ইউনিট ঃ ১৯
ঘন জ্যামিতি

ভূমিকা

বিন্দু, রেখা ও তলের ধারণা সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। সেখানে আপনারা লক্ষ্য করেছেন যে, বিন্দুর মাত্রা নেই কিন্তু অবস্থান আছে। বিন্দুর বিরামহীন সঞ্চারণের ফলে রেখার সৃষ্টি হয় এবং রেখার সৃষ্টি হয় এবং রেখার বিস্তৃতি উভয়দিকে সীমাহীন। আবার রেখার বিরামহীন সঞ্চারণে তলের সৃষ্টি হয় এবং তলের বিস্তৃতিও সীমাহীন। ঘন জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা ও তল মৌলিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করা হয়।

যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে তাকে ঘনবস্তু বলা হয়। দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটিকেই ঐ বস্তুর মাত্রা বলা হয়। সুতরাং ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক। গণিতের যে শাখায় এই তিনটি মাত্রা সাপেক্ষে বিন্দু, রেখা ও তলের ধর্ম সম্পর্কে আলোচনা করা হয় তাকে ঘন জ্যামিতি বলা হয়। বর্তমান ইউনিটে আমরা ঘন জ্যামিতি সম্পর্কে আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- কতিপয় সংজ্ঞা সম্পর্কে বিস্তারিত ধারণা লাভ করবেন।
- কতিপয় প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।
- সুষম ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করবেন।

পাঠ ১ঃ সরলরেখা ও সমতল: কতিপয় সংজ্ঞা ও ধারণা

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- কতিপয় সংজ্ঞা সম্পর্কে বিস্তারিত ধারণা লাভ করবেন।

সমতল (Plane surface)

কোন তলের উপরস্থ যে কোন দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ যদি সম্পূর্ণভাবে ঐ তলের উপরই অবস্থান করে তবে সেই তলকে সমতল বলে। ঘরের মেঝে, টেবিলের উপরিভাগ ইত্যাদি সমতলের বাস্তব উদাহরণ।

বক্রতল (Curved surface)

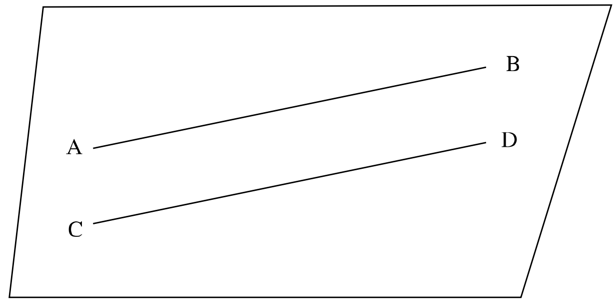
কোন তলের উপরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি সম্পূর্ণভাবে ঐ তলের উপর অবস্থান করে তবে সেই তলকে বক্রতল বলে। ফুটবলের পৃষ্ঠতল বক্রতলের একটি বাস্তব উদাহরণ।

একতলীয় রেখা (Coplaner lines)

যদি একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত হয় বা যদি একাধিক সরলরেখার মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন করা সম্ভব হয়, তবে ঐ সরলরেখাকে একতলীয় সরলরেখা বলে।

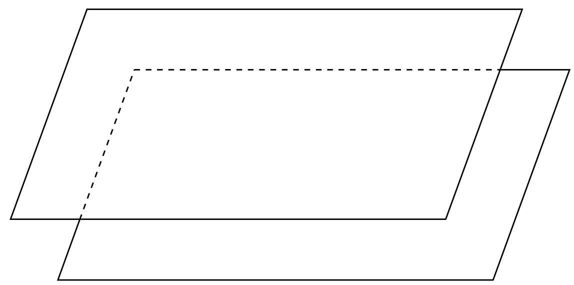
নৈকতলীয় সরলরেখা (Skew lines)
দুই বা ততোধিক সরলখেরা একই সমতলে অবস্থিত না হলে তাদের নৈকতলীয় রেখা বলে।

সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel lines)
যদি দুইটি একতলীয় সরলরেখার কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে অর্থাৎ দুইটি এক সরলরেখা যদি পরস্পরকে ছেদ না করে, তবে তাদেরকে সমান্তরাল সরলরেখা বলে।



চিত্রঃ ১৯.১

সমান্তরাল তল (Parallel plane)
যদি দুইটি সমতল তাদের সীমাহীন বিস্তৃতিতে কোথাও মিলিত না হয়, তবে তাদের সমান্তরাল সমতল বলা হয়।



চিত্রঃ ১৯.২

সমতলের সমান্তরাল রেখা
যদি একটি সরলরেখা ও একটি সমতল তাদের সীমাহীন বিস্তৃতিতে কোথাও মিলিত না হয়, তবে ঐ সরলরেখাকে উক্ত সমতলের সমান্তরাল রেখা বলা হয়।

তলের লম্ব রেখা
কোন সমতলের উপরস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত যে কোন রেখার উপর লম্ব রেখাকে ঐ সমতলের উপর লম্ব বলা হয়।

তীর্যক রেখা (Oblique lines)
কোন সরলরেখা একটি সমতলের সাথে সমান্তরাল বা লম্ব না হলে, ঐ রেখাকে সমতলের তীর্যক রেখা বলে।

উলম্ব রেখা বা তল
স্থির অবস্থায় ঝুলন্ত ওলনের সুতার সাথে সমান্তরাল রেখা বা তলকে উলম্ব রেখা বা উলম্ব তল বলে।

