \underline{a}\ ||\ \underline{b}\ |$ .... (2)

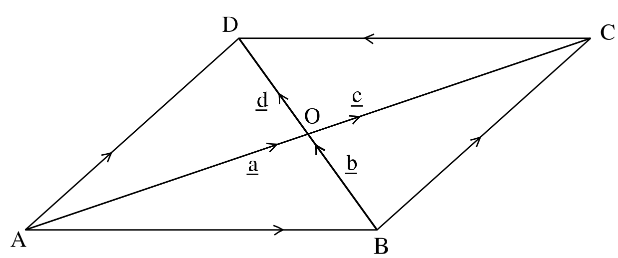
(1) ও (2) যোগ করলে পাওয়া যায়

$AC^2 + BD^2 = 2|\ \underline{a}\ |^2 + 2|\ \underline{b}\ |^2 = 2\ (a^2 + b^2)$

আবার $2\ (a^2 + b^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

সুতরাং কর্ণ AC এবং কর্ণ BD এর বর্গের যোগফল, সমান্তরাল চারটি বাহু AB, BC, CD ও DA এর বর্গের যোগফলের সমান।

৩. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।



চিত্র: ১৮.১৫

মনেকরুন, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD তার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
আবার মনে করুন, $\overrightarrow{AO} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BO} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$
প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

প্রমাণ

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$

এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

অর্থাৎ $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$ [উভয় পক্ষে $- \underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

$\underline{a}$ ও $\underline{c}$ উভয় ভেক্টরের ধারক AC। অতএব $\underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC

আবার $\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD। অতএব এর ধারক BD

AC ও BD রেখাদ্বয় পৃথক ও অসমান্তরাল

দুইটি সমান কিন্তু অশূন্য ভেক্টরের ধারকদ্বয় সমান্তরাল (বা অভিন্ন) হবে।

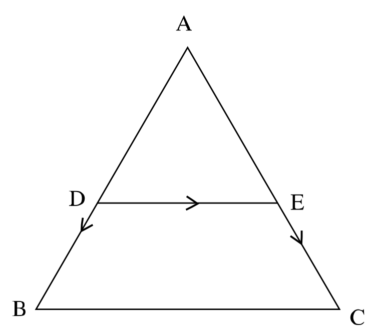
অতএব $\underline{a} - \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d}$ প্রত্যেকে শূন্য ভেক্টর।

অর্থাৎ $\underline{a} - \underline{c} = 0$ বা $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$ বা $\underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

$\therefore$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

৪. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।



চিত্রঃ ১৮.১৬

মনেকরুন, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। D, E যোগ করুন। প্রমাণ করতে হবে যে, DE ।। BC এবং DE = $\frac{1}{2}$ BC

প্রমাণ

ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AE}$ এবং $\overrightarrow{AB} = 2.\overrightarrow{AD}$ [D, E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD}$

$= 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$

$= 2\overrightarrow{DE}$

$\therefore \ \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DE}$

সুতরাং $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

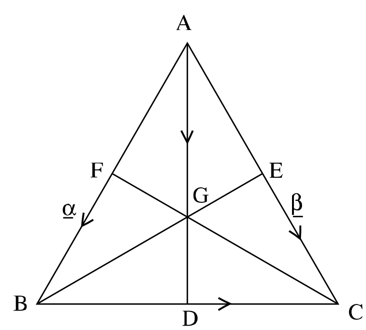
বা $DE = \frac{1}{2}BC$

এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু এখানে ধারকরেখা এক নয়।

সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল।

৫. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং ছেদবিন্দুতে প্রত্যেক মধ্যমা 2 : 1 অনুপাতে ছেদ করে।



চিত্র: ১৮.১৭

মনে করুন, ABC ত্রিভুজে $\overrightarrow{AB} = \underline{\alpha}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{\beta}$

তাহলে $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \underline{\beta} - \underline{\alpha}$

মনে করুন D, E ও F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু

ধরুন, AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর y বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রথমে আমরা দেখবো যে তারা পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে ছেদ করে।

প্রমাণ

চিত্র অনুযায়ী $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$= \underline{\alpha} + \frac{1}{2}(\underline{\beta} - \underline{\alpha})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{\alpha} + \underline{\beta})$$

আবার, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= -\underline{\alpha} + \frac{1}{2}\underline{\beta}$$

ধরুন $AG = x.\, AD$ এবং $BG = y.\, BE$

যেহেতু, $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$ $[\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{BG}]$

$\therefore\ x\{\frac{1}{2}(\underline{\beta} - \underline{\alpha})\} - y\{-\underline{\alpha} + \frac{1}{2}\underline{\beta}\} = \underline{\alpha}$

