ইউনিট
২০
ত্রিকোণমিতির মৌলিক ধারণা

ভূমিকা

ত্রিকোণমিতি শব্দটি এসেছে গ্রীক শব্দ Trigronmentro থেকে। Trigonon শব্দের অর্থ তিনটি কোণ বা ত্রিভুজ এবং metron শব্দের অর্থ পরিমাপ। অর্থাৎ ত্রিকোণমিতি অর্থ ত্রিভুজের পরিমাপ। গণিতের যে শাখায় তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ এবং তদসম্পর্কীয় বিষয় আলোচিত হয় তাকে ত্রিকোণমিতি বলা হয়। অতি প্রাচীন কালে ত্রিকোণমিতির পরিধি শুধুমাত্র ত্রিভুজের কোণ, বাহু ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ ছিল। বর্তমানে গণিতের যে কোন শাখায় শিক্ষালাভের জন্য ত্রিকোণমিতির জ্ঞান একান্ত অপরিহার্য। ত্রিকোণমিতি দুইটি শাখায় বিভক্ত। সমতল ত্রিকোণমিতি (Plane Trigonmetry) এবং গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (Spherical Trigonemetry)। আমাদের আলোচনা শুধুমাত্র সমতল ত্রিকোণমিতিতে সীমাবদ্ধ থাকবে।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ করতে পারবেন,
- কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে পারবেন,
- সম্পর্কগুলোর সাহায্যে সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবে।

পাঠ-১ ঃ ত্রিকোণমিতিক কোণ ও কোণের পরিমাপ

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি –

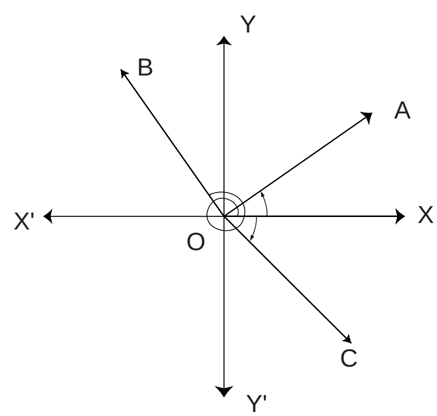
- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- চৌকণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- কোণের ডিগ্রী ও রেডিয়াল পরিমাপ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন।

ত্রিকোণমিতিক কোণ

জ্যামিতিতে সাধারণত দুইটি পরস্পরচ্ছেদী রশ্মি দ্বারা কোণ উৎপত্তি হয় এবং কোণের পরিমাপ $0°$ হতে $360°$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে ও তা ধনাত্মক হয়।

ত্রিকোণমিতিতে একটি পূর্ণাঙ্গমান রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ আবর্তিত হয় তাই ঐ রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাপ।

মনে করুন XOX' এবং YOY' দুইটি স্থির রশ্মি লম্বভাবে অবস্থিত। এমন যদি একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OK অবস্থান হতে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরে OA অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে কোণের সংযানুযায়ী ঘূর্ণায়মান রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমান $\angle XOA$। এখন যদি এই ঘূর্ণায়মান বেগটি একই দিকে ঘুরতে ঘুরতে আদি অবস্থান OX পার হয়ে OB অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে সৃষ্ট কোণের পরিমাপ হবে $\angle XOB$ এবং তা দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।



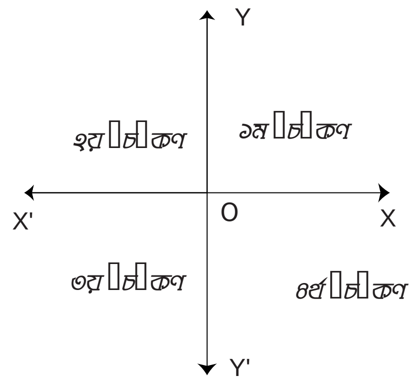
চিত্র: ২০.১

উপরোক্ত দুইটি ক্ষেত্রেই কোণের পরিমাণ ধনাত্মক। কিন্তু যদি ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাটা যে দিকে ঘোরে আদি অবস্থান OX হতে সেদিকে ঘুরে OC অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে কোণের পরিমাণ হবে $\angle XOC$ এবং তা হবে ঋণাত্মক।

সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাণ $O°$ হতে করে যে কোন মানের হতে পারে এবং তা ধনাত্মক ও ঋনাত্মক উভয়ই হতে পারে। ত্রিকোণমিতিক কোণগুলি যে সাধারনত A B, C, α (আলফা), β (বিটা), γ (গামা), θ (থিটা) ইত্যাদি অক্ষর দ্বারা সূচীত করা হয়।

চৌকণ (Quadrant)

চিত্রে লম্বভাবে দণ্ডায়মান XOX' এবং YOY' রশ্মি দুইটি সমতল ক্ষেত্রটিকে চারটি অংশে বিভক্ত করেছে। এই চারটি অংশের প্রত্যেকটিকে চৌকণ (Quadrant) বলে। চিত্রে XOXY, XOX', X'OY' এবং Y'OX অংশকে যথাক্রমে ১ম, ২য়, ৩য় ও ৪র্থ চৌকণ বলা হয়। সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ যাই হোক না কেন তা এই চারটি চৌকণের যে কোন একটির মধ্যে অবস্থান করবে।



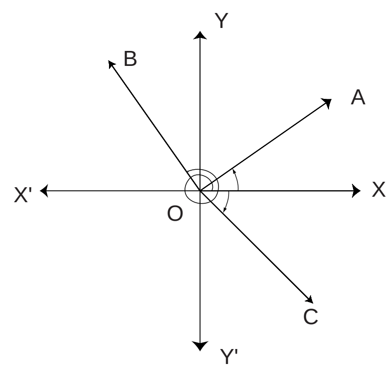
চিত্র : ২০.২

এখন আসুন আমরা উদাহরণের মাধ্যমে বুঝতে চেষ্টা করি ত্রিকোণমিতিক কোণ কিভাবে কোন্ চৌকণে অবস্থান করে।

উদাহরণ 1: 280° কোণ কোন্ চৌকণে অবস্থান করে?

সমাধান : 280° কোণটি চতুর্থ চৌকণে অবস্থান করবে। যেহেতু $280° = 3\times90+10°$

ব্যাখ্যা : যেহেতু 280° কোণটি ধনাত্মক। অতএব কোণটি উৎপন্ন হবে কোণ সৃষ্টিকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনের ফলে। এখানে ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরতে ঘুরতে তিনটি চৌকণে 270° অতিক্রম করে এবং অবশিষ্ট 10 ঘুরে ৪র্থ চৌকণে অবস্থান করবে। সুতরাং 280° কোণটি ৪র্থ চৌকণে অবস্থান করবে।



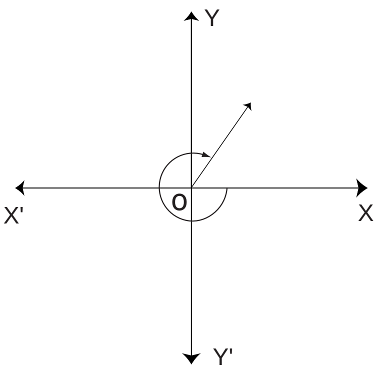
চিত্র : ২০.৩

উদাহরণ 2: -280° কোণটি কোন্ চৌকণে অবস্থান করবে।

সমাধান : যেহেতু $-280° = -(3.90°+10°)$

$\therefore$ -280° কোণটি **১ম** চৌকণে অবস্থাণ করবে।

ব্যাখ্যা : যেহেতু $-280°$ কোনটি ঋণাত্মক। অতএব কোনটি উৎপন্ন হবে কোণ সৃষ্টিকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুর্ণনের ফলে। এখানে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেদিকে ঘুরতে ঘুরতে তিনটি চৌকণে $270°$ অতিক্রম করার পর অবশিষ্ট $10°$ অতিক্রম করে ১ম চৌকণে অবস্থান করবে। সুতরাং $-280°$ কোণটি ১ম চৌকণে অবস্থান করবে।



চিত্র : ২০.৪

নির্দিষ্ট পরিমান কোণ চিহ্নিত করার পর ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যে প্রান্ত অবস্থানে অবস্থান করে, সেই প্রান্ত অবস্থানকে প্রান্তিক রেখা বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর (Radius Vector) বলা হয়।

ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ

সংজ্ঞানুসারে সমকোণের পরিমাণ হল স্থির বা ধ্রুব (   ) সমকোণকে মূল একক ধরে ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের জন্য তিন প্রকার পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতিগুলো হল–

i) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesmal System)

ii) শতমূলক পদ্ধতি (Sentesimal System)

iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

i) ষাটমূলক পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান ৭০ ভাগে ভাগ করে প্রতিটি ভাগকে ডিগ্রী বলা হয়। প্রতিটি ডিগ্রীকে ৬০ মিনিটে এবং প্রতিটি মিনিটকে ৬০ সে ভাগ করা হয়। অর্থাৎ