অনুভূমিক তল (Horizontal plane)
কোন সমতল একটি সরলরেখার সাথে লম্ব হলে, তাকে অনুভূমিক তল বলা হয়।

অনুভূমিক রেখা
কোন অনুভূমিক তলে অবস্থিত যে কোন সরলরেখাকে অনুভূমিক রেখা বলে।

স্বীকার্য

১) দুইটি সররেখার মধ্যে সম্পর্ক

ক) দুইটি সরলরেখা একতলীয় হলে, তারা অবশ্যই সমান্তরাল হবে অথবা কোন এক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করবে।

খ) দুইটি সরলরেখা নৈকতলীয় হলে, তারা পরস্পরচ্ছেদী হবে না বা পরস্পর সমান্তরাল হবে না।

২) ক) কোন সমতলের উপরিস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে সীমাহীন ভাবে বর্ধিত করলে তা সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত থাকবে। সুতরাং, একটি সরলরেখা ও এক বা দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকলে, ঐ সরলরেখা বরাবর তাদের মধ্যে অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

খ) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা একটি সরলরেখার মধ্য দিয়ে অসংখ্য সমতল অঙ্কন করা যায়।

৩) সরলরেখা ও সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

ক) একটি সরলরেখা ও একটি সমতল সমান্তরাল হলে তাদের কোন সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

খ) একটি সরলরেখা কোন সমতলকে ছেদ করলে তার মধ্যে মাত্র একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে।

গ) কোন সরলরেখা ও কোন সমতলের দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকলে সরলরেখাটি সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত হবে।

৪) দুইটি সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

ক) দুইটি সমতল পরস্পর সমান্তরাল হলে, তাদের কোন সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

ক) দুই সমতল পরস্পরচ্ছেদী হলে তারা পরস্পরকে সরলরেখায় ছেদ করবে এবং তাদের অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

পাঠ ২ঃ কতিপয় প্রতিজ্ঞা

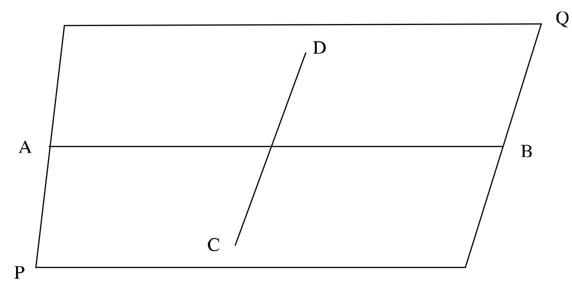
উদ্দেশ্য
এই পাঠ শেষে আপনি -

- ঘন জ্যামিতিরি কতিপয় প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন।

ঘন জ্যামিতির বিষয়বস্তু আলোচনার পূর্বে কতগুলো প্রতিজ্ঞা সম্পর্কে আলোচনা করা প্রয়োজন। বর্তমান পাঠে ঘন জ্যামিতির কয়েকটি সহজ ও প্রয়োজনীয় উপপাদ্য প্রমাণ ছাড়া চিত্রসহ আলোচনা করা হল।

১) দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার মধ্য দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল অঙ্কন করা যায়।

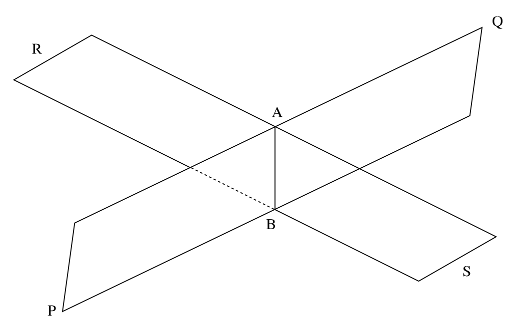
মনে করুন, AB ও CD দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। তাদের মধ্য দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল অঙ্কন করা যাবে।



চিত্র: ১৯.৩

২) দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সমতল একটি সরলরেখায় ছেদ করে এবং বাইরে কোন বিন্দুতে ছেদ করে না।

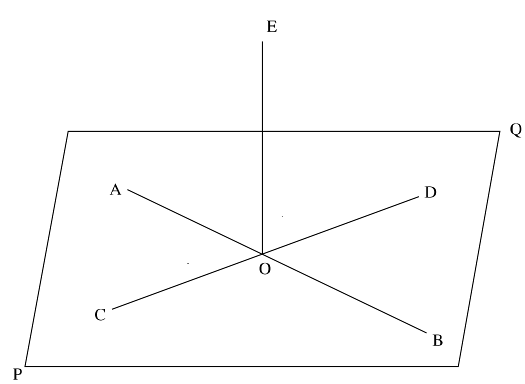
মনে করুন, PQ ও RS দুইটি সমতল সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করে। সমতল দুইটি রেখার বাইরে কোন বিন্দুতে ছেদ করে না।



চিত্র: ১৯.৪

৩) দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার ছেদবিন্দুতে কোন সরলরেখা তাদের প্রত্যেকের উপর লম্ব হলে, তা রেখাদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সমতলের উপরও লম্ব।

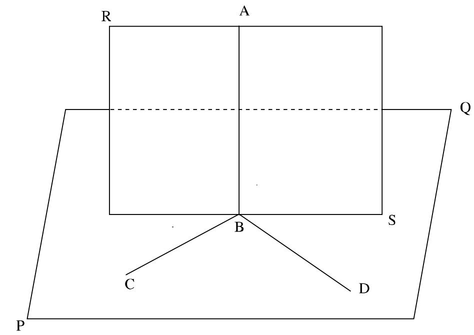
মনে করুন, AB ও CD সরলরেখার ছেদবিন্দু O তে রেখা দুইটির প্রত্যেকটির উপর OP লম্ব। অতএব OP রেখা AB ও CD রেখা দ্বারা নির্দেশিত সমতল PQ এর উপর লম্ব।



