ইউনিট -২১

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

ভূমিকা

পূর্ববর্তী ইউনিটে আপনারা ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে এর বিভিন্ন পদ্ধতিতে ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান লাভ করেছেন। বর্তমান ইউনিটে আপনার ত্রিকোণমিতিক অনুপাত তার চিহ্ন সম্পর্ক ইত্যাদি সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান লাভ করবেন।

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন
- যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা ও সীমাবদ্ধতা সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- নির্ধারিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন।

পাঠ-১ ঃ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও তার চিহ্ন

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি –

- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- চৌকণ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- কোণের ডিগ্রী ও রেডিয়াল পরিমাপ সম্পর্কে জানতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন।

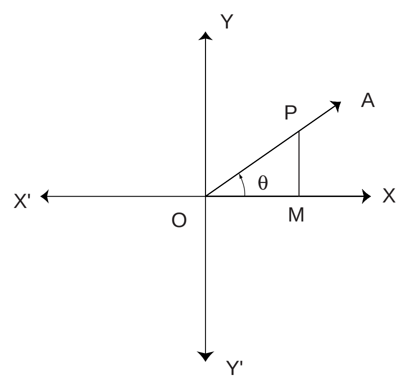
উদ্দেশ্য - এই পাঠ শেষে আপনি-
সুক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করে,
যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করবেন,
ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন সম্পর্ক জ্ঞান লাভ করবেন।

সুক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করেন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে ঘূর্ণন শুরু করে OA অবস্থানে এসে $\angle XOA=\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। OA এর উপর যে কোন বিন্দু P হতে PM এর উপর PM অংকন করুন। তাহলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM উৎপন্ন হয়, যার অতিভুজ হচ্ছে OP বাহু, লম্ব PM বাহু এবং ভূমি OM বাহু।

এখন ΔPOM-এর বাহুগুলি দ্বারা ছয়টি অনুপাত গঠন করা যায়। অনুপাতগুলো হল:

$$\frac{PM}{OP}, \frac{OM}{OP}, \frac{PM}{OM}, \frac{OP}{OM}, \frac{OP}{PM} \text{ ও } \frac{OM}{PM}$$



চিত্র : ২১.১

এই অনুপাতগুলিকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয়। এখন θ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহকে নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

θ কোণের সাইন (sine) অনুপাত বা $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, (সংক্ষেপে $\sin\theta = 1$)

θ কোণের কোসাইন (cosine) অনুপাত বা $\text{cosine}\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$, (সংক্ষেপে $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$)

θ কোণের টেনজেন্ট (tangent) অনুপাত বা $\text{tangent}\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$, (সংক্ষেপে $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$)

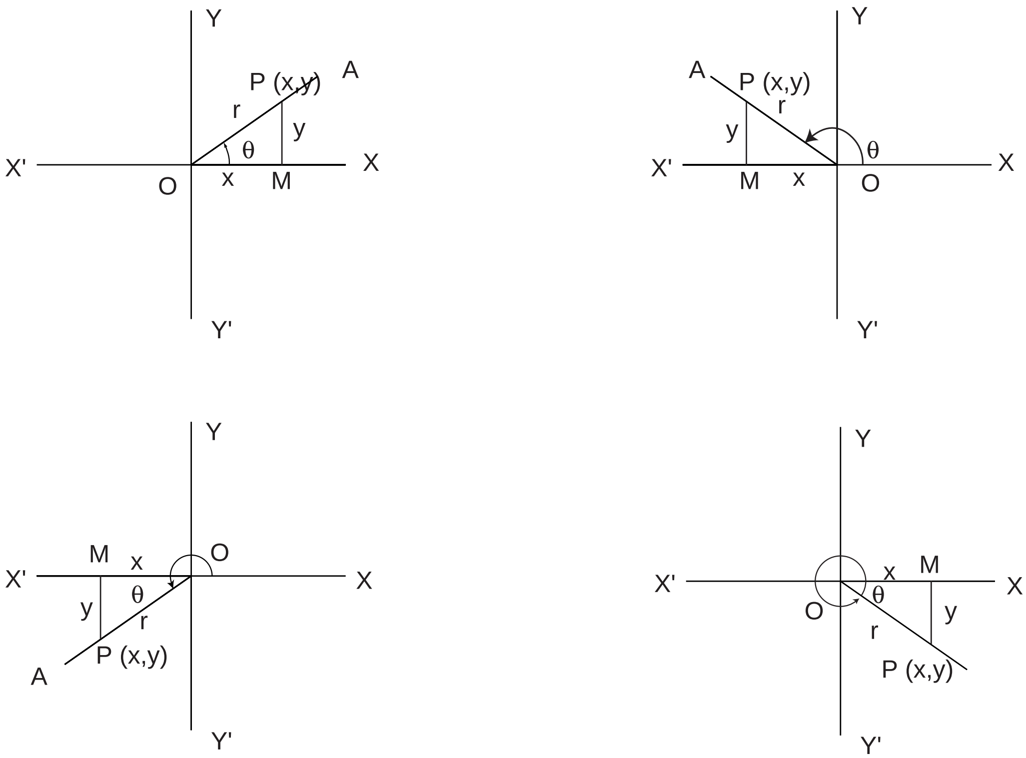
θ কোণের টেনজেন্ট (cotangent) অনুপাত বা cotangent$\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$, (সংক্ষেপে $\cot\theta = \frac{OM}{PM}$)

θ কোণের সেকেন্ট (secant) অনুপাত বা secant$\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$, (সংক্ষেপে $\sec\theta = \frac{OP}{OM}$)

θ কোণের কোসেকেন্ট (cosecant) অনুপাত বা cosecant$\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$,

(সংক্ষেপে$\text{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$)

যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



চিত্র : ২১.২

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থান হতে ঘূর্ণন করে OP অবস্থানে এসে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে P বিন্দুর অবস্থান XOY, XOX', X'OY' Y'OY ... । এই চারটি চৌকণের যে কোন একটিতে হতে পারে। এখন P বিন্দু হতে XOX' রেখার উপর PM লম্ব অংকন করুন। মূলবিন্দু O হতে P বিন্দুর দূরত্ব OP কে P বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে। এখন P বিন্দুর স্থানাংক (x, y) এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টর OP = r হলে θ কোনের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নিম্নলিখিত সংজ্ঞায়িত হয়:

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{p বিন্দুর y-স্থানাংক}}{\text{p বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{p বিন্দুর x-স্থানাংক}}{\text{p বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{p বিন্দুর y-স্থানাংক}}{\text{p বিন্দুর x-স্থানাংক}} = \frac{y}{x} \text{ (যদি } x \neq 0 \text{ হয়)}$$

$$\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{\text{p বিন্দুর x-স্থানাংক}}{\text{p বিন্দুর y-স্থানাংক}} = \frac{x}{y} \text{ (যদি } y \neq 0)$$

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{p বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}}{\text{p বিন্দুর x-স্থানাংক}} = \frac{r}{x} \text{ (যদি } x \neq 0)$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{\text{p বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}}{\text{p বিন্দুর y-স্থানাংক}} = \frac{r}{y} \text{ (যদি } y \neq 0)$$

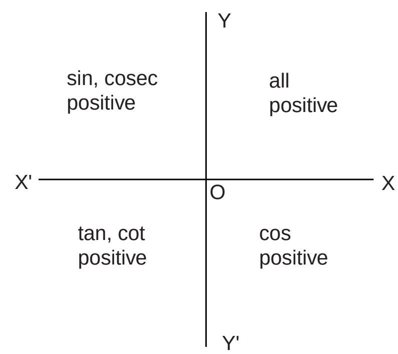
উপরের বর্ণনায় p বিন্দু এবং o বিন্দু ভিন্ন বিন্দু বলে OP=r সেই জন্য $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ সব সময়েই অর্থবহ যদি প্রান্তি বাহু OP, X অক্ষের উপর অবস্থিত হয় তাহলে y=0, কারণ x-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর y এর স্থানাঙ্ক শূন্য। এরূপ কোণের জন্য $\cot\theta$, $\text{cosec}\theta$ সংজ্ঞায়িত নয়। আবার যদি প্রান্তিক বাহু OP, y-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে x=0, কারণ y অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর x এর স্থানাংক শূন্য। এরূপ কোণের জন্য $\tan\theta$ ও $\sin\theta$ সংজ্ঞায়িত নয়।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন

ঘূর্ণায়মান সরল লেখা আদি অবস্থান ok ঘুর্ণন শুরু করে θ পরিমান কোণ উৎপন্ন করার পর চারটি চৌকণের যে কোণ একটিতে অবস্থান করতে পারে যেহেতু ব্যাসার্ধ ভেক্টর OP (=r) সর্বদা ধনাত্মক অতএব θ বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর চিহ্ন x- ও y- এর চিহ্ন অর্থাৎ OM ও PM বাহুর পরিমানের উপর নির্ভর করে (চিত্র-২)।

এখন যদি ঘূর্ণায়মান রেখার শেষ অবস্থান অর্থাৎ ব্যাসার্ধ প্রথম চৌকণে থাকে (চিত্র ২, ১ম চিত্র) তাহলে x, y, r প্র.... ধনাত্মক হবে। সুতরাং তাদের সকল অনুপাত ধনাত্মক হবে।

সুতরাং প্রথম চৌকণে অবস্থিত সকল ত্রিকোণমিতিক ... ধনাত্মক। যদি ব্যাসার্ধ ভেক্টর দ্বিতীয় চৌকণে থাকে (চিত্র ২, ২য় চিত্র) তবে x ঋনাত্মক এবং y ও r ধনাত্মক। সুতরাং দ্বিতীয় চৌকণে x বর্জিত অনুপাত অর্থাৎ sin ও cosec অনুপাত দুটি ধনাত্মক এবং অন্যান্য অনুপাত ঋনাত্মক। যদি ব্যাসার্ধ ভেক্টর ৩য় চৌকণে থাকে (চিত্র ২, ৩য় চিত্র) তবে x ও y উভয়ই ঋনাত্মক এবং r ধনাত্মক। সুতরাং ৩য় চৌকনে x ও y সবন্বিত অনুপাত ধনাত্মক।



চিত্র : ২১.৩

অর্থাৎ tan ও cot অনুপাত দুইটি ধনাত্মক এবং অন্যান্য অনুপাতসমূহ ঋনাত্মক। যদি ব্যাসার্ধ ভেক্টর চতুর্থ চৌকনে অবস্থান করে (চিত্র ... ৪র্থ চিত্র) তবে y ঋনাত্মক এবং x ও r ধনাত্মক। সুতরাং ৪র্থ চৌকনে y-বর্জিত অনুপাত অর্থাৎ cos ও sec অনুপাত দুই ধনাত্মক এবং অন্যান্য অনুপাত সমূহ ঋনাত্মক।

নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন কর পর ঘূর্ণায়মান রেখা কোন চৌকণে অবস্থান করবে তা জানতে পারলে চ্রি ৩ এর সাহায্যে অতি সহজেই আপনারা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় করতে পারবেন।

অনুশীলনী 21.1

1. সুক্ষ্মকোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করুন।
2. যে কোন কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করুন।
3. ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন কিরূপে নির্ণয় করা হয় তা বর্ণনা করুন।

পাঠ-২ ঃ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে মৌলিক সম্পর্ক

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি –

- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- সম্পর্কগুলোর সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক

পাশের চিত্রে $\angle POM = \theta$

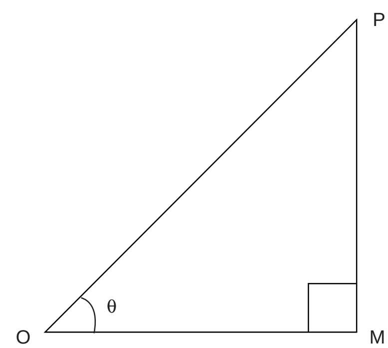
অতএব সংজ্ঞানুয়ী

i) $\sin\theta = \dfrac{PM}{OP}$ এবং $\text{cosec}\theta = \dfrac{OP}{PM}$

$$\text{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{\frac{PM}{OM}} = \frac{1}{\sin\theta} \quad \ldots\ldots (1)$$

অনুরূপভাবে

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$



চিত্র : ২১.৪

ii) $\cos\theta = \dfrac{OM}{OP}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{OP}{OM}$

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{\frac{OM}{OP}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

অনুরূপভাবে $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

iii) $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

$$\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{1}{\frac{PM}{OM}} = \frac{1}{\tan\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

অনুরূপভাবে $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$

vi) $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$

$= \dfrac{PM/OP}{OM/OP}$ [লব ও হর উভয়কে OP দ্বারা ভাগ করে]

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ... ... (7)

অনুরূপভাবে $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{OM/OP}{PM/OP} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ... ... (8)

অনুসিদ্ধান্ত : সমীকরণ (i) ও (2) হতে, $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$
সমীকরণ (3) ও (4) হতে, $\cos\theta \sec\theta = 1$
সমীকরণ (5) ও (6) হতে, $\tan\theta \cot\theta = 1$

v) ΔOPM সমকোণী ত্রিভুজ বলে
$PM^2 + OM^2 = OP^2$ ... ... (i)
বা, $\dfrac{PM^2}{OP^2} + \dfrac{OM^2}{OP^2} + \dfrac{OP^2}{OP^2}$ [উভয় পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $\left(\dfrac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\dfrac{OM}{OP}\right)^2 = 1^2$
বা, $(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2 = 1^2$
বা, $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$ ... . (9)

এখন (i) এর উভয় পক্ষকে OM^2 দ্বারা ভাগ করে

বা, $\dfrac{PM^2}{OM^2} + \dfrac{OM^2}{OM^2} = \dfrac{OP^2}{OM^2}$
বা, $\left(\dfrac{PM}{OM}\right)^2 + 1^2 = \left(\dfrac{OP}{OM}\right)^2$
বা, $(\tan\theta)^2+1= (\sec\theta)^2$
অর্থাৎ $\sec^2\theta+1 = \tan^2\theta$ ... . (10)

এখন (i) এর উভয় পক্ষকে PM^2 দ্বারা ভাগ করে

বা, $\dfrac{PM^2}{PM^2} + \dfrac{OM^2}{PM^2} = \dfrac{OP^2}{PM^2}$
বা, $1^2 + \left(\dfrac{OM}{OM}\right)^2 += \left(\dfrac{OP}{PM}\right)^2$
বা, $1+ (\cot\theta)^2+1= (\operatorname{cosec}\theta)^2$
অর্থাৎ $\operatorname{cosec}^2\theta =1+\cot^2\theta$ ... . (11)

(9), (10) এবং (11) নং সূত্রগুলিকে নিম্নলিখিত আকারেও লিখা যায়–
$\sin^2\theta = 1- \cos^2\theta$; $\cos^2\theta = 1- \sin^2\theta$;
$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$; $\sec^2\theta-1 = \tan^2\theta$;
$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta =1$; $\operatorname{cosec}^2\theta -1= \cot^2\theta$

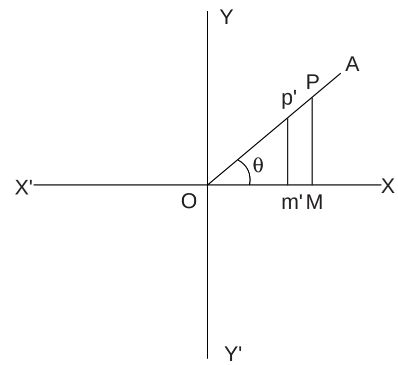
ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা

একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণে জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান সব সময়ই ধ্রুব।

মনে করুন, $\angle XOP = \theta$, এখন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত OA বাহুতে P বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। OA বাহুতে অপর একটি বিন্দু P' নিন। এখন P ও P' হতে XOX' এর উপর যথাক্রমে PM ও P'M' লম্ব অংকন করুন।

এখন ΔOPM-এ $\sin\theta = \frac{PM}{OP}$

এবং $\Delta OP'M'$-এ $\sin\theta = \frac{P'M'}{OP'}$



চিত্র : ২১.৫

কিন্তু $\Delta OP'M'$ এবং $\Delta OP'M'$ সমকোনী ত্রিভুজ বলে $\frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}$

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}$$

সুতরাং এ $\sin\theta$-এর মান উভয় ত্রিভুজ হতে একই পাওয়া যায়। অতএব নির্দিষ্ট পরিমান কোণের জন্য $\sin\theta$-এর মান ধ্রুব। অন্যান্য অনুপাতের ক্ষেত্রেও ইহা প্রযোজ্য।

ঘূর্ণায়মান সরলরেখার শেষ অবস্থান যে কোন চৌকণে অবস্থান করুক না কেন ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হওয়া ছাড়াও অনুরূপ বাহুর চিত্র একই প্রকৃতি হয়।