বা, $\frac{1}{2}x\,\underline{\alpha} + \frac{1}{2}x\,\underline{\beta} + y\,\underline{\alpha} - \frac{1}{2}\,y\,\underline{\beta} = \underline{\alpha}$

বা, $\underline{\alpha}(\frac{1}{2}x + y - 1) = \underline{\beta}(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x)$

যেহেতু, $\underline{\alpha}$ ও $\underline{\beta}$ ভেক্টর ভিন্নমুখী।

সুতরাং তাদের মধ্যে সমতার কোন প্রশ্ন নাই। অর্থাৎ তাদের সহগগুলোর যোগফল শূন্য হবে।

কাজেই $\underline{\beta}$ এর সহগ $\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = D \Rightarrow x = y$

এখন $x = y$ বসালে $\underline{\alpha}$ এর সহগ হয়

$$\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$$

বা, $\frac{3}{2}\ x = 1$

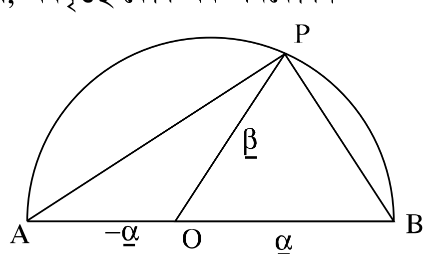
বা, $x = \frac{2}{3}$

$\therefore\ x = y = \frac{2}{3}$

অতএব, AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে ছেদ করে। এখন CF মধ্যমা অঙ্কন করে একইভাবে দেখানো যায় AD ও CF মধ্যমাদ্বয়ও 2 : 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করবে।

অর্থাৎ ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি সমবিন্দু এবং তারা পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে ছেদ করে।

৬. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।



চিত্রঃ ১৮.১৮

মনে করুন, APB একটি অর্ধবৃত্ত এবং $\angle APB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle APB$ = এক সমকোণ।

প্রমাণ

মনে করুন, O অর্ধবৃত্তটির কেন্দ্র এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{\alpha}$ ও $\overrightarrow{OP} = \underline{\beta}$

তাহলে $\overrightarrow{OA} = -\underline{\alpha}$

চিত্র অনুযায়ী $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \underline{\beta} - (-\underline{\alpha}) = \underline{\alpha} + \underline{\beta}$

এবং $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = \underline{\beta} - \underline{\alpha}$

$\therefore$ AP. BP $= |\overrightarrow{AP}| . |\overrightarrow{BP}| = |(\underline{\alpha} + \underline{\beta})| . |(\underline{\beta} - \underline{\alpha})|$

$= |\underline{\alpha}|^2 - |\underline{\beta}|^2$

যেহেতু OB = OP = বৃত্তের ব্যাসার্ধ সেহেতু, $|\underline{\alpha}| = |\underline{\beta}|$

এবং $\alpha^2 = \beta^2$ বা $\beta^2 - \alpha^2 = 0$

$\therefore$ AP. BP = 0

অর্থাৎ $AP \perp BP$

বা $\angle APB$ = এক সমকোণ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী ১৮.৫

ভেক্টরের সাহায্যে নিম্নলিখিত জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাগুলো প্রমাণ করুন।

১। ত্রিভুজের বাহু ও কোণ সংক্রান্ত কোসাইন সূত্র $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ প্রমাণ করুন।

২। একটি চর্তুভূজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্য বিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক।

৩। ABCD সামান্তরিকের P ও Q যথাক্রমে AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু হলে APCQ একটি সামান্তরিক।

৪। চর্তুভূজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক।

৫। ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অপর বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

৬। ত্রিভুজের এক বাহুর সমান্তরাল কোন রেখা অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

৭। ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

৮। ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

পাঠ ৬ঃ কতিপয় উদাহরণ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

উদাহরণ 1 দেখান যে, $-(-\underline{u}) = \underline{u}$

সমাধানঃ বিপরীত ভেক্টরের ধর্ম অনুযায়ী $\underline{u} + (-\underline{u}) = 0$

আবার $(-\underline{u}) + \{-(-\underline{u})\} = 0$

$\therefore -(-\underline{u}) + (-\underline{u})\} = \underline{u} + (-\underline{u})$

$\therefore -(-\underline{u}) = \underline{u}$ [ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি]

উদাহরণ 2 দেখান যে, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w}$ হলে $\underline{u} = \underline{w} - \underline{v}$ এবং বিপরীতক্রমে $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w}$

সমাধানঃ $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w}$

বা, $\underline{u} + \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{w} + (-\underline{v})$ [উভয় পক্ষে - $\underline{v}$ যোগ করে]

বা, $\underline{u} + (\underline{v} - \underline{v}) = \underline{w} - \underline{v}$