চিত্র: ১৯.৫

৪) একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে তার উপর যতগুলো লম্ব অঙ্কন করা যায়, তারা সকলেই একতলীয়।

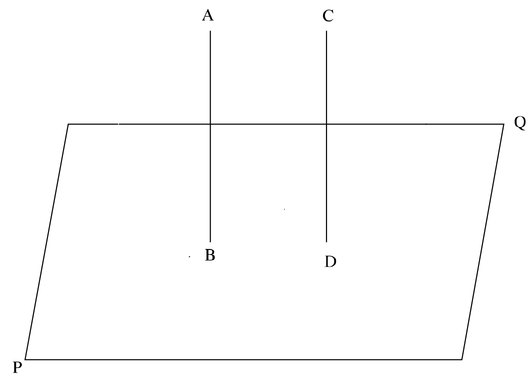
মনে করুন, BC, BD ও BS সরলরেখাত্রয় প্রত্যেকেই AB সরলরেখার B বিন্দুতে AB এর উপর লম্ব। সুতরাং BC, BD ও BS একই সমতল PQ এ অবস্থিত।



চিত্র: ১৯.৬

৫) দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি কোন তলের উপর লম্ব হলে অপরটিও ঐ তলের উপর লম্ব হব।

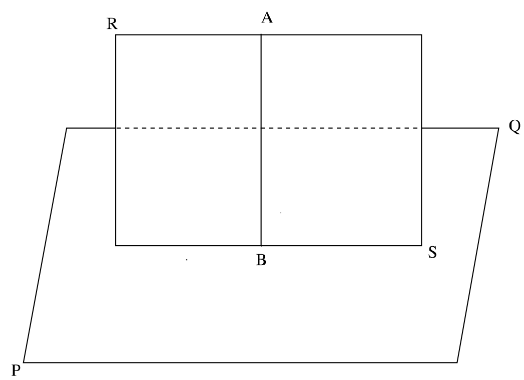
মনে করুন, AB||CD এবং AB, PQ সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং CD-ও PQ সমতলের উপর লম্ব হবে।



চিত্র: ১৯.৭

৬) কোন সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট সমতলের উপর লম্ব হলে ঐ লম্বের ভিতর দিয়ে অঙ্কিত যে কোন সমতল নির্দিষ্ট সমতলটির উপর লম্ব।

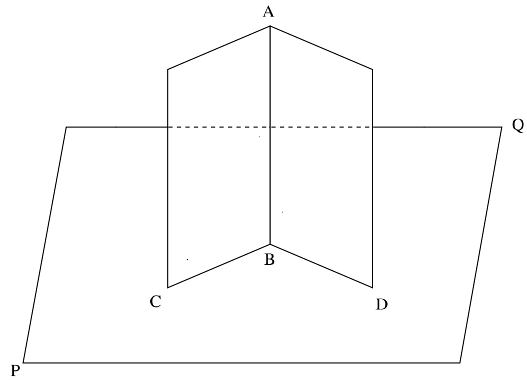
মনে করুন, AB সরলরেখা PQ সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং এর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত সমতল সমতলের লম্ব হবে।



চিত্র: ১৯.৮

৭) দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সমতল কোন তৃতীয় সমতলের উপর লম্ব হলে তাদের ছেদ রেখাও ঐ সমতলের উপর লম্ব হবে।

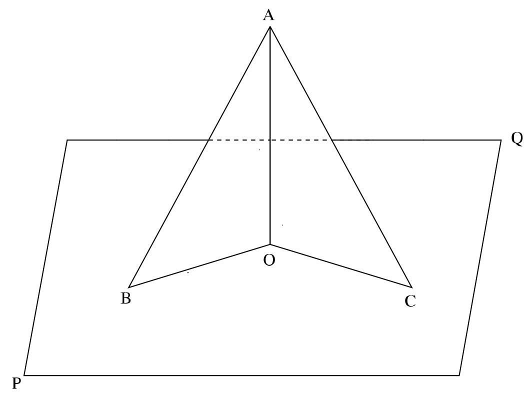
মনে করুন, AC ও AB পরস্পরচ্ছেদী সমতল দুইটি PQ সমতলের উপার লম্ব এবং AC ও AD তলদ্বয় AB রেখায় ছেদ করে। সুতরাং AB রেখা PQ সমতলের উপর লম্ব হবে।



চিত্র: ১৯.৯

৮) কোন সমতলের বহি:স্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত সকল সরলরেখার মধ্যে লম্বটির দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম হবে।

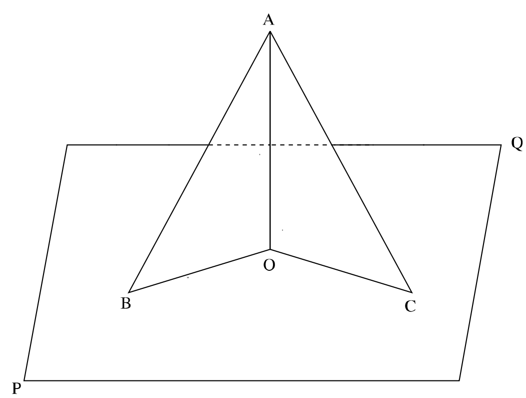
মনে করুন, PQ সমতলের বহি:স্থ কোন বিন্দু A থেকে ঐ তলের উপর অঙ্কিত লম্ব AO তলটিকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু থেকে যে কোন তীর্যক রেখা AB ও AC তলটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে AO এর দৈর্ঘ্য AB ও AC এর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ছোট হবে।