সুতরাং যে কোন ত্রিভুজ হতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত করলে তাদের মান ও চিহ্ন একই হবে।

সুতরাং নির্দিষ্ট পরিমান কোণের জন্য যে কোন ...... ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান সব সময়ই ধ্রুব।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সীমাবদ্ধতা

আপনারা জানেন, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্ণ সর্বদা ধনাত্মক; সুতরাং $\sin 2\theta$ এবং $\cos 2\theta$ এর প্রত্যেকটির মান ধনাত্মক হবে। আবার এদের যোগফল ১ বলে কোনটির মান +১ অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। অর্থাৎ $\sin\theta$ বা $\cos\theta$-এর মান +১ অপেক্ষা বৃহত্তর বা -১ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হতে পারে না। অর্থাৎ $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ যেহেতু $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ সুতরাং $\cos\theta$ এবং $\sec\theta$-এর মান ≥ 1 অথবা ≤ -1. কিন্তু $\tan\theta$ এবং $\cot\theta$-এর মানের কোন সীমা নির্ধারণ করা যায় না।

অনুশীলনী ২১.১

উদাহরণ 1: $\sin\theta$ অনুপাতকে $\cot\theta$ মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

আবার $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}$

উদাহরণ 2: যদি $\sin\theta = \dfrac{21}{29}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $\sin\theta + \tan\theta = 2\frac{1}{2}$ যখন θ প্রথম চৌকনে অবস্থিত।

সমাধান: $\sin\theta = \dfrac{21}{29}$

এখন $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\dfrac{21}{29}\right)^2$

$= 1 - \dfrac{441}{841} = \dfrac{400}{841}$

$\therefore \cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{400}{841}} = \pm\dfrac{20}{29}$

যেহেতু θ প্রথম চৌকণে অবস্থিত, অতএব $\cos\theta$ এর মান ধনাত্মক হবে।

$\therefore \cos\theta = \dfrac{20}{29}$

এখন $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\frac{20}{29}} + \dfrac{\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}}$

$= \left(1 \times \dfrac{21}{29}\right) + \left(\dfrac{21}{29} \times \dfrac{29}{20}\right)$

$= \dfrac{29}{20} + \dfrac{21}{20}$

$= \dfrac{50}{20} = 2\frac{1}{2}$

উদাহরণ 3 : প্রমান করুন, $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 23....$

সমাধান: $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\sin\theta)\,(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\,(1+\sin\theta)}} + \sqrt{\dfrac{(1-\sin\theta)\,(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\,(1-\sin\theta)}}$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$
$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{2}{\cos\theta}$$
$$= \sec\theta$$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন, $\frac{\tan\theta+\cos\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta-1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

সমাধান : $\frac{\tan\theta+\cos\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta-1}$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} - 1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta} + 1}$$
$$= \frac{\frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-1+\cos\theta}{\cos\theta}}$$
$$= \frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\sin\theta-1+\cos\theta}$$
$$= \frac{(\sin\theta+1-\cos\theta)\,(\sin\theta+1-\cos\theta)}{(\sin\theta-1+\cos\theta)\,(\sin\theta+1-\cos\theta)}$$
$$= \frac{(\sin\theta+1-\cos\theta)^2}{\{\sin\theta-(1-\cos\theta)\}\,\{\sin\theta+(1-\cos\theta)\}}$$
$$= \frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\sin\theta-2\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2}$$
$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+1+2\sin\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{\sin^2\theta-(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)}$$
$$= \frac{1+1+2\sin\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{\sin^2\theta-1+2\cos\theta-\cos^2\theta}$$
$$= \frac{2+2\sin\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{-\cos^2\theta+2\cos\theta-\cos^2\theta}$$
$$= \frac{2(1+\sin\theta)-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{2\cos\theta-2\cos^2\theta}$$
$$= \frac{(1+\sin\theta)(2-2\cos\theta)}{\cos\theta(2-2\cos\theta)}$$

$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

উদাহরণ 5 **: প্রমান করুন,** $\sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$

সমাধান : $\sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}}$

$= \frac{(\sqrt{\sec A+1})(\sqrt{\sec A+1})}{(\sqrt{\sec A-1})(\sqrt{\sec A+1})}$

$= \frac{(\sqrt{\sec A+1})^2}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$

$= \frac{\sec A+1}{\sqrt{\tan^2 A}}$

$= \frac{\sec A+1}{\tan A}$

$= \frac{\sec A}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$

$= \frac{\frac{1}{\cos A}}{\frac{\sin A}{\cos A}} + \cot A$

$= \frac{1}{\sin A} + \cot A$

$= \operatorname{cosec} A + \cot A$

উদাহরণ 6 **: প্রমান করুন,** $(\sqrt{1-\sin\theta}+\sqrt{1+\sin\theta})^2 = 2(1+\cos\theta)$

সমাধান : $= (\sqrt{1-\sin\theta}+\sqrt{1+\sin\theta})^2$

$= (\sqrt{1-\sin\theta})^2+(\sqrt{1+\sin\theta})^2+2\sqrt{1-\sin\theta}\,\sqrt{1+\sin\theta}$

$= 1-\sin\theta + 1+\sin\theta+ 2\sqrt{1-\sin a^2\theta}$

$= 2 + 2\sqrt{\cos^2\theta}$

$= 2(1+\cot\theta)$

উদাহরণ 7 **: প্রমান করুন,** $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2 = \tan^2\alpha+\cot^2\alpha -1$

সমাধান: $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$

$= \sin^2\alpha+\cos\alpha-2\sin\alpha\operatorname{cosec}\alpha+\cos^2\alpha+\sec^2\alpha-2\operatorname{cosec}\alpha\sec\alpha$

$= \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha+\sec^2\alpha-2-2$

$= 1+\cos^2 \sec^2\alpha+\sec^2\alpha-4$

$= \operatorname{cosec}^2\alpha+\sec^2\alpha-3$

$= (\operatorname{cosec}^2\alpha-1)+(\sec^2\alpha-1)-1$

$= \cot^2\alpha+\tan^2\alpha-1$

$= \tan^2\alpha+\cot^2\alpha-1$

উদাহরণ 8: θ সুক্ষকোণ এবং $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হলে, প্রমান করন $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

সমাধান $\tan\theta = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$

বা, $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $b^2 \sin^2\theta = a^2 (1-\sin^2\theta)$

বা, $a^2 \sin^2\theta+b^2 \sin^2\theta)= a^2$

বা, $\sin^2\theta(a^2+b^2)= a^2$

বা, $\sin^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2}$

আবার, $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

বা, $\cos^2\theta = 1- \frac{a^2}{a^2+b^2}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{a^2+b^2-a^2}{a^2+b^2}$

বা, $\cos^2\theta = \frac{b^2}{a^2+b^2}$

এখন, $\sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}$

$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$

$= 1$

উদাহরণ 9 : যদি $\sin A + \cos A = a$ এবং $\sec A+\operatorname{cosec} A = b$ হয়, তবে প্রমান করুন $b(a^2-1) = 2a$

সমাধান : $b(a^2-1)$

$= (\sec A+\operatorname{cosec} A) \{(\sin A +\cos A)^2-1\}$

$= (\sec A+\operatorname{cosec} A) (\sin^2 A +\cos^2 A+2\sin A\cos A-1)$

$= (\sec A+\operatorname{cosec} A) (1+2\sin A\cos A-1)$

$= (\sec A+\operatorname{cosec} A) . 2\sin A\cos A$

$= 2 (\sin A \cos A \sec A+\operatorname{cosec} A \text{ sina}A \cos A)$

$= 2(\sin A +\cos A)$

$= 2A$

অনুশীলনী 21.2

নিম্নলিখিত অভেদগুলি প্রমাণ করুন (1-15)

1. $\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\text{cosec}A$

2. $\sec^4 A - \sec^2 A = \text{cosec}\theta + \cot\theta$

2. i) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \text{cosec}\theta + \cot\theta$

ii) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

4. $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} - \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = 2\cot\theta$

৫. $\frac{\cos\theta+\cos\varphi}{\sin\theta+\sin\varphi} = \frac{\sin\theta+\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\theta}$

6. $\frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\sin A \cos^2 A \sin^2 A} = \text{cosec}A+\sec A$

7. $\frac{1}{\sec A+\tan A}-\frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sec A-\tan A}$

8. $\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\frac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B} = 0$