বা, $\underline{u} + 0 = \underline{w} - \underline{v}$

$\therefore \underline{u} = \underline{w} - \underline{v}$

বিপরীতক্রমে, $\underline{u} = \underline{w} - \underline{v}$

বা, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w} - \underline{v} + \underline{v}$ [উভয় পক্ষে $\underline{v}$ যোগ করে]

বা, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w} + (-\underline{v} + \underline{v})$

বা, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w} + 0$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \underline{w}$

উদাহরণ 3 দেখান যে, $-(\underline{u} + \underline{v}) = -\underline{u} - \underline{v}$

সমাধানঃ $-\underline{u} - \underline{v}$ দ্বারা $-(\underline{u}) + (-\underline{v})$ বোঝায়

এখন $(\underline{u} + \underline{v}) + \{(-\underline{u}) + (-\underline{v})\}$

$= \underline{u} + (-\underline{u}) + \underline{v} + (-\underline{v})$ [সংযোগ বিধি]

$= \underline{u} + \underline{u}$

$= 0$

সুতরাং $-(\underline{u} + \underline{v}) = -(\underline{u}) + (-\underline{v})$

$= -\underline{u} - \underline{v}$

উদাহরণ 4 দেখান যে, $-(m)\underline{u} = m(-\underline{u}) = -m\underline{u}$

সমাধানঃ $m\underline{u} + (-m)\underline{u}$

$= \{m + (-m)\}\,\underline{u}$

$= 0\,\underline{u}$

$= \underline{0}$

$\therefore (-m)\underline{u} = -m\underline{u}$ ....(1)

আবার $m\underline{u} + m(-\underline{u})$
$= m\{\underline{u} + (-\underline{u})\}\ \underline{u}$
$= m\ 0$
$= \underline{0}$
$\therefore\ m(-\underline{u}) = -m\underline{u}$ ....(2)

(1) ও (2) নং সমীকরণ হতে পাই, $-(m)\underline{u} = m(-\underline{u}) = -m\underline{u}$

উদাহরণ 5 দেখান যে, $\underline{u} \neq 0$ হলে $\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$ একটি একক ভেক্টর।

সমাধানঃ
মনে করুন, $\underline{u}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\hat{u}$ একটি একক ভেক্টর
এখন $\underline{u}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য হল $|\underline{u}|$ বা u যেখানে $|\underline{u}|$ বা u একটি স্কেলার, যা অশূন্য কারণ $\underline{u} \neq 0$
অতএব $\underline{u} = u.\ \hat{u} = |\underline{u}|.\ \hat{u}$

বা, $\hat{u} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$

অর্থাৎ $\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$ একটি একক ভেক্টর।

উদাহরণ 6 মনে করুন $\underline{u}$, $\underline{v}$ প্রত্যেকে অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর
দেখান যে, $m\underline{u} + n\underline{v} = 0$ হলে $m = n = 0$

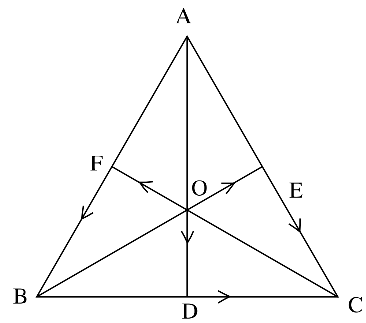
সমাধানঃ
যেহেতু, $\underline{u}$, $\underline{v}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর
অতএব $\underline{u} \neq 0, \underline{v} \neq 0$
এখন $m\underline{u} + n\underline{v} = 0$ যেখানে m, n দুইটি স্কেলার গুণিতক
দুটি স্কেলার ভেক্টরের গুণফল এর সমষ্টি শূন্য হতে পারে না, যদি তারা পৃথক পৃথক ভাবে শূন্য হয়।
অর্থাৎ $m\underline{u} = 0$ এবং $n\underline{v} = 0$ হয়
$\therefore\ m = 0$ এবং $n = 0$ $[\underline{u} \neq 0, \underline{v} \neq 0]$
সুতরাং $m = n = 0$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 7 ABC যেকোন ত্রিভুজ হলে দেখান যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

সমাধানঃ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$
$= \overrightarrow{AA}$
$= 0$

উদাহরণ 8 ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ



চিত্রঃ ১৮.১৯

ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। A,D; B,E ও C,F যোগ করুন। তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

চিত্র হতে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$ ....(i)

কিন্তু $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AF}$

বা, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{OF}$

বা, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$ $\quad [\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}]$

$\therefore$ (i) নং হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$ $\quad [\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}]$

বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CF}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

আবার, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO}$

বা, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

আবার, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CO}$ .... (ii)