1 সমকোণ = $90°$ (নব্বই ডিগ্রী)

$1°$ = $60'$ (ষাট মিনিট)

$1'$ = $60''$ (ষাট সেকেন্ড)

ক্ষুদ্রতম ভাগগুলো ৬০ বলে এর নামকরণ হয়েছে ষাটমূলক কোণ পরিমাপের এই পদ্ধতিকে সাধারণ (Common) বা বৃটিশ (British) পদ্ধতিও বলা হয়।

ii) শতমূলক পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান ১০০ ভাগে ভাগ করে প্রতিটি ভাগকে গ্রেড বলা হয়। প্রতিটি গ্রেডকে এক শতমূলক মিনিট এবং প্রতিটি এক শতমূলক মিনিটকে একশতমূলক সেকেন্ড ভাগ করা হয়। অর্থাৎ

1 সমকোণ = 100^g (একশত গ্রেড)

1 = 100 (একশত শতমূলক মিনিট)

1 = 100 (একশত শতমূলক সেকেন্ড)

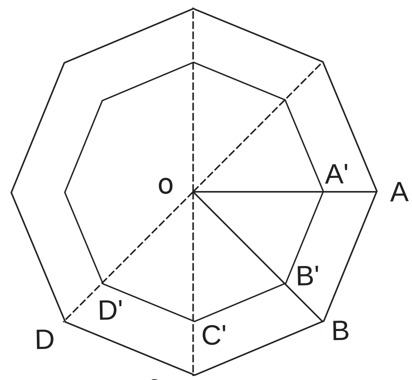
ক্ষুদ্রতম ভাগগুলো ১০০ বলে এর নামকরণ হয়েছে শতমূলক। এই পদ্ধতিকে ফরাসি পদ্ধতিও বলে।

iii) **বৃত্তীয় পদ্ধতি** : এই পদ্ধতিতে মূল একক হল রেডিয়ান একে 1^c চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ তার কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় এক রেডিয়ান। রেডিয়ান একটি স্থির (Constant) কোণ। এই সত্যতা প্রমাণ করতে হলে নিম্নলিখিত উপপাদ্য সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা থাকতে হবে।

উপপাদ্য : যে কোন বৃত্তের পরিধি ও তার ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক।

প্রমাণ : মনে করুন O দুইটি বৃত্তের সাধারণ কেন্দ্র। বড় বৃত্তটিতে n সংখ্যা সমান বাহু বিশিষ্ট ABCD ... বহুভুজ অংকন করুন। OA, OB, OC, OD .... যোগ করুন। এই রেখাগুলি ছোট বৃত্তটিকে A', B', C', D', ...বিন্দুতে ছেদ করে। এখন A'B', B'C', C'D', ... যোগ করুন। তাহলে A'B'C'D' .... ক্ষেত্রটি ছোট বৃত্তে অন্তর্লিখিত n-সংখ্যক সমান বাহু বিশিষ্ট বহুভুজ হবে।



চিত্র : ২০.৫

এখন $OA = OB$ (বড় বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ)

এবং $OA = OB$ (ছোট বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ)

সুতরাং $\frac{OA}{OA} = \frac{OB}{OB}$,

অতএব, $\angle AOB$, ΔOAB এবং Δ OAB এর সাধারণ কোণ

অতএব, ΔOAB এবং ΔOAB সদৃশকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ $\frac{OB}{OB} = \frac{OA}{OA}$

বা, $\frac{n.OB}{n.OB} = \frac{n.OB}{n.OA}$

বা, $\frac{n.AB}{n.OB} = \frac{n.OB}{n.OA}$

অর্থাৎ $\frac{\text{বড় বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

$= \frac{\text{ছোট বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

এখন বহুভুজের বাহু সংখ্যা n যত বেশী হবে AB .... এবং অন্যান্য বাহুগুলির দৈর্ঘ্য তত ছোট হবে। যদি n .... যায় অসীম হয় তাহলে উভয় বহুভুজে বাহুগুলি বৃত্তের পরিধির সাথে প্রায় মিশে থাকে।

সুতরাং (i) নং সমীকরণ নিম্নরূপ আকার ধারণ করবে

$$\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

বা, $\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাস}}$ ... ... ।

এভাবে যে কোন সংলগ্ন বৃত্ত অংকন করে (ii) নং সমীকরণের সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