9. $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta} = 2\text{cosec}\theta$

10. $\frac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} = \left(\frac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2$

11. $\sin\theta(1+\tan\theta) + \cos\theta(1+\cot\theta) = \sec\theta+\cos\theta$

12. $\sec^4 A + \tan^4 A = 1+2\sec^2 A \tan^2 A$

13. $(\tan\theta+\sec\theta)^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

14. $\left(\frac{m\ \text{cost}\theta}{n\cot\theta}\right)^2 + \left(\frac{m\sin\theta}{n\tan\theta}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$

15. $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} - \sec\theta = \sec\theta - \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

16. যদি $\sin^4\theta+\sin^2\theta = 1$ হয়, তবে দেখান যে $\tan^4\theta-\tan^2\theta$

17. (i) $\sin\theta = \frac{12}{14}$ হলে, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ অনুপাতের মান কত হবে। [উঃ $\pm\frac{5}{13}$, $\pm\frac{12}{5}$]

(ii) $\sin\theta = \frac{9}{41}$ হলে, $\tan\theta$ ও $\text{cosec}\theta$ অনুপাতের মান কত হবে। [উঃ $\pm\frac{40}{9}$, $\pm\frac{41}{40}$]

১৮. $x = a\cos\theta+b\sin\theta$ এবং $y = a\sin\theta-b\cos\theta$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2 = a^2+b^2$

19. $k\tan\theta = \tan k\theta$ হলে দেখান যে, $\frac{\sin k\theta}{\sin^2\theta} = \frac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$

20. $\tan\phi = \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ হলে, প্রমান করুন $\sqrt{2}\cos\phi = \pm(\sin\theta+\cos\theta)$

পাঠ-৩ ঃ কয়েকটি নির্ধারিত কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি –

- নির্ধারিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে অনুপাতসমূহের মানসমূহ প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

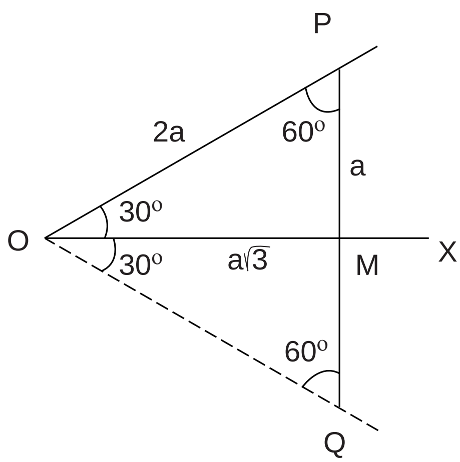
30° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থানে OX হতে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীতদিকে ঘুরে $\angle XOP = 30°$ উৎপন্ন করে। OX এর উপর PM লম্ব অংকন করুন এবং তাকে θ পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন PM = QM হয়। এখন Oθ যোগ করুন।

যেহেতু ΔOPM এবং OQM সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বোতভাবে সমানে অতএব $\angle OPM = \angle OQM = 60°$

সুতরাং ΔOPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ

$\therefore$ OP = OQ = PQ = 2PM [PM= MQ]



চিত্র : ২১.৬

ধরুন PM = a

তাহলে, OP = 2a

এবং $OM = \sqrt{op^2 - pm^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

$$\sin 30° = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{OP}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{OM}{PM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{OP}{OM} = \frac{2}{a\sqrt{3}} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 30° = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2$$

$45°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাশের চিত্রে $\angle XOA = 45°$, OA বাহুতে P যে কোন বিন্দু এবং P হতে OX এর উপর PM লম্ব।

তাহলে $\angle POM = 45°, \angle PMO = 90°$

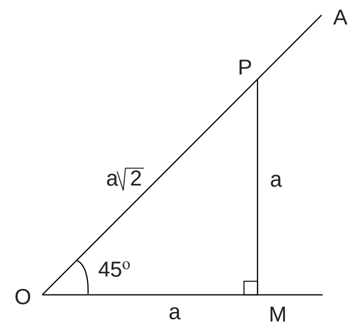
$\angle OPM = 45°$

সুতরাং $OM = PM$

ধরুন $OM = PM = a$

$\therefore$ $OP = \sqrt{OM^2+PM^2}$

$= \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$



চিত্র : ২১.৭

এখন $\sin 45° = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45° = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45° = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a} = 1$

$\cot 45° = \frac{OM}{PM} = \frac{a}{a} = 1$

$\sec 45° = \frac{OP}{OM} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\operatorname{cosec} 45° = \frac{OP}{PM} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

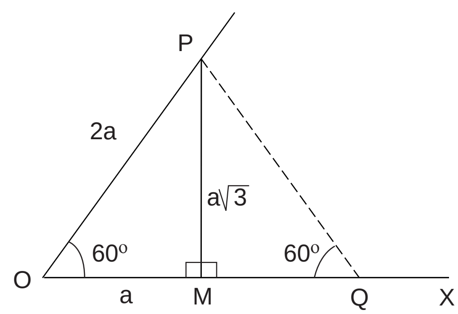
$60°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাশের চিত্রে $\angle XOP = 60°$, এবং OX-এর উপর PM লম্ব।

তাহলে $\angle PON = 60°$। এখন OX এর উপর এমন একটি বিন্দু Q নিন যেন $OM = MQ$ হয়। PQ যোগ করুন।

এখন ΔOPM, ΔPQM

সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বোতভাবে সমান বলে $\angle POM = \angle PQM = ...$



চিত্র : ২১.৮

সুতরাং ΔOPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং $OP = OQ$

ধরুন $OM = a$, তাহলে $OP = OQ = 2OM = 2a$

এবং $PM = \sqrt{OP^2+OM^2} = \sqrt{4a^2-a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

$\therefore$ $\sin 60° = \frac{PM}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

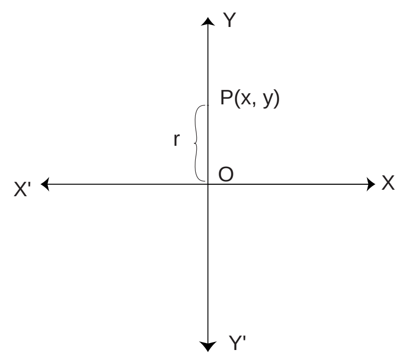
$\cos 60° = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$$\tan 60° = \frac{PM}{OM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$
$$\cot 60° = \frac{OM}{PM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec 60° = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{a} = 2$$
$$\operatorname{cosec} 60° = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

90° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

90° কোণের ক্ষেত্রে প্রান্তিক বাহু OY বরাবর এবং P(x,y) বিন্দু YOY' অক্ষে মূলবিন্দুর উপর দিকে অবস্থিত। সুতরাং $x = o$ এবং $y = r$.

অতএব ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সাধারণ সংলগ্ন থেকে



চিত্র : ২১.৯

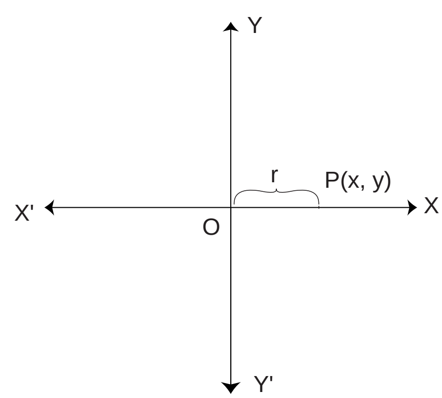
$$\therefore \quad \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$$
$$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{\theta}{r} = 0$$
$$\cot 90° = \frac{x}{y} = \frac{o}{r} = 0$$
$$\operatorname{cosec} 90° = \frac{r}{y} = \frac{r}{r} = 1$$

এখানে tan 90° ও sec 90° সংজ্ঞায়িত নয়, কারণ $x = 0$ এবং শূন্য দ্বারা ভাগ সংজ্ঞায়িত নয়।

θ° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

θ° কোণের আদি বাহু ও প্রান্তি রেখা অভিন্ন। এক্ষেত্রে P(x,y) বিন্দু XOX' অক্ষে মূলবিন্দুর ডানপার্শ্বে অবস্থিত ফলে $x = r$ এবং $y = 0$.