চিত্র: ১৯.১০

৯) কোন সমতলের বহি:স্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত তীর্যক রেখাগুলোর মধ্যে যেগুলো ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু থেকে সমান দূরত্বে ছেদ করে তারা পরস্পর সমান।

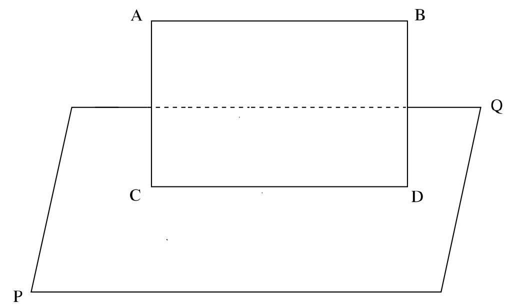
মনে করুন, PQ সমতলের বহি:স্থ বিন্দু A থেকে ঐ তলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু Q। A বিন্দু থেকে অঙ্কিত তীর্যক রেখাদ্বয় AB ও AC। যদি OB = OC হয়, তাহলে AB = AC হবে।



চিত্র: ১৯.১১

১০) কোন নির্দিষ্ট সমতলের উপর একটি রেখাংশের অভিক্ষেপও একটি রেখাংশ।

এখানে PQ তলে AB রেখাংশের অভিক্ষেপ CO-ও একটি রেখাংশ।



চিত্র: ১৯.১২

পাঠ ২ঃ ঘনবস্তুর পরিমিতি

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- বিভিন্ন ঘনবস্তু সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন।
- তাদের পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।
- তাদের আয়তন নির্ণয় করতে পারবেন।
- বিভিন্ন ঘনবস্তুর বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

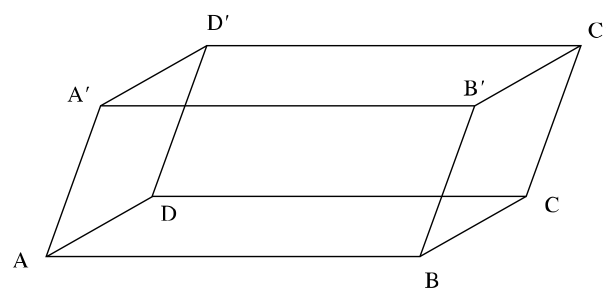
সুষম ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল

সমতল বা বক্রতল দ্বারা পরিবেষ্টিত কোন বস্তু যা কিছুটা স্থান দখল করে থাকে এরূপ বস্তুটিকে ঘনবস্তু (Solid) বলে। কোন ঘনবস্তুর সীমাবদ্ধ সমতল বা বক্রতলগুলোকে ঐ ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতল (Surface) বলা হয়। তিন বা ততোধিক তল একই বিন্দুতে মিলিত হলে ঘনকোণ (Solid angle) উৎপন্ন হয়। একাধিক পৃষ্ঠ যে রেখায় ছেদ করে তাকে ধার (Edge) বলে।

একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠতল ও বারটি ধার আছে। একটি ফুটবল একটি বক্রতল দ্বারা আবদ্ধ।

১) সামান্তরিক ঘনবস্তু (Paralle lopiped)

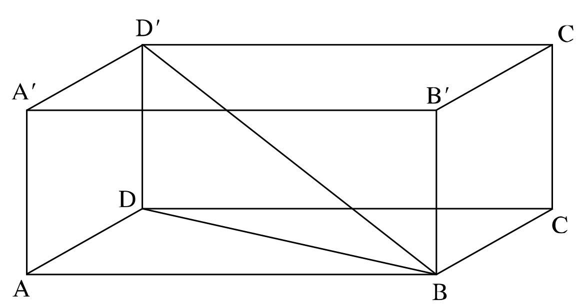
তিনজোড়া সমতল পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে সামান্তরিক ঘনবস্তু বলা হয়। এর ছয়টি সমতলের প্রত্যেকটি এক একটি সামান্তরিক এবং বিপরীত পৃষ্ঠগুলো সর্বতোভাবে সমান।



চিত্র: ১৯.১৩

২। আয়তনিক ঘন বা আয়তাকার ঘনবস্তু (Rectangular paralle lopiped)

যে সামান্তরিক ঘনবস্তু পৃষ্ঠতলগুলো আয়তক্ষেত্র, তাকে আয়তাকার ঘন বস্তু বলা হয়। চিত্রে আয়তাকার ঘনবস্তুর পূর্ণ $A'B'C'D'$, $ABC'D'$, $ABB'A'$, $DCC'D'$, $ADD'A'$, $BCC'B'$ এবং ধারগুলো AB, BC, CD, DA, $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$, AA', DD', BB' ও CC' এবং একটি কর্ণ AB।



চিত্র: ১৯.১৪

মনে করুন, ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $AB = a$, $AD = b$ এবং $AA' = c$

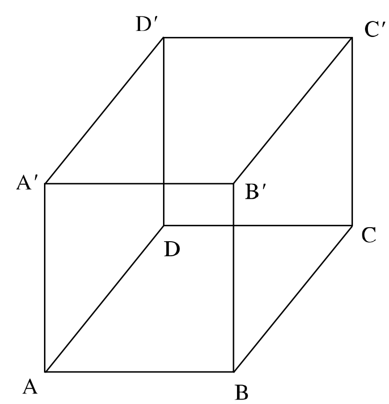
ক) আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল
= ছয়টি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি
= 2 (ABCD, ABB′A′ ও ADD′A′ পৃষ্ঠসমূহের ক্ষেত্রফলের সমান)
= 2 (ab+ac+bc) বর্গ একক
= 2 (ab+bc+ca) বর্গ একক