সুতরাং = ধ্রুব সংখ্যা

এই ধ্রুব সংখ্যাকে π দ্বারা নির্দেশ করা হয়। ইহা একটি অমূলক সংখ্যা। একে কোন ক্রমেই একটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায় না। π এর মূল আসন্ন মান (Approximate Value) হিসাবে $\frac{22}{7}$ আসন্ন মান $\frac{22}{7}$ বা 3.1416 (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

অসুসিদ্ধান্ত : কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r এবং d ধরা হলে (ii) নং সূত্র অনুসারে

$$\frac{\text{পরিধি}}{d} = \pi$$

বা, পরিধি $= \pi d$

$= \pi....2r$

$= 2\pi r$

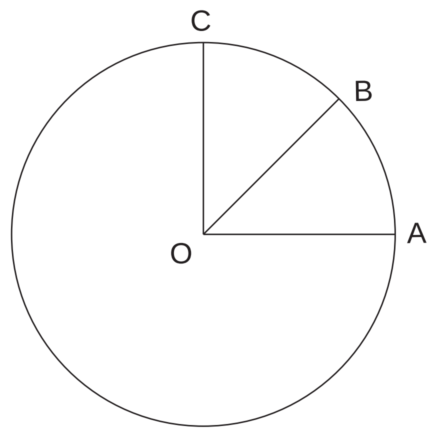
$\therefore$ বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

[বৃত্তের পরিধি = $\pi d = 2\pi r$ যেখানে d>বৃত্তের ব্যাস এবং r = ব্যাসার্ধ)]

প্রমাণ করুন, রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ

মনে করুন, O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ। এখন ব্যাসার্ধের সমান করে বৃত্তের পরিধিতে একটি চাপ AB অংকন করুন। তাহলে সংজ্ঞানুসারে $\angle AOB = 1^c$

এখন OA সরল রেখার উপর OC লম্ব অংকন করুন। তাহলে, $\angle AOC$ = এক সমকোণ এবং বৃত্তচাপ AC = বৃত্তের পরিধির এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4}.2\pi r = \frac{\pi r}{2}$



চিত্র : ২০.৬

আমরা জানি, বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক,

সুতরাং $\frac{\angle AOB}{\text{বৃত্তচাপ } AB} = \frac{\angle AOC}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

বা, $\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{বৃত্তচাপ } AB}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

বা, $\frac{1^c}{\text{এক সমকোণ}} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}}$

বা, $1^c = \frac{2}{\pi} \times$ এক সমকোণ

যেহেতু π এবং সমকোণের মান ধ্রুব। অতএব রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।

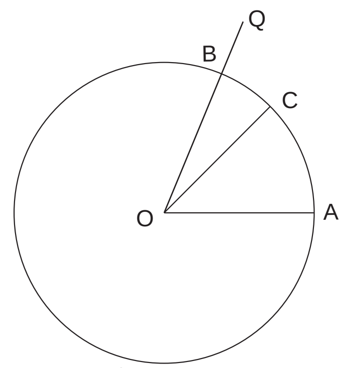
কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ

বৃত্তীয় একক অর্থাৎ রেডিয়াম এককে কোন কোণের পরিমাপ তার বৃত্তীয় পরিমাপ (Circular Measure) বলা হয়।

উপপাদ্য : বৃত্তের যে কোন চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান।

[বৃত্তীয় একক অর্থাৎ রেডিয়ান এককে কোন কোণের পরিমাপকে তার বৃত্তীয় পরিমাপ বলে।]

মনে করুন, $\angle POQ$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। O কে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অংকন করুন যা OP এবং OQ কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। এখন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি বৃত্তচাপ AC নিন। তাহলে, চাপ AC = ব্যাসার্ধ OA এবং $\angle AOC$ = এক রেডিয়ান।



চিত্র : ২০.৭

আমরা জানি, একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ সেই বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।

সুতরাং $\dfrac{\angle AOB}{\text{চাপ } AB} = \dfrac{\angle AOC}{\text{চাপ } AC}$

বা, $\dfrac{\angle AOB}{\angle AOC} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AC}$

বা, $\dfrac{\angle AOB}{\text{এক রেডিয়ান}} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{r}$