অতএব ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাধারণ সংজ্ঞানুসারে,



চিত্র : ২১.১০

$$\therefore \quad \sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 1$$
$$\cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 0$$
$$\tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{o}{r} = 1$$
$$\sec 0° = \frac{r}{x} = \frac{r}{r} = 1$$

যেহেতু $y = 0$ এবং শূন্য দ্বারা ভাগ সংজ্ঞায়িত নয় অতএব $\cot 0°$ এবং $\text{cosec}\ 0°$ সংজ্ঞায়িত নয়।

ব্যবহারের সুবিধার্থে বিভিন্ন কোণের ত্রিকোনমিতিক অনুপাতের মানসমূহ ছক আকারে নিম্নে দেয়া হল:

কোণ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	সংজ্ঞায়িত নয়
cot	সংজ্ঞায়িত নয়	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	সংজ্ঞায়িত নয়
cosec	সংজ্ঞায়িত নয়	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

লক্ষনীয় $\Rightarrow$ sine ও cosine অনুপাতে মান সমূহকে মনে রাখার সহজ নিয়মঃ

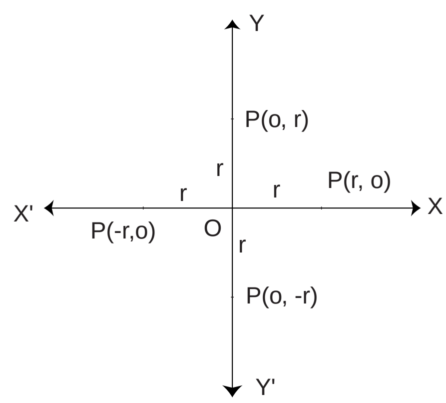
0, 1, 2, 3, 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেককে ৪ দ্বারা ভা করে বর্গমূল নিলে যথাক্রমে ০, ৩০, ৪৫, ৬০ ও ৯০ কোণ সমূহের sine অনুপাতের মান পাওয় যায়।

আবার 4, 3, 2, 1, 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেককে ৪ দ্বারা ভাগ করে বর্গমূল নিলে যথাক্রমে, 0, 30, 45, 60 ও 90 কোণ সমূহের cosine অনুপাতের মান পাওয়া যায়।

$x \times 90°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন n একটি পূর্ণ সংখ্যা। এখন XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে y- অক্ষ বিবেচনা করে n এবং বিভিন্ন মানের জন্য O = n ... 90 ... কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নিম্নলিখিতভাবে পাওয়া যায়-

i) যখন $n = 4k$, যেখানে K একটি পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ যখন $n = 0, 4, 8, 12, ..., -4, -8, -12, ...$ ইত্যাদি তখন প্রান্তিক বাহু OP ধনাত্মক x অক্ষ OX এর উপর পড়ে। সুতরাং p বিন্দুর স্থানাংক হবে (r,o), যেখানে $OP = r>0$



চিত্র : ২১.১১

সুতরাং $\sin\theta = \frac{o}{r} = 0, \cos\theta = \frac{r}{r} = 1$

ii) যখন $n = 4K+1$, যেখানে k একটি পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ যখন $n = -3, -7, -11, ... 1, 5, 9, 13, ...$ ইত্যাদি, তখন প্রান্তিক বাহু OP ধনাত্মক y-অক্ষ OY-এর উপর পড়ে, সুতরাং P বিন্দুর স্থানাংক হবে (o, r), যেখানে $OP = r>0$

সুতরাং $\sin\theta = \frac{r}{r} = 1, \cos\theta = \frac{o}{r} = 0$

iii) যখন n = 4k+2, যেখানে k- একটি পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ যখন n = -2, -6, -10, ... 2, 6, 10, ... ইত্যাদি, তখন প্রান্তিক বাহু OP ঋণাত্মক x-অক্ষ, OX' এর উপর পড়ে। সুতরাং P বিন্দুর স্থানাংক হবে (-r, o) যেখানে, OP = r>0

সুতরাং $\sin\theta = \frac{o}{r} = 0, \ \cos\theta = \frac{-r}{r} = -1$

iv) যখন n = 4k+2 যেখানে k-একটি পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ যখন n = -1, -5, -9, ... 3, 7, 11, ... ইত্যাদি, তখন প্রান্তিক বাহু OP ঋণাত্মক y-অক্ষ oy'-এর উপর পড়ে। সুতরাং P বিন্দুর স্থানাংক হবে (o, -r) যেখানে OP = r>r

সুতরাং $\sin\theta = \frac{-r}{r} = -1, \ \cos\theta = \frac{o}{r} = 0$

উদাহরণ 1 : মান নির্ণয় করুন, sin 45° sin 60° - cos 45° cos 60°

সমাধান : sin 45° sin 60° - cos 45° cos 60°

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

উদাহরণ 2 : মান নির্ণয় করুন, $3\tan^2 45° - \sin^2 60° - \frac{1}{2}\cot^2 30° + \frac{1}{8}\sec^2 60°$

সমাধান : $3\tan^2 45° - \sin^2 60° - \frac{1}{2}\cot^2 30° + \frac{1}{8}\sec^2 60°$

$= 3\,(1)^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2 + \frac{1}{8}(\sqrt{2})^2$

$= 3 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{2}{8}$

$= \frac{24-6-12+12}{8}$

$= \frac{8}{8}$

$= 1$

উদাহরণ 3: যদি A = 30° হয়, তবে প্রমাণ করুন $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ ।

সমাধান : $\sin 2A = \sin 2.30°$

$= \sin 60°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার $= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$= \frac{2.\tan 30°}{1+(\tan 30°)^2}$

$$= \frac{2.\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad \sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

উদাহরণ 4: দেখাও যে, $\frac{1+2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} + \frac{1-2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ} = 2\cos 30^\circ$

সমাধান : বামপক্ষ $\frac{1+2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} + \frac{1-2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ}$

$$= \frac{1+2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1-2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1+2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1-2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} + \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)+(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-(1)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

ডানপক্ষ $= 2\cos 30°$

$= 2.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sqrt{3}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 5: সমাধান করুন $2\sin2\theta = 3\cos\theta$, যখন θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ।

সমাধান : $2\sin2\theta = 3\cos\theta$,

বা, $2(1\text{-}\cos2\theta) = 3\cos\theta$

বা, $2\text{-}2\cos2\theta = 3\cos\theta$

বা, $2\text{-}2\cos2\theta+3\cos\theta\text{-}2 = 0$

বা, $2\cos2\theta+4\cos\theta\text{-}\cos\theta\text{-}2 = 0$

বা, $2\cos\theta\ (\cos\theta+2)\text{-}1(\cos\theta+2) = 0$

বা, $(2\cos\theta\text{-}1)\ (\cos\theta+2) = 0$

হয় $2\cos\theta\text{-}1=0$ অথবা, $\cos\theta+2 = 0$

$\therefore$ $2\cos\theta\text{-}1=0$ $\therefore$ $\cos\theta= \text{-}2$

$\therefore$ $\cos\theta=\frac{1}{2} = \cos60°$ যা সম্ভব নয়

$\therefore$ $\theta= 60°$ যা সম্ভব নয়

$\therefore$ $\theta= 60°$

উদাহরণ 6: সমাধান করুন $\sqrt{3}\ (\tan\theta +\cot\theta)= 4$ যখন $0°\leq\theta\leq90°$।

সমাধান : $\sqrt{3}\ (\tan\theta +\cot\theta)= 4$

বা, $\sqrt{3}\ (\tan\theta +\frac{1}{\tan\theta})= 4$

বা, $\sqrt{3}\left(\frac{\tan^2\theta+1}{\tan\theta}\right) = 4$

বা, $\sqrt{3}\ (\tan^2\theta +1)= 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta +\sqrt{3}= 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta-4\tan\theta+\sqrt{3}=0$
বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta-3\tan\theta-\tan\theta+\sqrt{3}=0$
বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta-\sqrt{3})-1(\tan\theta-\sqrt{3})=0$
বা, $(\tan\theta-\sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta-1)=0$

হয় $\tan\theta-\sqrt{3}=0$ অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta-1=0$
$\therefore$ $\tan\theta=\sqrt{3}$ $\therefore$ $\sqrt{3}\tan\theta=1$
$\therefore$ $\tan\theta=\tan60°$ $\therefore$ $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan30°$
$\therefore$ $\theta=60°$ $\therefore$ $\theta=30°$

যেহেতু $0°\leq\theta\leq90°$
$\therefore$ θ - 30°, 90°

অনুশীলনী ২১.৩

মান নির্ণয় করুন (1-4)