খ) এর কর্ণের দৈর্ঘ্য, $BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2}$
$= \sqrt{AB^2 + AD^2 + DD'^2}$
$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

গ) আয়তন = $AB \times AD \times AA'$ ঘন একক = abc ঘন একক

৩। ঘনক (Cube)

যে আয়তনিক ঘন বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান তাকে ঘনক বলা হয়।
সুতরাং, ঘনকের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা
অর্থাৎ a = b = c



চিত্রঃ ১৯.১৫

ক) এর একটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গ একক
খ) সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = $2(a^2+a^2+a^2) = 6a^2$ বর্গ একক
গ) কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$ একক $= \sqrt{3a^2}$ একক $= a\sqrt{3}$ একক
ঘ) আয়তন = a^3 ঘন একক

উদাহরণ-১ঃ
একটি আয়তানিক ঘণের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 15 মিটার, 12 মিটার ও 4 মিটার। এর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, আয়তন ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ
মনে করুন, দৈর্ঘ্য, a = 15 মিটার, প্রস্থ, b = 12 মিটার এবং উচ্চতা, c = 4 মিটার
$\therefore$ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = 2 (ab+bc+ca) বর্গ একক
= $2(15\times12+12\times4+4\times15)$ বর্গ মিটার
= 2 (180+48+60) বর্গ মিটার
= 2×288 বর্গ মিটার
= 576 বর্গ মিটার

আয়তন $= abc$ ঘন একক
$= 15 \times 12 \times 4$ ঘন মিটার
$= 720$ ঘন মিটার

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক
$= \sqrt{15^2 + 12^2 + 4^2}$ মিটার
$= \sqrt{225 + 144 + 16}$ মিটার
$= \sqrt{385}$ মিটার
$= 19.62$ মিটার

উদাহরণ-২ঃ
একটি আয়তিক ঘনের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি এবং দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার সমষ্টি 17 সে.মি। এর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ
মনে করুন, আয়তিক ঘণের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে a, b ও c সে.মি
$\therefore$ শর্ত অনুসারে, $a + b + c = 17$
এবং $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 12$
বা, $a^2 + b^2 + c^2 = 12^2 = 144$

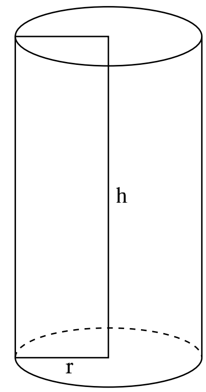
এখন, $a + b + c = 17$
বা, $(a + b + c)^2 + b^2 + c^2 = 17^2$
বা, $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 289$
বা, $144 + 2(ab + bc + ca) = 289$
বা, $2(ab + bc + ca) = 289 - 144$
বা, $2(ab + bc + ca) = 145$
$\therefore$ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 145$ বর্গ সে.মি

উদাহরণ-৩ঃ
একটি ঘনকের ঘনফল 125 ঘন সে.মি। এর প্রত্যেক ধারের মাপ ও কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

সমাধানঃ
মনে করুন, ঘনকের এক বাহুর পরিমাপ a সে.মি
সুতরাং এর ঘনফল $= a^3$ ঘন সে.মি
$\therefore a^3 = 125$
বা, $a = 5$ সে.মি
সুতরাং, ঘনকটির প্রত্যেক ধারের মাপ 5 সে.মি

এবং এর কর্ণের দৈর্ঘ্য $= a\sqrt{3}$ একক
$= 5\sqrt{3}$ একক

৪। বেলন বা সিলিন্ডার (Cylinder)



চিত্র: ১৯.১৬

কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে অক্ষ ধরে ঐ বাহুর চর্তুদিকে পূর্ণ আবর্তন সম্পন্ন করলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে বেলন বা সিলিন্ডার বলা হয়।

সিলিন্ডারের দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা h একক এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r একক হলে

ক) বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি $\times$ উচ্চতা
$= 2\pi r \times h$ বর্গ একক
$= 2\pi rh$ বর্গ একক

খ) সমগ্র পৃষ্ঠেল ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + বৃত্তাকার প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল
$= (2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গ একক
$= 2\pi r\,(h + r)$ বর্গ একক

গ) আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা
$= \pi r^2 \times h$ ঘন একক
$= \pi r^2 h$ ঘন একক

দ্রষ্টব্য : π এর মান 3.1416 ধরতে হবে।

উদাহরণ-৪ঃ
একটি সিলিন্ডারের উচ্চতা 12 সে.মি এবং ভূমির ব্যাস 7 সেমি। সিলিন্ডারটির আয়তন ও বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ
এখানে সিলিন্ডারটির উচ্চতা, $h = 12$ সে.মি
ভূমির ব্যাস $= 7$ সে.মি
$\therefore$ ভূমির ব্যসার্ধ, $r = \frac{1}{2} \times$ ব্যাস

$$= \frac{1}{2} \times 7 \text{ সে.মি}$$
$$= \frac{7}{2} \text{ সে.মি}$$

$\therefore$ সিলিন্ডারটির আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক

$$= 3.1416 \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 12 \text{ ঘন সে.মি}$$
$$= 3.1416 \times \frac{49}{4} \times 12 \text{ ঘন সে.মি}$$
$$= 461.8 \text{ ঘন সে.মি (প্রায়)}$$