বা, $\angle AOB = \dfrac{\text{চাপ } AB}{r} \times$ এক রেডিয়ান

বা, $\angle AOB = \dfrac{s}{r}$ রেডিয়ান, যেখানে চাপ AOB = s

সুতরাং বৃত্তের যে কোন চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান। এখন $\angle AOB$ এর বৃত্তীয় পরিমাপ θ রেডিয়ান হলে তাকে $\angle AOB = \theta$ রেডিয়ান আকারে লিখা যায়:

তাহলে $\angle AOB = \dfrac{s}{r}$ রেডিয়ান

বা θ রেডিয়ান $= \dfrac{s}{r}$ রেডিয়ান

$\therefore \quad \theta = \dfrac{s}{r}$

অনুশীলনী =২০.১

1. ত্রিকোণমিতিক কোণের ধারণা ব্যাখ্যা করুন।
2. কোন পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতিগুলি বর্ণনা করুন।
3. প্রমাণ করুন, রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।
4. প্রমাণ করুন $\theta = \dfrac{s}{r}$,যেখানে s = বৃত্তের চাপ এবং r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

পাঠ-২ ঃ কোন পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি –

- কোন পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।
- সম্পর্কগুলোর সাহায্যে সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্কঃ

ক) ষাটমূলক ও শতমূলক এককের মধ্যে সম্পর্ক

ষাটমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ $= 90°$

এবং শতমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ $= 100^g$

সুতরাং $90° = 100^g$

বা $90° = 100^g$

বা $9° = 10^g$

বা $1° = 10^g$

বা $1° = \left(\frac{10}{9}\right)^g = 1.11^g$ (প্রায়)

আবার $10^g = 9°$

$\therefore$ $1g = \left(\frac{9}{10}\right)° = 0.9°$ (প্রায়)

খ) ষাটমূলক, শতমূলক ও বৃত্তীয় এককের মধ্যে সম্পর্ক

সুতরাং $1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ

বা $1^c = \frac{2}{\pi} \times 90°$

বা $1^c = \frac{180°}{\pi}$

বা $1^c = \frac{180°}{3.1416} = 57°17'44.8''$

আবার

$1^c = \frac{\pi}{180°}$ রেডিয়ান

$1^c = \frac{3.1416}{180°}$ রেডিয়ান $= 0.0174533$ রেডিয়ান

কিন্তু অপর দুইটি পদ্ধতি অনুসারে

$$2 \text{ সমকোণ} = 180° = 200^g$$

$$2 \text{ সমকোণ} = 180° = 200^g = \pi^c$$

$$1 \text{ সমকোণ} = 90° = 100^g = \frac{\pi^c}{2}$$

মনে করুন, একটি নির্দিষ্ট কোণের পরিমাণকে ষাটমূলক শতমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D ডিগ্রী, G গ্রেড এবং θ রেডিয়ান নির্দেশ করা হল। তাহলে,

$$180° = \pi \text{ রেডিয়ান}$$

$$\therefore \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$D° = \frac{\pi}{180} \times D \text{ রেডিয়ান}$$

আবার যেহেতু $200^g = \pi$ রেডিয়ান

$$G^g = \frac{\pi}{200} \times G \text{ রেডিয়ান}$$

সুতরাং $= \frac{\pi D}{180} = \frac{\pi G}{200} = \theta$

$$\therefore \quad \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{\theta}{\pi}$$

লক্ষ করুন

$$1° = \frac{\pi^c}{180}$$

$$\therefore \quad 30° = \frac{\pi}{180} \times 30 = \frac{\pi^c}{6}$$

$$45° = \frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi^c}{4}$$

$$60° = \frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi^c}{3}$$

$$90° = \frac{\pi}{180} \times 90 = \frac{\pi^c}{2}$$

এবং $180° = \frac{\pi}{180} \times 180 = \pi^c$

রেডিয়ান প্রতীক উহ্য রেখে সম্পর্কগুলিকে আমরা নিম্নলিখিতভাবে পড়বো।

উদাহরণ-1. $20°15'30''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধান : $30'' = \frac{30}{60}' = \frac{1}{2}'$

$$\therefore \quad 15'30'' = 15\frac{1}{2}' = \frac{31}{2}' = \frac{31}{2}' = \left(\frac{31}{2\times 60}\right)^\circ = \left(\frac{31}{120}\right)^\circ$$