1. $3\sin30° - 4\sin^3 30°$ [উঃ 1]
2. $5\sin90°+3\cos0°-6\tan45° - \sec^2 45°$ [উঃ 0]
3. $\cot^2\frac{\pi}{6}-2\cos^2\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}-4\sin^2\frac{\pi}{6}$ [উঃ 0]
4. $\tan^2\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{6}\cdot\tan^2\frac{\pi}{6}$ [উঃ $\frac{3}{2}$]

প্রমান করুন (4-9)

5. $\sqrt{\frac{1+\cos30°}{1-\cos30°}}=\sec60°+\tan60°$
6. $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$
7. $1-2\sin^2 30° = 2\cos^2 30°-1 = \cos60°$
8. $\frac{1-\tan^2 30°}{1+\tan^2 30°}=\frac{1}{2}$
9. $\sin^2\frac{\pi}{2}(\mathrm{cosec}^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{4}+\cot^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{6})=\tan^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{2}\cot^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{4}$
10. $\tan^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}=x\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}$ হলে x-এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{\sqrt{3}}{2}$]
11. $3\tan^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}-x\cot^2\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}\sec^2\frac{\pi}{4}=1$ হলে x- এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{1}{2}$]
12. A = 60, B=30 হলে নিম্নলিখিত সূত্রগুলির সত্যতা যাচাই করুন;
    i) $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$
    ii) $\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\pm\sin A\sin B$
    iii) $\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\pm\tan A\tan B}$

iv) $\sin(A \pm B) = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

v) $\cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

vi) $\sin B = 3\sin B - 4\sin^3 B$

সমাধান করুন

13. $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$, θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ [উঃ $30°$]
14. $\sec 2\theta = 2\tan\theta$, θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ [উঃ $45°$]
15. $\text{cosec}\theta \cdot \cot\theta = 2\sqrt{3}$, θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ [উঃ $30°$]
16. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$, θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ [উঃ $30°$]

পাঠ ৪ঃ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি -

- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন।
- সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

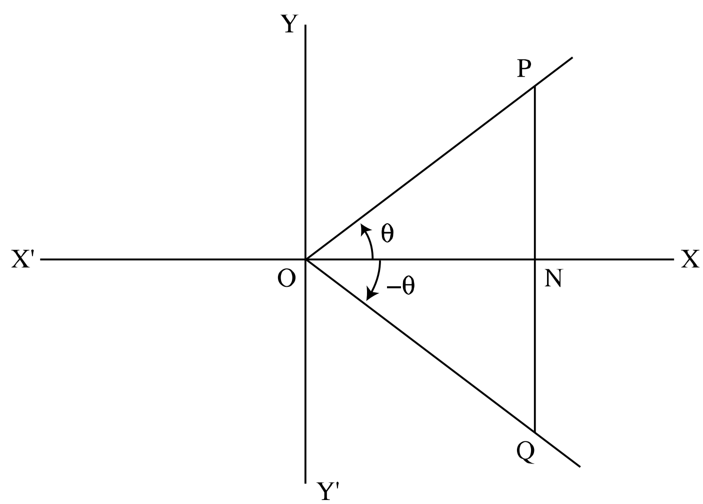
সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের সময় দুরত্বের চিহ্নগুলো অবশ্যই বিবেচনা করতে হবে। তবে স্মরণ রাখতে হবে ব্যাসার্ধ ভেক্টর সব সময়ই ধনাত্মক।

(-θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, একটি ঘুর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং ঘুড়ির কাটার দিকে ঘুরে $\angle XOQ = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখন P বিন্দু থেকে OX এর উপর PN লম্ব অংকন করুন। PN কে বর্ধিত করলে তা OQ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করুন, P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (x,y) ও (x_1,y_1)

তাহলে $|ON| = x$, $|PN| = y$ এবং $|ON| = x_1$, $|QN| = y_1$



চিত্রঃ ২১.১২

এখন OPN ও OQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় হতে পাই,

$\angle PON = \angle QON$, $\angle ONP = \angle ONQ$ এবং ON সাধারণ বাহু

সুতরাং, ΔOPN ও ΔOQN সর্বসম

$\therefore\ |PN| = |QN|$; $|OP| = |OQ| = r$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)

স্থানাংকের চিহ্ন বিবেচনা করে পাই, $x_1 = x$, $y_1 = -y$

সুতরাং, $\sin(-\theta) = \sin QON = \frac{y_1}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin PON = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos QON = \frac{x_1}{r} = \frac{x}{r} = \cos PON = \cos\theta$

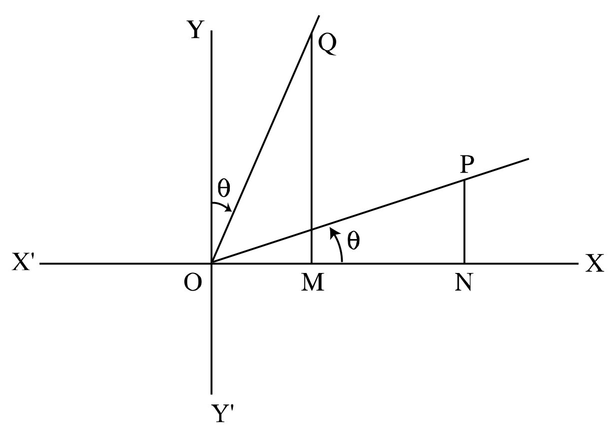
$\tan(-\theta) = \tan QON = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\tan PON = -\tan\theta$

অনুরূপভাবে,

$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$(90^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, একটি ঘুর্ণায়মান রেখা OX অবস্থান হতে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে অপর একটি ঘূর্ণায়মান রেখা একই আদি অবস্থান OX হতে একই দিকে ঘুরে $\angle XOY = 90^\circ$ কোণ উৎপন্ন করার পর OY অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 90^\circ - \theta$



চিত্র: ২১.১৩

এখন OP = OQ রেখা নিন এবং P ও Q হতে OX রেখার উপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব অংকন করুন।
মনে করুন, P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (x,y) ও (x_1,y_1)
তাহলে $|ON| = x$, $|PN| = y$ এবং $|OM| = x_1$, $|QM| = y_1$

এখন ΔOPN ও ΔOQM সমকোণী ত্রিভূজ হতে পাই,
$\angle PON = \angle QOM$ এবং $OP = OQ$ সুতরাং, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।
অতএব, $|QM| = |ON|$; $|OM| = |PN|$; $|OP| = |OQ| = r$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)
অর্থাৎ, $y_1 = x$, $x_1 = -y$

সুতরাং, $\sin(90^\circ - \theta) = \sin \times OQ = \frac{y_1}{r} = \frac{x}{r} = \cos \times OP = \cos\theta$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \cos \times OQ = \frac{x_1}{r} = \frac{y}{r} = \sin \times OP = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \tan \times OP = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} = \cot \times OP = \cot\theta$$

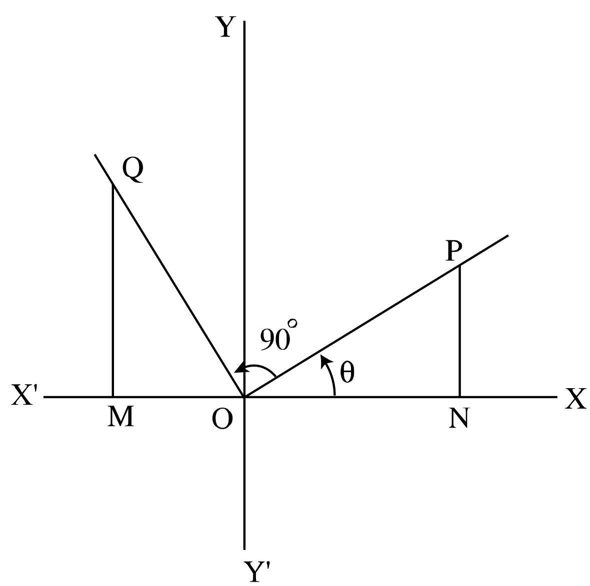
অনুরূপভাবে,

$$\text{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$
$$\sec(90^\circ - \theta) = \text{cosec}\,\theta$$
$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$$

দ্রষ্টব্য: $90^\circ - \theta$ এবং θ পরস্পরের পরিপূরক কোণ। দুইটি পরিপূরক কোণের জন্য একটির sin অপরটির cosine, একটির tangent অপরটির cotangent এবং একটির cosecant অপরটির secant এর সমান। যেমন, 30° ও 60° কোণ পরস্পরের পরিপূরক। অতএব $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ বা $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$, $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$ বা $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ$, $\text{cosec}\, 30^\circ = \sec 60^\circ$ বা $\text{cosec}\, 60^\circ = \sec 30^\circ$