এবং $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EO}$

বা, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{EO} - \overrightarrow{EA}$

বা, $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

বা, $\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{EA}$

$\therefore$ (ii) নং হতে পাই,

$\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO}$

বা, $\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CO}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

বা, $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$ .... (iii)

এখন $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

বা, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CF})$

বা, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

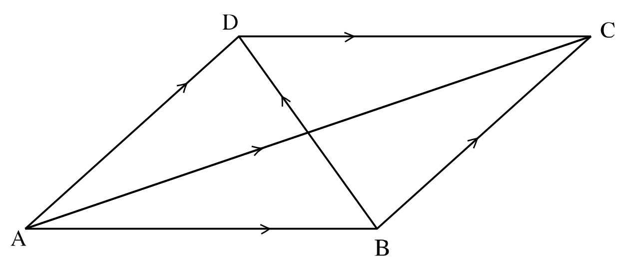
বা, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

বা, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

বা, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF}$

উদাহরণ 9 ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করুন এবং দেখান যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

সমাধানঃ



চিত্রঃ ১৮.২০

চিত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ .... (i)

আবার $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

বা, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ [AD || BC এবং AD ও BD বিপরীত বাহু]

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

এখন (i) নং হতে পাই, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ .... (iii)
(ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

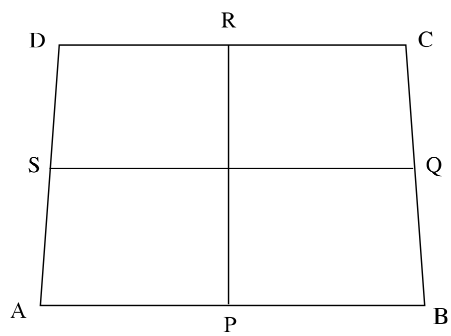
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

আবার (ii) নং হতে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

উদাহরণ 10 দেখান যে, চতুর্ভূজের বিপরীত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

সমাধানঃ



চিত্রঃ ১৮.২১

মনে করুন, ABCD চর্তুভূজের AB, BC, CD, DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S। ধরুন, কোন নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C, D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

অতএব, AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

এবং CD রেখাংশের মধ্যবিন্দু R এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

অতএব PR রেখাংশের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) + \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})\}$

$$= \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) + \frac{1}{4}(\underline{c} + \underline{d})\}$$

$$= \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d})$$

আবার BC রেখাংশের মধ্যবিন্দু Q এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

এবং AD রেখাংশের মধ্যবিন্দু S এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

অতএব QS রেখাংশের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) + \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})\}$

$$= \frac{1}{4}(\underline{b} + \underline{c}) + \frac{1}{4}\ (\underline{a} + \underline{d})\}$$

$$= \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d})$$

যেহেতু, PR ও QS রেখাংশ দুইটির মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর একই। সুতরাং তাদের মধ্য বিন্দু একই। অন্য ভাবে PR ও QS রেখাংশের ছেদবিন্দু-ই তাদের প্রত্যেকের মধ্যবিন্দু।

অতএব, চতুর্ভূজের বিপরীত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

অনুশীলনী ১৮.৬

১। দেখান যে,

i) $-(\underline{u} - \underline{v}) = -\underline{u} + \underline{v}$

ii) $\underline{u} + \underline{u} = 2\,\underline{u}$

iii) $(m - n)\,\underline{u} = m\underline{u} - n\underline{u}$

vi) $m\,(\underline{u} - \underline{v}) = m\underline{u} - m\underline{v}$

v) $m\underline{u} = 0$ হলে $m = 0$ বা $\underline{u} = 0$; এবং বিপরীতক্রমে।

২। দেখান যে, $\underline{u}$, $\underline{v}$ এর সাংখ্যগুণিতক (যেখানে $\underline{u}$, $\underline{v}$ কোনটিই শূন্য ভেক্টর নয়) হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{u}$, $\underline{v}$ এর সমান্তরাল হয়।

৩। $\underline{u}$, $\underline{v}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখান যে, $\underline{u} = m\underline{v}$ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি $\underline{u}$, $\underline{v}$ এর সমান্তরাল হয়।

৪। ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে

ক) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

খ) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BE}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করুন এবং দেখান যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

৫। ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD

ক) $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

খ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

৬। মনে করুন, P বিন্দু $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডকে অবস্থিত। A বিন্দুর প্রেক্ষিতে B, C, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{u}$ হলে দেখান যে, শেষোক্ত ভেক্টরটি $\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} + \frac{\underline{c}}{|\underline{c}|}$ এর সাংখ্যগুণিতক।

৭। A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ হলে দেখান যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ যদি হয়।

উত্তরমালা

৪। ক) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

খ) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}$

৫। ক) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

খ) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$