এবং বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ একক

$$= 2 \times 3.1416 \times \frac{7}{2} \times 12 \text{ বর্গ সে.মি}$$
$$= 263.9 \text{ বর্গ সে.মি (প্রায়)}$$

উদাহরণ-৫ঃ

একটি বেলনাকার স্তম্ভের উচ্চতা 8 মিটার এবং পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গ মিটার। এর ভূমির ব্যসার্ধ, সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ

এখানে, স্তম্ভটির উচ্চতা, $h = 8$ মিটার

মনে করুন স্তম্ভটির ভূমির ব্যাসার্ধ $= r$ মিটার

যেহেতু স্তম্ভটি বেলনাকার, অতএব এর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$

প্রশ্নমতে, $2\pi rh = 2464$

বা, $2 \times 3.1416 \times r \times 8 = 2464$

বা, $r = \dfrac{2464}{2 \times 3.1416 \times 8}$

$= 49$ মি. (প্রায়)

সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh + 2\pi r^2$ বর্গ একক

$= 2464 + 2 \times 3.1416 \times (49)^2$ বর্গ মি.

$= 2464 + 15086$ বর্গ মি.

$= 17550$ বর্গ মি.

স্তম্ভটির আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক

$= 3.1416 \times (49)^2 \times 8$ ঘন মি.

$= 60344$ ঘন মি. (প্রায়)

উদাহরণ-৬ঃ
একটি ফাঁপা সিলিন্ডারের বাহির ও ভিতরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 11 সে.মি ও 10 সে.মি এবং উচ্চতা 14 সে.মি। সিলিন্ডারের দুই বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও ধাতব অংশের আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ
এখানে সিলিন্ডারের উচ্চতা, $h = 14$ সে.মি
সিলিন্ডারের বাহিরের ব্যাসার্ধ, $r_1 = 10$ সে.মি
এবং সিলিন্ডারের ভিতরের ব্যাসার্ধ, $r_2 = 11$ সে.মি

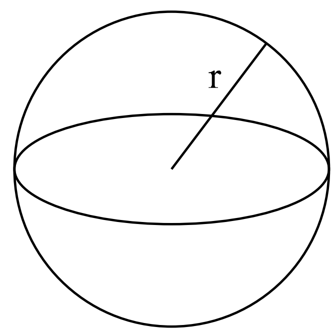
অতএব সিলিন্ডারের বাহিরের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r_1 h$ বর্গ একক
$= 2 \times 3.1416 \times 11 \times 14$ বর্গ সে.মি
$= 968$ বর্গ সে.মি (প্রায়)

অতএব সিলিন্ডারের ভিতরের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r_2 h$ বর্গ একক
$= 2 \times 3.1416 \times 10 \times 14$ বর্গ সে.মি
$= 880$ বর্গ সে.মি (প্রায়)

সিলিন্ডারটির ধাতব অংশের আয়তন = বাহিরের ব্যাসার্ধযুক্ত সিলিন্ডারের আয়তন-ভিতরের ব্যাসার্ধযুক্ত সিলিন্ডারের আয়তন
$= (\pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h)$ ঘন একক
$= \pi h (r_1^2 - r_2^2)$ ঘন সে.মি
$= 3.1416 \times 14 (11^2 - 10^2)$ ঘন সে.মি
$= 43.98 (121 - 100)$ ঘন সে.মি
$= 43.98 \times 21$ ঘন সে.মি
$= 923.6$ ঘন সে.মি (প্রায়)

৫। গোলক (Sphere)

কোন অর্ধবৃত্তক্ষেত্র তার ব্যাসকে অক্ষ ধরে ঐ ব্যাসের চতুর্দিকে অর্ধবৃত্তক্ষেত্রের একবার পূর্ণ আবর্তনের ফলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে গোলক বলে। অর্ধবৃত্তটির কেন্দ্রই গোলকের কেন্দ্র।



চিত্রঃ ১৯.১৭

গোলকের ব্যাসার্ধ r একক হলে,

ক) গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

খ) আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

উদাহরণ-৭ঃ
একটি গোলকের ব্যাস 14 মিটার হলে এর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ
গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1}{2} \times$ গোলকের ব্যাস
$= \frac{1}{2} \times 14$ মিটার
$= 7$ মিটার

অতএব গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক
$= 4 \times 3.1416 \times 7^2$ বর্গ মি
$= 616$ বর্গ মি (প্রায়)

গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক
$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 7^3$ ঘন মি
$= 1437$ ঘন মি (প্রায়)

উদাহরণ-৮ঃ
4 সে.মি ব্যাসের একটি লৌহ গোলককে পিটিয়ে $\frac{2}{3}$ সে.মি পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ কত?

সমাধানঃ
গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1}{2} \times$ গোলকের ব্যাস
$= \frac{1}{2} \times 4$ সে.মি
$= 2$ সে.মি

$\therefore$ গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক
$= \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3$ ঘন সে.মি
$= \frac{32\pi}{3}$ ঘন সে.মি

মনে করুন, বৃত্তাকার লৌহপাতের ব্যাসার্ধ $= r_1$ সে.মি
$\therefore$ বৃত্তাকার লৌহপাতের ক্ষেত্রফল $= \pi {r_1}^2$ বর্গ সে.মি
যেহেতু, লৌহপাতটি $\frac{2}{3}$ সে.মি পুরু

$\therefore$ বৃত্তাকার লৌহপাতের আয়তন $= \pi r_1^2 \times \frac{2}{3}$ ঘন সে.মি

সুতরাং, শর্তমতে $\frac{2}{3} \times \pi r_1^2 = \frac{32\pi}{3}$

বা, $2r_1^2 = 32$

বা, $r_1^2 = \frac{32}{2}$

বা, $r_1^2 = 16$

বা, $r_1 = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ = 4 সে.মি

উদাহরণ-৯ঃ

একটি গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল যত বর্গ একক তার আয়তন তত ঘন একক। এর ব্যাসার্ধ কত?