$(90^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, একটি ঘুর্ণায়মান রেখা আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। ঐ একই রেখা একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 90^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 90^\circ + \theta$



চিত্র: ২১.১৪

এখন OP = OQ রেখা নিন এবং P ও Q হতে X অক্ষের উপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব অংকন করুন।

মনে করুন, P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (x,y) ও (x_1,y_1)

তাহলে $|ON| = x$, $|PN| = y$ এবং $|OM| = x_1$, $|PM| = y_1$

এখন ΔOPN ও ΔOQM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,
$\angle PON = \angle QOY = \angle OQM$ এবং $OP = OQ$ সুতরাং, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব, $|QM| = |ON|$; $|OM| = |PN|$; $|OP| = |OQ| = r$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)
স্থানাংকের চিহ্ন পর্যালোচনা করে পাই, $y_1 = x$, $x_1 = - y$

সুতরাং, $\sin (90^\circ + \theta) = \sin \times OQ = \frac{y_1}{r} = \frac{x}{r} = \cos \times OP = \cos \theta$

$\cos (90^\circ + \theta) = \cos \times OQ = \frac{x_1}{r} = \frac{-y}{r} = - \sin \times OP = - \sin \theta$

$\tan (90^\circ + \theta) = \tan \times OP = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{-y} = - \cot \times OP = - \cot \theta$

অনুরূপভাবে,

$\operatorname{cosec} (90^\circ + \theta) = \sec \theta$
$\sec (90^\circ + \theta) = - \operatorname{cosec} \theta$
$\cot (90^\circ + \theta) = - \tan \theta$

$(180^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পূর্বের নিয়ম অনুসরণ করে জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $(180^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকাণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নের পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা সহজে $(180^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকাণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারি।

সুতরাং, $\sin (180^\circ - \theta) = \sin \{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = \cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta$
$\cos (180^\circ - \theta) = \cos \{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = - \sin (90^\circ - \theta) = - \cos \theta$
$\tan (180^\circ - \theta) = \tan \{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = - \cot (90^\circ - \theta) = - \tan \theta$

অনুরূপভাবে,

$\operatorname{cosec} (180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$
$\sec (180^\circ - \theta) = - \sec \theta$
$\cot (180^\circ - \theta) = - \cot \theta$

$(180^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $(180^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকাণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। আবার নিম্নের পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা সহজেই $(180^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকাণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়।

সুতরাং, $\sin (180^\circ + \theta) = \sin \{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = \cos (90^\circ + \theta) = - \sin \theta$
$\cos (180^\circ + \theta) = \cos \{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = - \sin (90^\circ + \theta) = - \cos \theta$
$\tan (180^\circ + \theta) = \tan \{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = - \cot (90^\circ + \theta) = - (-\tan \theta) = \tan \theta$

অনুরূপভাবে,

$\operatorname{cosec} (180^\circ + \theta) = - \operatorname{cosec} \theta$
$\sec (180^\circ + \theta) = - \sec \theta$
$\cot (180^\circ + \theta) = \cot \theta$

$(270^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$\sin(270^\circ - \theta) = \sin\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\sin(90^\circ - \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270^\circ - \theta) = \cos\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta$
$\tan(270^\circ - \theta) = \tan\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$

অনুরূপভাবে,

$\mathrm{cosec}(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$
$\sec(270^\circ - \theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$
$\cot(270^\circ - \theta) = \tan\theta$

$(270^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$\sin(270^\circ + \theta) = \sin\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\sin(90^\circ + \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270^\circ + \theta) = \cos\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\cos(90^\circ + \theta) = -(-\sin\theta) = \sin\theta)$
$\tan(270^\circ + \theta) = \tan\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = \tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$

অনুরূপভাবে,

$\mathrm{cosec}(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$
$\sec(270^\circ + \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta$
$\cot(270^\circ + \theta) = -\tan\theta$

$(360^\circ \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

প্রমিত অবস্থানে $(360^\circ - \theta)$ এবং $(360^\circ + \theta)$ কোণদুটি যথাক্রমে $(-\theta)$ ও θ কোণের সংগে মিলে যায়। সুতরাং, $(360^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত $(-\theta)$ কোণের সংশ্লিষ্ট অনুপাতের সমান এবং $(360^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত θ কোণের সংশ্লিষ্ট অনুপাতের সমান।

অতএব,

$\sin(360^\circ - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(360^\circ - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(360^\circ - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\mathrm{cosec}(360^\circ - \theta) = \mathrm{cosec}(-\theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$
$\sec(360^\circ - \theta) = \sec(-\theta) = -\sec\theta$
$\cot(360^\circ - \theta) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$

এবং,

$\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$
$\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta$
$\tan(360^\circ + \theta) = \tan\theta$
$\mathrm{cosec}(360^\circ + \theta) = \mathrm{cosec}\,\theta$

$\sec(360^\circ + \theta) = \sec\theta$
$\cot(360^\circ + \theta) = \cot\theta$

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের নিয়ম

i) যদি θ কোণটি 90° এর জোড় গুণিতকের সাথে যোগ বিয়োগ হয় ($180^\circ \pm \theta$, $360^\circ \pm \theta$), তবে সে অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রয়োগ করে মূল অনুপাতের কোনরুপ পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ sine, cosine, tangent ইত্যাদি sine, cosine, tangent থাকে। কিন্তু তার চিহ্ন ধনাত্নক না ঋণাত্নক হবে তা নির্ণয় করার জন্য θ কোণকে ধনাত্নক সূক্ষকোণ ধরে কোণটি কোন চৌকনে তা নির্ণয় করে চিহ্নের চৌকোন নিয়ম অনুযায়ী সহজেই নির্ণয় করা যায়।

ii) যদি θ কোণটি 90° এর বিজোড় গুণিতকের সাথে যোগ অথবা বিয়োগ হয় ($90^\circ \pm \theta$, $270^\circ \pm \theta$.......), অর্থাৎ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করলে sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant পরিবর্তিত হয়ে যথাক্রমে cos, sine, cotangent, tangent, cosecant, secant হয়। কিন্তু তার চিহ্ন ধনাত্নক না ঋণাত্নক হবে তা নির্ণয় করার জন্য θ কোণকে ধনাত্নক সূক্ষকোণ ধরে চিহ্নের চৌকোণ নিয়ম অনুযায়ী সহজেই নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুন

i) $\sin 2370^\circ$
ii) $\sec 510^\circ$
iii) $\tan(-1590^\circ)$

সমাধানঃ i) $\sin(2370^\circ)$
$= \sin(26\times90^\circ+30^\circ)$
$= -\sin 30^\circ$
$= -\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা : এখানে ঘূর্ণামান রশ্মি যদি 0 অবস্থান হতে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণন শুরু করে 2370° কোণ উৎপন্ন করার পর তৃতীয় চৌকণে অবস্থান করবে। যেহেতু কোণটি $n\times90^\circ + \theta$ (যখন n জোড় সংখ্যা) আকারের sin অপরিবর্তিত থাকবে এবং যেহেতু তৃতীয় চৌকণে sin ঋণাত্নক ফলে চিহ্ন ঋণাত্নক।

ii) $\sec(510^\circ)$
$= \sec(5\times90^\circ+60^\circ)$
$= \text{cosec}\, 60^\circ$
$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

iii) $\tan(-1590^\circ)$
$= -\tan(-1590^\circ)(5\times90^\circ+60^\circ)$ $\quad$ [$\tan(-\theta) = -\tan\theta$]
$= -\tan(17\times90^\circ+60^\circ)$
$= -(-\cot 60^\circ)$

$= \cot 60^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

উদাহরণ 2: মান নির্ণয় করুন

i) $\cos 198^\circ + \sin 432^\circ + \tan 168^\circ + \tan 12^\circ$

ii) $\sin 420^\circ . \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ) . \sin(-330^\circ)$

সমাধানঃ i) $\cos 198^\circ + \sin 432^\circ + \tan 168^\circ + \tan 12^\circ$

$= \cos(2\times90^\circ+18^\circ) + \sin(5\times90^\circ-18^\circ) + \tan(9\times90^\circ-12^\circ) + \tan 12^\circ$

$= -\cos 18^\circ + \cos 18^\circ - \tan 12^\circ + \tan 12^\circ$

$= 0$

ii) $\sin 420^\circ . \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ) . \sin(-330^\circ)$