অতএব $20°15'30'' = \left(20\frac{31}{120}\right)^\circ$

$$= \left(\frac{2431}{120}\right)^\circ$$

$$= \frac{2431}{120\times90} \text{ সমকোণ}$$

$$= \frac{2431}{10800} \times \frac{\pi^c}{2}$$

$$= \frac{2431}{21600} \times \pi^c$$

$$= 0.116\ \pi^c \text{ (প্রায়)}$$

উদাহরণ-2. $20^g25'20''$ কে ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান : $20^g25'20''$

$$= 20^g+0.25^g+0.0020^g$$

$$=20.252^g$$

$$= 20.252 \times 100 \text{ সমকোণ}$$

$$= ০.20252 \text{ সমকোণ}$$

$$= 90 \times ০.20252°$$

$$= 18.2258°$$

$$= 18° (60 \times 0.2268)'$$

$$= 18°13.608'$$

$$= 18°13 (60\times0.608)''$$

$$= 18°13\ 36.48''$$

উদাহরণ 3 : কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 3:4:5। কোণগুলিকে ডিগ্রী ও রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধান: ধরুন, ধরুন একটি কোণের পরিমাণ = 3x

অতএব, শর্তমতে ত্রিভুজের অপর কোণ দুইটি 4x এবং 5x.

ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 18y°

অর্থাৎ $3x+4x+5x = 180°$

বা, $12x = 180°$

বা, $x = = \frac{180°}{12} = 15°$

∴ প্রথম কোণটি = $3x = 3\times15° = 45°$

দ্বিতীয় কোণটি = $4x = 4\times15° = 60°$

তৃতীয় কোণটি = $5x = 5\times15° = 75°$

আবার $1° = \frac{\pi^c}{180}$

∴ $45° = \frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi^c}{4}$

$60° = \frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi^c}{3}$

এবং $75^\circ = \frac{\pi}{180} \times 90 = \frac{\pi^c}{12}$

$\therefore$ ত্রিভুজের কোণ তিনটি $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ অথবা $\frac{\pi^c}{4}, \frac{\pi^c}{3}$, এবং $\frac{\pi^c}{12}$

উদাহরণ 4। একটি গাড়ীর চাকার ব্যাস 4 ফুট এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 4 বার ঘোরে। গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান : চাকার ব্যাস $d = 4$ ফুট

$\therefore$ চাকার ব্যাসার্ধ $r = \frac{d}{2} = \frac{4}{2}$ ফুট $= 2$ ফুট

$\therefore$ চাকার পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 2$ ফুট $= 12.5664$

অর্থাৎ চাকাটি 1 বার ঘুরে 12.5664 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে।

যেহেতু চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে ৪ বার ঘোরে।

অতএব 1 সেকেন্ডে গাড়িটির অতিক্রম দূরত্ব $= 12.5664 \times 8$ ফুট

$\therefore$ 1 ঘন্টা বা 60×60 ... ... $= 12.5664 \times 8 \times 60$

$$= \frac{12.5664 \times 8 \times 60 \times 60}{3}$$

$$= \frac{12.5664 \times 8 \times 60 \times 60}{3 \times 1760}$$

= ৬৮.৫৪৪ মাইল

= ৬৯ মাইল (প্রায়)

$\therefore$ গাড়িটির গতিবেগ ঘন্টায় 69 মাইল (প্রায়)

উদাহরণ 5। একটি বৃত্তকার পথে ঘন্টায় 6 কি.মি. বেগে দৌড়ে এক ব্যক্তি ৩৬ সেকেন্ডে এমন একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে যা কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় করুন।

সমাধান : 1 ঘন্টায় বা 60×60 সেকেন্ডে অতিক্রম করে ৬ কি.মি. = ৬×১০০০ মি.

$\therefore$ 1 সেকেন্ডে " " " $= \frac{60 \times 1000}{60 \times 60}$ মি.

$\therefore$ 36 সেকেন্ডে " " " $= \frac{60 \times 1000}{60 \times 60}$ মি.

$= 60$ মি.

$\therefore$ বৃত্তের চাপ $= 60$ মি.

আমরা জানি $\theta = \frac{s}{r}$

$\therefore r = \frac{s}{\theta}$

যেহেতু r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ, s = বৃত্তচাপ, θ = কোণের পরিমান

এখানে $s = 60$ মি.