সমাধানঃ

মনে করুন, গোলকটির ব্যাসার্ধ = r

$\therefore$ এর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

এবং আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

প্রশ্নমতে, $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$

বা, $\frac{1}{3} r = 1$

বা, $r = 3$

$\therefore$ গোলকটির ব্যাসার্ধ = 3 একক

উদাহরণ-১০ঃ

10 মিটার পরিধি বিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। বাক্সটির খালি অংশের আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ

এখানে, গোলকের ব্যাস = ঘনকের এক বাহুর দৈর্ঘ্য

মনে করুন, গোলকটির ব্যাসার্ধ = r

$\therefore$ গোলকটির পরিধি $= 2\pi r$

$\therefore$ শর্তমতে, $2\pi r = 10$

বা, $r = \frac{10}{2\pi}$

বা, $r = \frac{10}{2\times3.1416}$ মি.

বা, $r = 1.54$ মি.

$\therefore$ গোলকের ব্যাস $= 2\times r = 2\times1.59 = 3.18$ মি.

$\therefore$ ঘনকের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= 3.18$ মি.

$\therefore$ ঘনকের আয়তন $=$ (বাহু)^3

$= (3.18)^3$ ঘন মি.

$= 32.16$ ঘন মি.

আবার গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

$= \frac{4}{3}\times3.1416\times(1.59)^3$ ঘন মি.

$= \frac{4}{3}\times3.1416\times4.02$ ঘন মি.

$= 16.84$ ঘন মি.

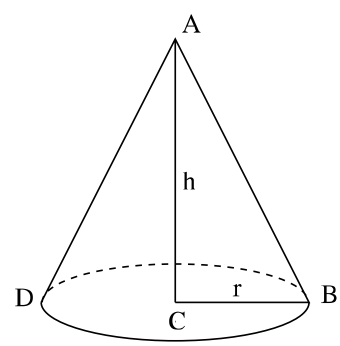
$\therefore$ ঘনকের খালি অংশের আয়তন = ঘনকের আয়তন - গোলকের আয়তন

$= (32.16 - 16.84)$ ঘন মিটার

$= 15.32$ ঘন মিটার

কোণক (Cone)

কোন সমকোণী ত্রিভুজ ক্ষেত্রের সমকোণ সংলগ্ন যে কোন একটি বাহুকে অক্ষ ধরে ঐ বাহুর চতুর্দিকে পূর্ণ আবর্তনের ফলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে কোণক বলা হয়।



চিত্র: ১৯.১৮

চিত্রে ABC একটি কোণক যার উচ্চতা $AB = h$ এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $BC = r$
BD বৃত্তটি কোণকটির ভূমি এবং AB বা AD কে এর তীর্যক উচ্চতা বলা হয়।
কোন কোণকের উচ্চতা h, ভূমির ব্যাসার্ধ r ও তীর্যক উচ্চতা l হলে

ক) তির্যক উচ্চতা, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ একক

খ) বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিধি $\times$ তির্যক উচ্চতা

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l \text{ বর্গ একক}$$
$$= \pi rl \text{ বর্গ একক}$$
$$= \pi r\sqrt{h^2 + r^2} \text{ বর্গ একক}$$

গ) সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল
$$= (\pi rl + \pi r^2) \text{ বর্গ একক}$$
$$= \pi r\,(l + r) \text{ বর্গ একক}$$

ঘ) আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা
$$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h \text{ ঘন একক}$$
$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ ঘন একক}$$

উদাহরণ-১১ঃ
কোন কোণকের উচ্চতা 12 সে.মি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি। এর তির্যক উচ্চতা, বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ
এখানে, উচ্চতা, $h = 12$ সে.মি
এবং ব্যাসার্ধ, $r = 7$ সে.মি

$\therefore$ কোণকের তির্যক উচ্চতা, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ একক
$$= \sqrt{12^2 + 7^2} \text{ সে.মি}$$
$$= \sqrt{144 + 49} \text{ সে.মি}$$
$$= \sqrt{193} \text{ সে.মি}$$
$$= 13.89 \text{ সে.মি (প্রায়)}$$

$\therefore$ কোণকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$ বর্গ একক
$$= 3.1416 \times 7 \times 13.89 \text{ বর্গ সে.মি}$$
$$= 305.46 \text{ বর্গ সে.মি (প্রায়)}$$

$\therefore$ কোণকের সমগ্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi r\,(l + r)$ বর্গ একক
$$= 3.1416 \times 7 \times (13.89 + 7) \text{ বর্গ সে.মি}$$
$$= 3.1416 \times 7 \times 20.89 \text{ বর্গ সে.মি}$$
$$= 459.4 \text{ বর্গ সে.মি (প্রায়)}$$

এবং আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক

$= \frac{1}{3} \times 3.1416 \times 7^2 \times 12$ ঘন সে.মি

$= 615.8$ ঘন সে.মি

উদাহরণ-১২ঃ

একটি কোণকের তির্যক উচ্চতা 21 সে.মি এবং তার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 396 সে.মি। কোণটির ভূমির ব্যাস কত?