$= \sin(5\times90^\circ-30^\circ) . \cos(4\times90^\circ+30^\circ) - \cos(300^\circ) . \sin(330^\circ)$ [$\sin(-\theta)= -\sin\theta$]

$= \cos 30^\circ . \cos 30^\circ - \cos(3\times90^\circ+30^\circ) . \sin(3\times90^\circ+60^\circ)$ [$\cos(-\theta)= \cos\theta$]

$= \cos 30^\circ . \cos 30^\circ - (-\sin 30^\circ) . (\cos 60^\circ)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{4}{4}$

$= 1$

উদাহরণ 3: মান নির্ণয় করুন

i) $\sin^2 17\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

ii) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$

সমাধানঃ i) $\sin^2 17\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= \{\sin(\pi - \frac{\pi}{18})\}^2 + \{\sin(\pi - \frac{3\pi}{8})\}^2 + \{\cos(2\pi + \frac{\pi}{18})\}^2 + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= \sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$= (\sin^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{\pi}{18}) + (\sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8})$

$= 1 + 1$

$= 2$

ii) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$

$= \{\sec(\pi - \frac{3\pi}{17})\}^2 + \{\sec(2\pi + \frac{5\pi}{17})\}^2 + \{\cot(\pi + \frac{7\pi}{34})\}^2 - \{\cot(\pi - \frac{11\pi}{34})\}^2$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \cot^2\frac{7\pi}{34} - \cot^2\frac{11\pi}{34}$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \{\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{17})\}^2 - \{\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{17})\}^2$

$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \tan^2\frac{5\pi}{17} - \tan^2\frac{3\pi}{17}$

$= 1 + \tan^2\frac{3\pi}{17} - 1 - \tan^2\frac{5\pi}{17} + \tan^2\frac{5\pi}{17} - \tan^2\frac{3\pi}{17}$

$= 0$

উদাহরণ 4: দেখান যে, $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) .\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta) .\cos(\pi - \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) .\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) .\cot(\frac{\pi}{2} + \theta)$

সমাধান: বামপক্ষ $= \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) .\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta) .\cos(\pi - \theta)$

$= \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) .\cot(3 \times \frac{\pi}{2} + \theta) .\cos(\pi - \theta)$

$= \cos\theta. (-\tan\theta) .(-\cos\theta)$

$= \cos\theta. \tan\theta. \cos\theta$

$= \cos\theta. \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cos\theta$

$= \sin\theta. \cos\theta$

ডানপক্ষ $= \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) .\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) .\cot(\frac{\pi}{2} + \theta)$

$= \cos\theta.(-\cos\theta). (-\tan\theta)$

$= \cos\theta.(-\tan\theta) .(-\cos\theta)$

$= \cos\theta. \tan\theta. \cos\theta$

$= \cos\theta. \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cos\theta$

$= \sin\theta. \cos\theta$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 5: যদি n-এর মান শুন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা হয় তবে, $\sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: যখন $n = 0$, তখন

$$\sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

যদি n জোড় সংখ্যা এবং একটি অখন্ড সংখ্যা হয় তবে, $n = 2m$

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\} = \sin\{2m\pi + (-1)^{2m} \frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin(2m\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

আবার, n বিজোড় সংখ্যা হলে তবে, $n = 2m + 1$ হবে

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\} = \sin\{(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1} \frac{\pi}{4}\}$$

$$= \sin(2m\pi + \pi - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin(\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

সুতরাং n-এর মান শুন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা হলে আমরা পাই, $\sin\{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

উদাহরণ 6: সমাধান করুন $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{3} = 0$, যখন $0^\circ \le \theta \le 2\pi$

সমাধানঃ $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \tan\theta.\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta + \sqrt{3} - \tan\theta.\cos\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$

বা, $(\tan\theta + \sqrt{3}) - \cos\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta + \sqrt{3})(1 - \cos\theta) = 0$

হয়, $\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta = -\sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = -\tan\frac{\pi}{3}$

বা, $\tan\theta = \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$ অথবা, $\tan(2\pi - \frac{\pi}{3})$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{2\pi}{3}, \tan\frac{5\pi}{3}$

$\therefore\ \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

অথবা, $1 - \cos\theta = 0$

বা, $\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \cos 0^\circ, \cos 2\pi$

$\therefore\ \theta = 0^\circ, 2\pi$

যেহেতু, $0^\circ \le \theta \le 2\pi$

$\therefore\ \theta = 0^\circ, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

উদাহরণ 7: সমাধান করুন $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$, যখন $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

সমাধানঃ $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - 2\cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -1 = \cos 180^\circ$

$\therefore\ \theta = 180^\circ$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60^\circ = \cos(300^\circ - 60^\circ)$

$\therefore\ \theta = 60^\circ, 300^\circ$

যেহেতু, $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

$\therefore\ \theta = 60^\circ, 180^\circ, 360^\circ$

অনুশীলনী ২১.৪

1। মান নির্ণয় করুন

i) $\sin 675^\circ$ ii) $\cot 2190^\circ$ iii) $\operatorname{cosec} 765^\circ$ iv) $\sec(-2580^\circ)$ v) $\cot(-1560^\circ)$

[উ: i) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ii) $\sqrt{3}$ iii) $\sqrt{2}$ iv) 2 v) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2। মান নির্ণয় করুন

i) $\sin(-\frac{29\pi}{4})$ ii) $\operatorname{cosec}\frac{16\pi}{3}$ iii) $\tan(\frac{5\pi}{2} -)$

[উ: i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ii) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3। মান নির্ণয় করুন

i) $\sin 105^\circ + \sin 255^\circ + \cos 450^\circ + \cos 540^\circ$ [উ:

ii) $\cos 420^\circ . \sin(-300^\circ) - \sin 870^\circ . \cos 570^\circ$ [উ:

iii) $\tan 225^\circ . \cot 405^\circ + \tan 765^\circ . \cot 675^\circ$ [উ: 0]

iv) $\frac{\sin 250^\circ + \tan 290^\circ}{\cot 200^\circ + \cos 340^\circ}$ [উ: -1]

4। মান নির্ণয় করুন

i) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$ [উ: 2]

ii) $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$ [উ: 2]

iii) $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$ [উ: 3]

5। দেখান যে,

i) $\sin(\frac{5\pi}{2} + \theta) .\cos(3\pi - \theta) .\cot(\frac{7\pi}{2} + \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) .\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) .\cot(\frac{5\pi}{2} + \theta)$

ii) $\cos^2(3\pi + \theta).\operatorname{cosec}(\frac{3\pi}{2} + \theta).\cot(\frac{5\pi}{2} - \theta) = \sin^2(\frac{3\pi}{2} - \theta).\sec(4\pi - \theta).\tan(3\pi - \theta) = \sin\theta$

6। n- একটি অখন্ড পূর্ণ সংখ্যা হলে মান নির্ণয় করুন।

i) $\tan\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\}$ [উ: 1]

ii) $\sin \{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\}$ [উঃ $\frac{1}{2}$]

iii) $\operatorname{cosec} \{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6}\}$ [উঃ $\pm 2, \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$]

6। দেখান যে, $\tan\theta = \dfrac{\sin(\theta - \pi).\cot(\theta - \frac{7\pi}{2}).\sec(\theta - \pi)}{\cos(\theta - \frac{3\pi}{2}).\operatorname{cosec}(\theta + \frac{5\pi}{2})}$

7। নিম্নের সমীকরণ গুলোতে θ-এর মান নির্ণয় করুন

i) $\sec\theta = -2$, যখন $90^\circ < \theta < 180^\circ$ [উঃ 120°]

ii) $\tan\theta = -\sqrt{3}$, যখন $270^\circ < \theta < 360^\circ$ [উঃ 300°]

iii) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, যখন $360^\circ < \theta < 540^\circ$ [উঃ 420°]

8। সমাধান করুন : যখন $0^\circ < \theta < 360^\circ$

i) $2(\sin\theta.\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$ [উঃ $60^\circ, 120^\circ$]

ii) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$ [উঃ $120^\circ, 240^\circ$]

iii) $1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta = 0$ [উঃ $30^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ ও 300°]

iv) $\tan^2\theta + \sec\theta = -1$ [উঃ 180°]

v) $3\tan^2\theta - 4\sqrt{3}\sec\theta + 7 = 0$ [উঃ $30^\circ, 330^\circ$]

vi) $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$ [উঃ $30^\circ, 150^\circ$]

vii) $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$ [উঃ 60°]