$\theta = 56^\circ = 56^\circ \times \frac{\pi c}{180}$

অতএব মান বসিয়ে পাই-

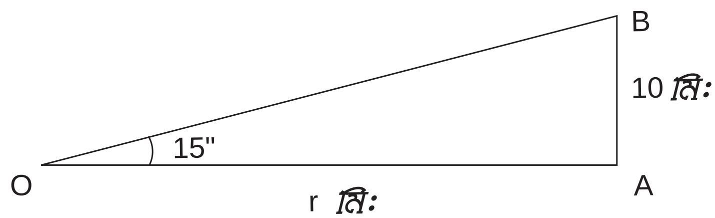
$$r = \frac{60}{\frac{60\pi}{180}} \text{ মি.}$$

$$= \frac{60\times180}{56\times3.1416} \text{ মি.}$$

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস = 2π = 2×61.38 মি = 122.74 মি = 123 মি

উদাহরণ 6 : 10 মিটার উঁচু একটি খুটি কত দূরে 15″ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধানঃ



চিত্র : ২০.৮

মনে করুন AB খুটিটি ভূমির উপর O বিন্দুতে 15″ কোণ উৎপন্ন করে। ধরুন OA = y। যেহেতু ∠AOB খুব ক্ষুদ্র।

সুতরাং AB-এর দৈর্ঘ্য OA এর দৈর্ঘ্যের তুলনায় খুব ক্ষুদ্র হবে। সুতরাং AB কে একটি বৃত্তের চাপ ধরা যেতে পারে যার কেন্দ্র D এবং ব্যাসার্ধ = r.

এখন $15'' = \frac{15'}{60} = \frac{15^\circ}{60\times60} = \frac{15}{60\times60}\,\frac{15}{180}$ রেডিয়ান

এখন $s = \pi\theta$ সম্পর্ক হতে পাই

$$10 = r.\frac{15\pi}{60\times60\times180}$$

বা, $$r = \frac{60\times60\times180\times10}{15\pi} \text{ মি.}$$

$$= \frac{60\times60\times180\times10}{15\times3.1416} \text{ মি.}$$

$$= \frac{60\times60\times180\times10}{15\times3.1416\times1000} \text{ কি.মি.}$$

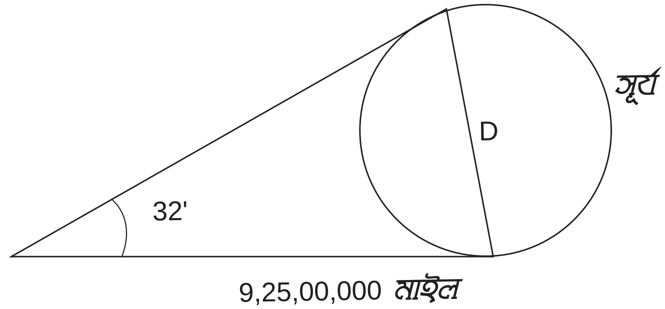
= ১৩৭.৫০৯ কি.মি (প্রায়)

= ১৩৭.৫১ কি.মি (প্রায়)

অতএব খুটিটি 137.51 কি.মি দুরে 15″ কোণ উৎপন্ন করে।

উদাহরণ 7 : পৃথিবী থেকে সূর্যের গড় দূরত্ব 8,25,00,000 মাইল ধরা হল। যদি সূর্য দর্শকের চোখের অবস্থানের সাথে 32′ কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে সূর্যের ব্যাস কত?

সমাধানঃ



চিত্র : ২০.৯

মনে করুন সূর্যের ব্যাস D মাইল। যেহেতু দর্শকের চোখের অবস্থানের সাথে সূর্যের ব্যাস θ দ্বারা উৎপন্ন কোণের পরিমান খুব ছোট সুতরাং দর্শক অর্থাৎ পৃথিবী হতে সূর্যের দূরত্বের তুলনায় সূর্যের ব্যাসের পরিমাণ অতি ক্ষুদ্র হবে।

সুতরাং সূর্যের ব্যাসকে সেই বৃত্তের চাপ কল্পনা করা যেতে পারে যার ব্যাসার্ধ = 7,25,00,000 মাইল এবং কেন্দ্র হল দর্শকের অবস্থান।

এখন $32' = \frac{32^\circ}{60} = \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

এখন $s = r\theta$. যেখানে s = বৃত্তের চাপ, r = বৃত্তের ব্যাসার্থ এবং θ = নির্দিষ্ট কোণ সম্পর্ক হতে পাই-

D $= 9,25,00,000 \times \frac{32\pi}{60\times180}$ মাইল

$= \frac{92500000\times32\times3.1416}{60\times180}$ মাইল

$= 8,61,031$ মাইল (প্রায়)