সমাধানঃ

মনে করুন, কোণটির ভূমির ব্যাস $= r$ একক

এখানে তির্যক উচ্চতা, $l = 21$ সে.মি

$\therefore$ কোণকটির বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$

প্রশ্নমতে, $\pi rl = 396$

বা, $3.1416 \times r \times 21 = 396$

বা, $r = \frac{396}{3.1416 \times r \times 21}$

বা, $r = 6$ সে.মি (প্রায়)

$\therefore$ কোণকটির ভূমির ব্যাস $= 2 \times r = 2 \times 6$ সে.মি $= 12$ সে.মি (প্রায়)

অনুশীলনী ১৯

1। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর মাত্রাগুলো যথাক্রমে 12 মিটার, 4 মিটার, 3 মিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য, পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

2। একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য 10 মিটার ও প্রস্থ 8 মিটার। এতে 20 ঘন মিটার পানি ধরে। চৌবাচ্চার গভীরতা কত?

3। একটি ঘনকের আয়তন ২১৬ ঘন সে.মি। তার প্রত্যেক বাহু, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

4। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 4:3:2 এবং তার সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 468 বর্গ মিটার। ঘনবস্তুটির কর্ণ ও আয়তন নির্ণয় করুন।

5। একটি ঘনকের প্রতি তলের কর্ণ $8\sqrt{3}$ সে.মি। ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় করুন।

6। ধাতু নির্মিত তিনটি ঘনকের ধারগুলো যথাক্রমে 4, 3 ও 5 সে.মি। তাদেরকে গলিয়ে একটি ঘনকে পরিণত করা হল। দেখান যে, নতুন ঘনকটির ধার 6 সে.মি।

7। ঢাকনাসহ একটি বাক্সের বহি:পৃষ্ঠের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি, 9 সে.মি ও 7 সে.মি এবং ভিতরের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 262 বর্গ সে.মি। বাক্সটির পাত কত পুরু তা নির্ণয় করুন।

8। একটি সিলিন্ডারের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি এবং আয়তন 150 ঘন সে.মি। এর ভূমির ব্যাসার্ধ ও আয়তন নির্ণয় করুন।

9। সিলিন্ডার আকৃতির একটি চিমনীর উচ্চতা 30 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 14 মিটার। প্রতি বর্গমিটার 5 টাকা হিসেবে বক্র পৃষ্ঠে রং করতে কত খরচ হবে।

10। 11 ঘন সে.মি একখন্ড লোহার পাতকে পিটিয়ে 56 সে.মি লম্বা একটি তারে পরিণত করা হল। ঐ তারের প্রান্তীয় ব্যাস কত?

11। একটি ধাতব সিলিন্ডারের ভূমির বাইরের ও ভিতরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 14 সে.মি ও 7 সে.মি। যদি সিলিন্ডারটির উচ্চতা 10 সে.মি হয় তবে এর ধাতব অংশের ঘনফল ও দুই বক্রপৃষ্ঠের বাইরের ও ভিতরের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

12। একটি গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 9856 বর্গ সে.মি। এর ব্যাস নির্ণয় করুন।

13। একটি সিলিন্ডারের উচ্চতা ও ভূমির ব্যাস প্রত্যেকেই 6 মিটার। যে গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সিলিন্ডারটির পৃষ্ঠেল ক্ষেত্রফলের সমান তার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

14। একটি আয়তিক সীমাবদ্ধের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 11 মি, 10 মি, ও 5 মি। একে গলিয়ে 50 সে.মি ব্যাসের কতগুলো গোলক প্রস্তুত করা যাবে?

15। একটি ফাঁপা গোলকের বাহির ও ভিতরের দিকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6 সে.মি ও 3 সে.মি। এর আয়তন কত?

16। সমান উচ্চতা বিশিষ্ট একটি কোণক, একটি গোলক ও একটি সিলিন্ডার সমান ভূমির উপর অবস্থিত। দেখান যে, তাদের আয়তনের অনুপাত 1:2:3।

17। একটি কোণকের বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 330 বর্গ সে.মি এবং ভূমির ব্যাস 14 সে.মি। এর উচ্চতা এবং তির্যক উচ্চতা নির্ণয় করুন।

18। একটি সমকোণী ত্রিভূজের অতিভুজ ভিন্ন অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.5 সে.মি ও 4 সে.মি। একে বৃহত্তম বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে কোণক উৎপন্ন হয় তার আয়তন নির্ণয় করুন।

19। একটি কোণকের আয়তন 154 ঘন সে.মি এবং উচ্চতা 12 সে.মি। এর ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১৯

1. 13 মিটার, 192 বর্গ মিটার, 144 ঘন মিটার; 2. 25 সে.মি; 3. 6 সে.মি, $6\sqrt{3}$ সে.মি, 216 বর্গ সে.মি ; 4. 16.48 মি. (প্রায়), 648 ঘন মিটার; 5. $8\sqrt{3}$ সে.মি, 512 ঘন সে.মি; 7. 1 সে.মি; 8. 3 সে.মি, 5.3 সে.মি; 9. 13200 টাকা; 10. 0.25 সে.মি (প্রায়); 11. 4620 ঘন সে.মি (প্রায়), 880 বর্গ সে.মি (প্রায়), 440 বর্গ সে.মি (প্রায়); 12. 56 সে.মি (প্রায়); 13. 3 মিটার; 14. 8403 টি; 15. 792 ঘন সে.মি (প্রায়); 17. 13.27 সে.মি (প্রায়), 15 সে.মি (প্রায়); 18. 51.33 ঘন সে.মি (প্রায়); 19. 3.5 সে.মি (প্রায়);