অনুশীলনী - 20.2

1. রেডিয়ানে প্রকাশ করঃ

i) 20°5'6"	ii) 40°25'36"	iii) 45°12'23.2"

[উঃ i) $0.111\pi^c$ ii) 40°25'36" iii) 45°12'23.2"

2. ষাট মূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন-

i) $23^g25'20"$	ii) $5^g2'5"$	iii) $\frac{\pi}{15}$

[উঃ i) 20"50'11.5" ii) 4°31'6.4" iii) 12°

3. একটি চাকার ব্যাসার্ধ 3 মি. হলে তার পরিধি কত? [উঃ 19 মি.]

4. একটি ত্রিভুজের কোণসমূহ যথাক্রমে x°, 25^g এবং $\frac{11\pi}{36}$ । x-এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ 102.5]

৫. একটি গাড়ির চাকা 200 বার আবর্তন করে 400 মি. অতিক্রম করে। চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন। [উঃ 0.636]

৬. একটি রেলগাড়ীর চাকার ব্যাস 1.5 মিটার এবং চাকাটি প্রতি ... সেকেন্ডে ৫ বার ঘোরে। রেলগাড়ীর গতিবেগ ঘন্টায় কত? [উঃ 85 কিমি (প্রায়)]

৭. দুইটি কোণের সমষ্টি ও অন্তর যথাক্রমে 1 রেডিয়ান 1° হলে ক্ষুদ্রতম কোণটির মান রেডিয়ানে প্রকাশ করুন। [উঃ $\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{180})$]

৮. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 1:2:3। কোণ তিনটিকে ডিগ্রী ও রেডিয়ানে প্রকাশ করুন। [উঃ 30°60°90°, $\frac{\pi^c}{6}, \frac{\pi^c}{3}, \frac{\pi^c}{2}$]

৯. একটি কোণের ডিগ্রীতে পরিমাপ D° ও রেডিয়ানে পরিমাপ R^c হলে দেখান যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

১০. ষাটমূলক ও শতমূলক পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে x ও y হলে দেখান যে 250x = 81y।

১১. এক ব্যক্তি ঘন্টায় 10 মাইল বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে এমন একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে যা বৃত্তের কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় করুন। [উঃ 1080 ফুট]

১২. যদি একটি বৃত্তচাপ 40 ফুট দীর্ঘ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে 60^g কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [উঃ 37.3 ফুট (প্রায়)]

১৩. নিম্নলিশিত সময়ে বৃত্তটার ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটা মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপকে রেডিয়ানে, ডিগ্রী ও গ্রেডে প্রকাশ করুন।

i) 10 টা 15 মিনিট ii) 3 টা iii) 4 টা 40 মিনিট

[উঃ i) $\frac{19\pi}{24}$, 142°30', 158.3^g ii) $\frac{\pi}{2}$, 90°, 100^g iii) $\frac{5\pi}{9}$, 100°, 111.1^g

১৪. পৃথিবী থেকে চাঁদের দূরত্ব 237600 মাইল। চাঁদের ব্যাস পৃথিবীর কোন বিন্দুতে 16° কোণ উৎপন্ন করে। চাঁদের ব্যাস নির্ণয় করুন। [উঃ 221.58 মাইল (প্রায়)]

১৫. পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব 14.9×10^7 কিমি এবং পৃথিবীর কেন্দ্র বিন্দুতে সূর্যের ব্যাস 32′ কোণ উৎপন্ন করে। সূর্যের ব্যাস কত? [উঃ 13.7×10^7 কিমি (প্রায়)]

১৬. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিমি হলে পৃথিবীর উপর যে দুটি স্থান কেন্দ্রে 32″ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব নির্ণয় করুন। [উঃ 1 কিমি (প্রায়)]

১৭. চাঁদের ব্যাস দর্শকের চোখের সাথে 30′ কোণ উৎপন্ন করে এবং সূর্যের 32′। যদি সূর্য চাঁদের থেকে 675 গুণ দূরে অবস্থিত হয়, তাহলে তাদের ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় করুন। [উ: 1:720]

১৮. একটি গাছের উচ্চতা 50′ এবং গাছটির দর্শকের চোখের অবস্থানে 9′ কোণ উৎপন্ন করে। গাছের গোড়া হতে দর্শকের দূরত্ব কত? [উঃ 3.61 মাইল (প্রায়)]